MEMORIE

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

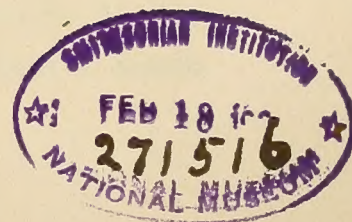
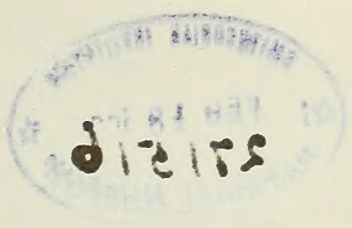
DELL' ISTITUTO DI BOLOGNA

SERIE QUINTA

TOMO I.

BOLOGNA

TIPOGRAFIA GAMBERINI E PARMEGGIANI

1890

ANNO ACCADEMICO 1889-90

MEMBRI DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

ACCADEMICI UFFICIALI

PRESIDENTE

Ruffini Ing. Dott. **Ferdinando Paolo** Uffiz. ✠; Uffiz. ✠; Professore ordinario di Meccanica razionale e Membro del Consiglio Accademico della R. Università di Bologna; incaricato di Statica grafica nella R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri in Bologna; Professore emerito della R. Università di Modena; Membro del Collegio degli Esaminatori pei Licei e Ginnasii del Regno; Socio permanente della R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Modena; Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.

VICE-PRESIDENTE

Brugnoli Dott. **Giovanni** Cav. ✠; Comm. ✠; Comm. dell' Ordine Serbo del Tokowo; Professore ordinario di Patologia speciale medica e Rettore della R. Università di Bologna; Vice-Presidente del Consiglio Sanitario Provinciale di Bologna; Consigliere del Municipio di Bologna.

SEGRETARIO

Cocconi Dott. **Girolamo** Uffiz. ✠; Comm. ✠; già Membro del Consiglio Superiore e della Giunta di pubblica Istruzione e del Consiglio Superiore di Sanità del Regno; Professore ordinario d'Igiene e Materia Medica, Incaricato dell'insegnamento della Ezoognosia, e Direttore della R. Scuola

Superiore di Medicina Veterinaria di Bologna; Membro del Consiglio Accademico della R. Università di Bologna; Professore emerito della R. Università di Parma; Membro della Commissione per la Farmacopea ufficiale del Regno; Consigliere del Municipio di Bologna.

VICE-SEGRETARIO

Saporetti Dott. **Antonio** Cav. ✠; Professore ordinario di Astronomia e Direttore dell' Osservatorio Astronomico della R. Università di Bologna.

AMMINISTRATORE GRAZIOSO

Brugnoli Prof. **Giovanni**, predetto.

ACCADEMICI PENSIONATI O BENEDETTINI

SEZIONE PRIMA

Scienze Fisiche e Matematiche.

Beltrami Dott. **Eugenio** Cav. ✠; Comm. ✠; Cav. ✠; già Membro del Consiglio Superiore di pubblica Istruzione; Professore ordinario di Fisica matematica e di Meccanica Superiore della R. Università di Pavia; Professore emerito delle R. Università di Bologna e di Pisa; Membro effettivo del R. Istituto Lombardo; Socio corrispondente della R. Società di Napoli e della R. Accademia delle scienze di Torino; Socio onorario della R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Modena; Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei; Uno dei XL della Società Italiana delle scienze; Membro corrispondente della R. Accademia delle scienze di Berlino.

Donati Dott. **Luigi** Cav. ✠; Professore ordinario di Fisica matematica nella R. Università di Bologna, e di Fisica tecnica nella R. Scuola di Applicazione per gl' Ingegneri.

Razzaboni Ing. Dott. **Cesare** Comm. ✠; Grande Uffiz. ✠; Professore ordinario d' Idraulica e Direttore della R. Scuola d' Applicazione per gl' In-

gegneri in Bologna; Professore emerito della R. Università di Modena; Membro della Commissione conservatrice de' monumenti ed oggetti d'arte e di antichità in Modena; Membro della Giunta superiore del Catasto e Direttore dei lavori catastali per le Provincie di Modena e di Reggio Emilia; Membro del Consiglio Sanitario Provinciale di Bologna; Socio permanente della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena. Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti; Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei; ex Deputato al Parlamento.

Riccardi Ing. Dott. **Pietro** Uffiz. ✠; Comm. ✠; Professore ordinario di Geometria pratica nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Bologna (a riposo); Professore emerito nella R. Università di Modena; Socio permanente della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena; Socio corrispondente della R. Accademia di scienze, lettere e belle arti di Palermo; Membro della Deputazione di Storia patria per le Provincie Modenesi.

Righi Dott. **Augusto** Cav. ✠; Professore ordinario di Fisica nella R. Università di Bologna, ed incaricato dell'insegnamento della Fisica pei Farmacisti; Socio corrispondente della R. Accademia delle scienze di Torino, e del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.

Ruffini Prof. **Ferdinando Paolo** *Presidente*, predetto.

Saporetti Prof. **Antonio** *Vice-Segretario*, predetto.

Villari Dott. **Emilio** Cav. ✠; Professore ordinario di Fisica ed Incaricato dell' insegnamento della Spettroscopia nella R. Università di Napoli; Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, della R. Società di Napoli, del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, e della R. Accademia delle scienze di Torino; Uno dei XL della Società Italiana delle scienze.

SEZIONE SECONDA

Scienze Naturali.

Bombicci Porta Dott. **Luigi** Cav. ✠; Comm. ✠; Professore ordinario di Mineralogia nella R. Università di Bologna; Incaricato di Mineralogia e Geologia applicate nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri; Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.

Capellini Dott. **Giovanni** Comm. ✠; Comm. ✠; Cav. ✠; Comm. con placca dell'Ordine dell'Aquila Rossa di Prussia; Grande Uffiz. dell'O. della Corona di Romania; Comm. di 1ª classe dell'O. del Leone di Zaehringen (Baden); Gr. Uffiz. dell'O. di S. Marino; Comm. dell'O. di Danebrog di Danimarca; Comm. dell'O. del Salvatore di Grecia; Comm. dell'O. della Stella Polare di Svezia; Comm. dell'O. del merito scientifico di S. Giacomo della Spada di Portogallo; Cav. dell'O. della Concezione di Portogallo; Cav. dell'O. della Rosa del Brasile; Cav. della Legion d'onore di Francia; Uffiziale dell'O. ottomano del Medijdié; Decorato delle Palme dell'Istruzione pubblica di Francia; Medaglia d'oro dei Benemeriti di Romania; Dottore in Leggi *honoris caussa*, della Università di Edinburgh; Professore ordinario di Geologia nella R. Università di Bologna; Dottore aggregato della classe di scienze fisiche nella R. Università di Genova; Presidente del R. Comitato Geologico Italiano; Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, della R. Accademia delle scienze di Torino, e della R. Società di Napoli; Presidente della R. Accademia Valdarnese del Poggio in Montevarchi; Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei; Uno dei XL della Società Italiana delle scienze.

Cavazzi Ing. **Alfredo** Incaricato dell'insegnamento di Chimica Docimastica nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri di Bologna.

Ciaccio Dott. **Giuseppe Vincenzo** Cav. ✠; Comm. ✠; Preside della Facoltà di scienze Matematiche, Fisiche e Naturali, e Professore ordinario di Anatomia e Fisiologia comparata e d'Istologia normale nella R. Università di Bologna.

Cocconi Prof. **Girolamo** *Segretario*, predetto.

Delpino Federico Uffiz. ✠; Professore ordinario di Botanica, Direttore dell'Orto Botanico, e Direttore della Scuola di Magistero in Scienze nella R. Università di Bologna; Socio corrispondente della R. Accademia delle scienze di Torino.

Santagata Dott. **Domenico** Cav. ✠; Professore emerito di Chimica inorganica nella R. Università di Bologna.

Trinchese Dott. **Salvatore** Cav. ✠; Comm. ✠; Membro del Consiglio Superiore e della Giunta di pubblica Istruzione; Professore ordinario di Anatomia comparata ed Incaricato dell'Embriologia comparata nella

R. Università di Napoli; Dottore aggregato della classe di scienze fisiche nella R. Università di Genova; Socio ordinario residente della R. Società di Napoli; Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei; Uno dei XL della Società Italiana delle scienze.

SEZIONE TERZA

Medicina e Chirurgia.

Albertoni Dott. **Pietro** Cav. ✠; Professore ordinario di Fisiologia sperimentale nella R. Università di Bologna; Socio corrispondente nazionale della R. Accademia dei Lincei; Consigliere del Municipio di Bologna.

Brugnoli Prof. **Giovanni** *Vice-Presidente* e *Amministratore grazioso*, predetto.

Calori Dott. **Luigi** Comm. ✠; Comm. ✠; Cav. ✠; Professore ordinario di Anatomia umana e Membro del Consiglio Accademico della R. Università di Bologna; Membro della Commissione pei testi di Lingua; Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, e della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena.

Gotti Dott. **Alfredo** Cav. ✠; Professore ordinario di Chirurgia e di Clinica Medica e Chirurgica Veterinaria, e Incaricato dell'Ostetricia Veterinaria e della Podologia nella Scuola Superiore di Medicina Veterinaria della R. Università di Bologna; Membro del Consiglio Sanitario Provinciale di Bologna.

Taruffi Dott. **Cesare** Cav. ✠; Professore ordinario di Anatomia Patologica e Preside della Facoltà Medico-Chirurgica nella R. Università di Bologna; Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere.

Tizzoni Dott. **Guido** Cav. ✠; Professore ordinario di Patologia generale nella R. Università di Bologna; già Membro del Consiglio Sanitario Provinciale di Bologna.

Verardini Dott. **Ferdinando** Cav. ✠; Cav. ✠; Medico primario dell'Ospedale di Bologna; R. Conservatore del vaccino per le Provincie dell'Emilia, delle Marche e dell'Umbria; già Membro del Consiglio Sanitario Provinciale di Bologna.

ACCADEMICI ONORARI O NON PENSIONATI

SEZIONE PRIMA

Scienze Fisiche e Matematiche.

Colognesi Dott. **Alfonso** Professore titolare di Matematica nel R. Liceo *Galvani* di Bologna.

Cremona Ing. **Luigi** Comm. ✠; Grande Uffiz. ✠; Consigliere e Cav. ✠; Senatore del Regno; Membro e Vice-Presidente del Consiglio Superiore di pubblica Istruzione; Professore ordinario di Matematiche superiori e Incaricato della Geometria analitica nella R. Università di Roma; Direttore della R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Roma; Direttore della Scuola di Magistero in scienze e Membro del Consiglio Accademico della R. Università di Roma; Professore emerito della R. Università di Bologna; Membro effettivo del R. Istituto Lombardo; Socio ordinario non residente della R. Società di Napoli; Socio corrispondente nazionale della R. Accademia delle scienze di Torino e della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena; Socio onorario della R. Accademia di scienze, lettere e belle arti di Palermo; Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei; Uno dei XL della Società Italiana delle scienze; Membro straniero della Società R. di Londra; Membro corrispondente della R. Accademia delle scienze di Berlino.

D'Arcais Ing. **Francesco** Professore ordinario di Calcolo infinitesimale e Libero insegnante di Analisi superiore nella R. Università di Padova.

Fais Ing. **Antonio** Uffiz. ✠; Professore ordinario di Calcolo infinitesimale, Incaricato del Disegno d'ornato e di Architettura elementare e Membro del Consiglio Accademico della R. Università di Cagliari; Professore titolare di Matematica nel R. Liceo *Dettori* di Cagliari.

Filopanti Ing. **Quirico** Professore onorario della R. Università di Bologna; Consigliere del Municipio di Bologna; Deputato al Parlamento.

Gualandi Ing. **Francesco.**

Pincherle Dott. **Salvatore** Professore ordinario di Algebra e Geometria analitica e Incaricato di Geometria superiore nella R. Università di Bologna; Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei.

Sacchetti Ing. **Gualtiero** Cav. ✠; Deputato al Parlamento; Rappresentante il Consorzio Universitario nel Consiglio direttivo della R. Scuola d'Applicazione per gl' Ingegneri in Bologna; Presidente del Consiglio Provinciale di Bologna.

SEZIONE SECONDA

Scienze Naturali.

Bertoloni Prof. **Antonio** Cav. ✠.

Ciamician Dott. **Giacomo** Cav. ✠; Professore straordinario di Chimica generale nella R. Università di Bologna; Membro del Consiglio Sanitario Provinciale di Bologna.

Fornasini Dott. **Carlo** Cav. ✠.

Giacomelli Prof. **Enrico**.

Gibelli Dott. **Giuseppe** Cav. ✠; Professore ordinario di Botanica, e Direttore dell'Orto Botanico nella R. Università di Torino; Membro residente della R. Accademia delle scienze di Torino; Socio sopranumerario della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena; Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo; Socio corrispondente nazionale della R. Accademia dei Lincei.

Morini Dott. **Fausto** Professore straordinario di Botanica nella R. Università di Sassari; Libero insegnante con effetti legali di Botanica nella R. Università di Bologna.

SEZIONE TERZA

Medicina e Chirurgia.

Colucci Dott. **Vincenzo** Professore straordinario di Patologia generale e di Anatomia patologica nell'Istituto Veterinario della R. Università di Parma; Libero insegnante con effetti legali delle stesse materie nella R. Università di Bologna.

D'Ajutolo Dott. **Giovanni** Assistente alla Cattedra di Anatomia patologica nella R. Università di Bologna.

Fabbri Dott. **Ercole Federico** Professore ordinario di Ostetricia e di Clinica Ostetrica, Dottrine delle malattie delle donne e dei bambini, nella R. Università di Modena; Socio attuale della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena.

Gamberini Dott. **Pietro** Cav. ✠; Uffiz. ✠; Professore straordinario di Dermopatologia e Clinica dermopatica, di Sifilopatologia e Clinica sifilopatica nella R. Università di Bologna.

Gualandi Dott. **Giovanni.**

Massarenti Dott. **Carlo** Cav. ✠; Professore straordinario di Ostetricia, di Clinica Ostetrica e Pediatria nella R. Università di Bologna.

Murri Dott. **Augusto** Cav. ✠; Cav. ✠; Membro del Consiglio Superiore di pubblica Istruzione; Professore ordinario di Clinica Medica e Membro del Consiglio Accademico della R. Università di Bologna; Professore onorario della Libera Università di Camerino; Consigliere del Municipio di Bologna e Membro del Consiglio Sanitario Provinciale di Bologna.

Vitali Dott. **Dioscoride** Professore ordinario di Chimica Farmaceutica, Direttore della Scuola di Farmacia e Membro del Consiglio Accademico della R. Università di Bologna; Membro della Commissione per la Farmacopea ufficiale del Regno; Membro del Consiglio Sanitario Provinciale di Bologna; Presidente onorario dell'Associazione generale de' Farmacisti italiani; Consigliere del Municipio di Bologna.

ACCADEMICI AGGREGATI

SEZIONE PRIMA

Scienze Fisiche e Matematiche.

Benetti Ing. **Jacopo** Uffiz. ✠; Comm. ✠; Professore ordinario di Macchine agricole, idrauliche e termiche, e Incaricato dell'insegnamento sul Materiale mobile delle strade ferrate nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Bologna.

SEZIONE TERZA

Medicina e Chirurgia.

Mazzotti Dott. **Luigi** Medico primario dell'Ospedale Maggiore di Bologna.

ACCADEMICI CORRISPONDENTI NAZIONALI

SEZIONE PRIMA

Scienze Fisiche e Matematiche.

Battaglini Ing. **Giuseppe** Uffiz. ✠; Comm. ✠; Cav. ✠; Membro del Consiglio Superiore di pubblica Istruzione; Professore ordinario di Analisi superiore nella R. Università di Napoli; Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei; Socio corrispondente della R. Accademia delle scienze di Torino e della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena; Presidente della Classe di scienze fisiche e matematiche della R. Società di Napoli; Uno dei XL della Società Italiana delle scienze.

Betti Ing. **Enrico** Comm. ✠; Grande Uffiz. ✠; Cav. ✠; Comm. della Stella polare di Svezia; Senatore del Regno; Membro del Consiglio Superiore di pubblica Istruzione; Professore ordinario di Fisica matematica, Incaricato di Astronomia e Meccanica celeste, e Membro del Consiglio Ac-

cademico nella R. Università di Pisa; Direttore degli studi nella R. Scuola normale Superiore di Pisa; Socio corrispondente della R. Società di Napoli; Membro della R. Accademia delle scienze di Torino; Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo, del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti e della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena; Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei; Uno dei XL della Società Italiana delle scienze; Membro corrispondente della R. Accademia delle scienze di Berlino.

Blaserna Dott. **Pietro** Uffiz. ✠; Comm. ✠; Cav. ✠; già Membro del Consiglio Superiore e della Giunta di pubblica Istruzione; Professore ordinario di Fisica sperimentale e Preside della Facoltà di scienze Fisiche, Matematiche e Naturali nella R. Università di Roma; Vice-Presidente della Società geografica italiana; Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, e della R. Accademia delle scienze di Torino; Socio onorario della R. Accademia di scienze, lettere e belle arti di Palermo; Segretario della R. Accademia dei Lincei per la classe di scienze Fisiche, Matematiche e Naturali; Uno dei XL della Società Italiana delle scienze.

Boncompagni S. E. Don **Baldassarre** dei Principi di Piombino; Membro onorario della R. Accademia delle scienze di Berlino; Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, della R. Accademia delle scienze di Torino e della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena; Socio residente dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.

Brioschi Ing. **Francesco** Grande Uffiz. ✠; Gr. Uffiz. ✠; Cav. ✠; Comm. dell' Ordine del Cristo di Portogallo; Senatore del Regno; già Membro del Consiglio Superiore e della Giunta di pubblica Istruzione; Professore ordinario d' Idraulica e Direttore del R. Istituto tecnico Superiore di Milano; Professore emerito della R. Università di Pavia; Membro effettivo del R. Istituto Lombardo; Socio ordinario non residente della R. Società di Napoli; Membro della R. Accademia delle scienze di Torino; Presidente della R. Accademia dei Lincei; Uno dei XL della Società Italiana delle scienze; Socio corrispondente della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena; Socio onorario della R. Accademia di scienze, lettere e belle arti di Palermo; Membro corrispondente dell' Istituto di Francia, e della R. Accademia delle scienze di Berlino.

Casorati Dott. **Felice** Uffiz. ✠; Comm. ✠; Cav. ✠; Professore ordinario

di Calcolo differenziale ed integrale e di Analisi superiore nella R. Università di Pavia; Socio corrispondente delle RR. Accademie delle scienze di Torino e di Palermo; Membro effettivo del R. Istituto Lombardo; Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei; Uno dei XL della Società Italiana delle scienze; Membro corrispondente della R. Accademia delle scienze di Berlino.

Denza Padre **Francesco** Comm. ; Direttore dell'Osservatorio Meteorologico del R. Collegio *Carlo Alberto* in Moncalieri e della Specula Vaticana; Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti e della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena; Socio Onorario della R. Accademia di scienze, lettere e belle arti di Palermo.

De Rossi Prof. **Michele Stefano** Comm. dell'Ordine di S. Gregorio Magno; Socio corrispondente della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena.

Felici Dott. **Riccardo** Cav. ; Comm. ; Cav. ; Professore ordinario di Fisica sperimentale e Membro del Consiglio Accademico della R. Università di Pisa; Membro del Consiglio direttivo della R. Scuola normale superiore di Pisa; Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, e della R. Accademia delle scienze di Torino; Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei; Uno dei XL della Società Italiana delle scienze.

Negri Barone **Cristoforo** Grande Uffiz. ; Gr. Uffiz. ; Inviato straordinario e Ministro plenipotenziario a riposo; 1° Presidente fondatore della Società geografica italiana; Consultore legale del Ministero per gli affari esteri; Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, e della R. Accademia delle scienze di Torino.

Palmieri Dott. **Luigi** Grande Uffiz. ; Gr. Uffiz. ; Cav. ; Senatore del Regno; Professore ordinario di Fisica terrestre e meteorologica, e Direttore dell'Osservatorio meteorologico Vesuviano nella R. Università di Napoli; Vice-Presidente dell'Accademia Pontoniana di Napoli; Socio residente della R. Società di Napoli; Segretario dell'Istituto d'incoraggiamento alle Scienze naturali di Napoli; Socio onorario della R. Accademia di scienze, lettere e belle arti di Palermo; Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, e della R. Accademia dei Lincei; Uno dei XL della Società italiana delle scienze.

Schiapparelli Ing. Prof. **Giovanni** Comm. ✠; Grande Uffiz. ✠ Cav. ✠; Comm. dell'Ordine di S. Stanislao di Russia; Senatore del Regno; già Membro del Consiglio Superiore di pubblica Istruzione; 1° Astronomo e Direttore dell'Osservatorio Astronomico di Brera; Membro effettivo del R. Istituto Lombardo; Socio corrispondente dell' I. Accademia di Vienna; Socio corrispondente della R. Società di Napoli; Socio onorario della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena e della R. Accademia di scienze, lettere e belle arti di Palermo; Membro della R. Accademia delle scienze di Torino; Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei; Uno dei XL della Società Italiana delle scienze; Membro corrispondente della R. Accademia delle scienze di Berlino.

Siacci Ing. **Francesco** Cav. ✠; Comm. ✠; Luogotenente Colonello nell'Arma di Artiglieria; Professore ordinario di Meccanica superiore nella R. Università di Torino, e Professore di matematiche applicate alla Scuola d'Applicazione delle armi di Artiglieria e Genio; Rappresentante il Ministero della guerra nel Consiglio di Amministrazione della R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri di Torino; Membro della R. Accademia delle scienze di Torino; Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo, e della R. Accademia dei Lincei; Uno dei XL della Società Italiana delle scienze; Deputato al Parlamento Nazionale.

Tacchini Ing. Prof. **Pietro** Comm. ✠; Direttore dell' Ufficio centrale di Meteorologia e dell'Osservatorio del Collegio Romano; Consigliere della Società geografica italiana; Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle scienze di Torino, del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, e della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena; Socio attivo della R. Accademia di scienze, lettere e belle arti di Palermo.

Tondini de' Quarenghi Padre **Cesare,** Barnabita.

SEZIONE SECONDA

Scienze Naturali.

Cannizzaro Stanislao Comm. ✠; Comm. ✠; Cav. ✠; Vice-Presidente del Senato del Regno; Membro del Consiglio Superiore di Pubblica Istruzione; Professore di Chimica generale, Direttore dell'Istituto Chimico e

della Scuola di Farmacia e Membro del Consiglio Accademico nella R. Università di Roma; Incaricato della Chimica docimastica nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri di Roma; Socio ordinario non residente della R. Accademia delle scienze di Torino e della R. Società di Napoli; Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, e del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere; Socio attivo della R. Accademia di scienze, lettere e belle arti di Palermo; Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei; Uno dei XL della Società Italiana delle scienze; Membro corrispondente della R. Accademia delle scienze di Berlino e della I. Accademia delle scienze di Vienna.

Cossa Nob. Dott. **Alfonso** Comm. ✠; Comm. ✠; Comm. dell'Ordine d'Isabella la Cattolica di Spagna; Membro del Consiglio Superiore di pubblica Istruzione; Professore ordinario di Chimica docimastica, e Direttore della R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Torino; Incaricato della Chimica applicata ai prodotti minerali nel R. Museo Industriale Italiano; Membro del R. Comitato Geologico Italiano; Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti; Socio ordinario non residente dell'Istituto di incoraggiamento alle scienze naturali di Napoli; Presidente della R. Accademia di Agricoltura di Torino; Membro della R. Accademia delle scienze di Torino; Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei; Uno dei XL della Società Italiana delle scienze.

Costa Achille Comm. ✠; Uffiz. ✠; Professore ordinario di Zoologia nella R. Università di Napoli; Socio ordinario residente della R. Società di Napoli; Segretario della Società Italiana delle scienze detta dei XL.

De Zigno Barone **Achille** Comm. ✠; Comm. ✠; Cav. dell'Ordine della Corona ferrea d'Austria; Cav. dell'Ordine della Concezione di Portogallo; Uffiziale dell'Accademia di Francia; decorato della Croce di San Lodovico pel Merito civile; Membro del R. Comitato geologico Italiano; Socio ordinario non residente della R. Società di Napoli; Socio corrispondente della R. Accademia delle scienze di Torino; Membro del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti; Corrispondente nazionale della R. Accademia dei Lincei; Uno dei XL della Società Italiana delle scienze.

Omboni Giovanni Cav. ✠; Professore ordinario di Geologia, Direttore della Scuola di Farmacia e Membro del Consiglio Accademico della R. Università di Padova; Incaricato della Mineralogia e Geologia appli-

cata ai materiali di costruzione nella R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri in Padova; Membro del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti; Socio corrispondente della R. Società di Napoli.

Passerini Dott. **Giovanni** Cav. ; Comm. ; Membro del Consiglio Superiore di pubblica Isiruzione; Professore ordinario di Botanica, Direttore della Scuola di Farmacia, Incaricato della Direzione del R. Istituto Veterinario, e Membro del Consiglio Accademico della R. Università di Parma; Membro della Commissione Reale consultiva per combattere la Filossera; Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei.

Pavesi Dott. **Pietro** Cav. ; Uffiz. ; Comm. dell'Ordine austriaco di Francesco Giuseppe; Professore ordinario di Zoologia nella R. Università di Pavia; Membro effettivo del R. Istituto Lombardo; Membro della Società geografica italiana.

Scacchi Arcangelo Comm. ; Grande Uffiz. ; Cav. ; Senatore del Regno; Professore ordinario di Mineralogia, Direttore della Scuola di Farmacia, Direttore della Scuola di magistero in Scienze, e Membro del Consiglio Accademico della R. Università di Napoli; Membro del Consiglio d'amministrazione della R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Napoli; Membro del R. Comitato geologico Italiano; Socio corrispondente della R. Accademia delle scienze di Torino, del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti; Socio onorario della R. Accademia di scienze, lettere e belle arti di Palermo; Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei; Presidente del R. Istituto di incoraggiamento alle scienze naturali di Napoli; Segretario della R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli; Presidente della Società Italiana delle scienze detta dei XL; Membro corrispondente della R. Accademia delle scienze di Berlino.

Stoppani Abate **Antonio** Cav. ; Uffiz. ; Cav. ; Direttore del Museo Civico di Storia naturale di Milano; Professore ordinario di Geologia e di Geografia fisica, e Membro del Consiglio Direttivo del R. Istituto Tecnico Superiore di Milano; Accademico corrispondente della Crusca; Membro del R. Comitato geologico Italiano; Membro effettivo del R. Istituto Lombardo; Socio onorario della R. Accademia di scienze, lettere e belle arti di Palermo; Socio corrispondente della R. Società di Napoli e della R. Accademia delle scienze di Torino; Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei; Uno dei XL della Società Italiana delle scienze.

Strüver Dott. **Giovanni** Comm. ✠; già Membro del Consiglio Superiore di pubblica Istruzione; Professore Ordinario di Mineralogia nella R. Università di Roma; Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei; Socio corrispondente della R. Accademia delle scienze di Torino.

SEZIONE TERZA

Medicina e Chirurgia.

Baccelli Dott. **Guido** Gran Cordone ✠; Gran Cordone ✠; Cav. ✠; Cav. dell'Ordine di S. Gregorio Magno; Comm. dell'O. scient. di Federico di Prussia; Professore Ordinario di Clinica Medica nella R. Università di Roma; Socio onorario della R. Accademia di scienze, lettere e belle arti di Palermo; Presidente del Consiglio Superiore di Sanità del Regno; Vice-Presidente della Camera dei Deputati; ex Ministro della Pubblica Istruzione; Membro onorario straniero dell'Accademia R. di Medicina del Belgio.

Bottini Dott. **Enrico** Comm. ✠; Professore ordinario di Clinica Chirurgica e Medicina operatoria (in aspettativa); Deputato al Parlamento Nazionale.

Corradi Dott. **Alfonso** Comm. ✠; Comm. ✠; già Membro del Consiglio Superiore di pubblica Istruzione; Professore ordinario di Terapeutica generale, Materia Medica e Farmacologia sperimentale nella R. Università di Pavia; Membro del Consiglio Superiore di Sanità e della Commissione per la Farmacopea ufficiale del Regno; Membro effettivo del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere; Presidente della R. Società italiana d'Igiene; Socio sopranumerario della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena; Membro onorario straniero dell'Accademia R. di Medicina del Belgio.

Giacomini Dott. **Carlo** Cav. ✠; Cav. ✠; Professore ordinario di Anatomia umana descrittiva, topografica e di Istologia nella R. Università di Torino; Membro della R. Accademia di Medicina di Torino.

Moleschott Dott. **Jacopo** Comm. ✠; Grande Uffiz. ✠; Comm. dell'Ordine di Casa Mecklemburg; Cav. del Leone Neerlandese; Senatore del Regno; già Membro del Consiglio Superiore di pubblica Istruzione; Pro-

fessore ordinario di Fisiologia nella R. Università di Roma; Professore onorario della Facoltà Medico-Chirurgica di Torino; Presidente della Commissione per la Farmacopea ufficiale del Regno; Membro della R. Accademia delle scienze di Torino; Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti e della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena; Membro del Consiglio Superiore di Sanità del Regno.

Nicolucci Dott. **Giustiniano** Uffiz. ✠; Professore ordinario di Antropologia nella R. Università di Napoli; Ispettore onorario degli scavi e monumenti di antichità della Provincia di Caserta; Socio residente della R. Società di Napoli; Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti e della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena; Uno dei XL della Società Italiana delle scienze.

Paladino Dott. **Giovanni** Cav. ✠; Preside della Facoltà di scienze naturali, e Professore ordinario di Fisiologia e Istologia generale nella R. Università di Napoli; Professore ordinario di Zoologia, Anatomia generale e speciale e di Fisiologia sperimentale nella R. Scuola Superiore di Medicina Veterinaria di Napoli.

Palasciano Dott. **Ferdinando** Comm ✠; Senatore del Regno; Professore onorario della R. Università di Napoli; Membro onorario straniero dell'Accademia Reale di Medicina del Belgio.

Rivolta Sebastiano Cav. ✠; Professore ordinario di Patologia generale ed Anatomia patologica Veterinaria nella R. Scuola Superiore di Medicina Veterinaria della Università di Pisa.

Sangalli Dott. **Giacomo** Cav. ✠; Comm. ✠; Professore ordinario di Anatomia Patologica e Preside della Facoltà di Medicina e Chirurgia della R. Università di Pavia; Membro effettivo del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere.

ACCADEMICI CORRISPONDENTI ESTERI

SEZIONE PRIMA

Scienze Fisiche e Matematiche.

Airy Sir **Giorgio Biddell** Cav. dell'Ordine di Prussia *pour le mérite;* Membro della Società R. di Londra; Membro straniero della R. Accademia delle scienze di Berlino; Socio straniero della R. Accademia dei Lincei, e della Società Italiana dei XL - *Greenwich* (Londra).

Boltzmann Dott. **Lodovico** Prof. di Fisica nell'Università di *Graz;* Membro dell'I. Accademia delle scienze di Vienna; Membro onorario della R. Accademia delle scienze di Berlino.

Darboux Gastone Professore alla Facoltà delle scienze; Membro dell'Istituto di Francia - *Parigi.*

Fizeau Prof. **Armando Ippolito** Membro corrispondente della R. Accademia delle scienze di Berlino; Membro straniero della Società R. di Londra, e della R. Accademia dei Lincei - *Parigi.*

Helmholtz (von) **Ermanno Luigi Ferdinando** Consigliere di Stato; Socio corrispondente dell'Istituto di Francia; Socio ordinario della R. Accademia delle scienze di Berlino; Membro onorario dell'I. Accademia delle scienze di Vienna; Membro onorario straniero dell'Accademia R. di Medicina del Belgio; Membro straniero della Società R. di Londra; Socio straniero della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle scienze di Torino, della R. Società di Napoli, e della Società Italiana dei XL; Professore di Fisica nell'Università di *Berlino.*

Hermite Carlo Gran Croce della Legion d'Onore; Prof. alla Facoltà delle scienze; Membro dell'Istituto di Francia; Membro straniero della R. Accademia delle scienze di Berlino; Membro onorario dell'I. Accademia delle scienze di Vienna; Socio straniero della R. Accademia dei Lincei, della Società Italiana dei XL, della R. Società di Napoli, della R. Accademia delle scienze di Torino, e della Società R. di Londra - *Parigi.*

Kronecker Prof. **Leopoldo** Socio straniero della R. Accademia dei Lincei; Membro straniero della Società R. di Londra - *Berlino.*

Lipschitz Prof. **Rodolfo** Membro corrispondente della R. Accademia di scienze di Berlino - *Bonn.*

Neumann Prof. **Carlo** - *Leipzig.*

Neumann Francesco Ernesto Membro onorario dell' I. Accademia delle scienze di Vienna; Membro straniero della R. Accademia delle scienze di Berlino; della Società R. di Londra, e della R. Accademia dei Lincei; Professore nell' Università di *Königsberg.*

Reye Prof. **Teodoro** Rettore dell' Università di *Strassburg.*

Tchebitchef Prof. **Pafnutij** Socio straniero della R. Accademia dei Lincei; Membro straniero della Società R. di Londra - *S. Pietroburgo.*

Thomson Sir **Guglielmo** Professore di Filosofia naturale nell' Università di *Glasgow;* Comm. della Legion d' Onore di Francia; Cav. dell' O. di Prussia *pour le mérite;* Membro della Società R. di Londra; Membro onorario dell' I. Accademia delle scienze di Vienna; Socio straniero dell' Istituto di Francia, della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle scienze di Torino, e della Società Italiana dei XL; Membro corrispondente della R. Accademia delle scienze di Berlino.

Weber Dott. **Guglielmo Eduardo** Consigliere privato; Professore di Fisica e Direttore dell' Istituto Fisico di *Gottinga;* Membro onorario dell' I. Accademia delle scienze di Vienna; Membro straniero della R. Accademia delle scienze di Berlino, della Società R. di Londra, e della R. Accademia delle scienze di Torino.

Weierstrass Dott. **Carlo** Professore di Matematica nell' Università di *Berlino;* Socio ordinario della R. Accademia delle scienze di Berlino; Membro straniero dell' I. Accademia delle scienze di Vienna, della Società R. di Londra, e della R. Accademia delle scienze di Torino.

Wiedmann Gustavo Membro straniero della Società R. di Londra, e della R. Accademia delle scienze di Torino; Membro corrispondente della R. Accademia delle scienze di Berlino; Professore all' Università di *Lipsia.*

Yule Colonello **Enrico** Membro della Società Geografica italiana - *Londra.*

SEZIONE SECONDA

Scienze Naturali.

Blanchard Prof. **Carlo Emilio** Membro dell'Istituto di Francia - *Parigi.*

Bunsen Dott. **Roberto Guglielmo** Consigliere aulico; Professore di Chimica e Direttore dell'Istituto chimico nell'Università di *Heidelberg;* Membro onorario dell' I. Accademia delle scienze di Vienna; Membro straniero della R. Accademia delle scienze di Berlino, della Società R. di Londra, della R. Accademia dei Lincei, della R. Società di Napoli, della R. Accademia delle scienze di Torino, e della Società Italiana dei XL.

Daubrée Gabriele Augusto Direttore della Scuola Nazionale delle Miniere; Membro dell' Istituto di Francia; Membro straniero della Società R. di Londra, della R. Accademia dei Lincei e della R. Accademia delle scienze di Torino - *Parigi.*

De Candolle Alfonso Membro corrispondente della R. Accademia delle scienze di Berlino; Membro straniero della Società R. di Londra, della R. Accademia delle scienze di Torino, e della R. Accademia dei Lincei; Socio corrispondente estero della R. Accademia di scienze, lettere e belle arti di Palermo; Professore di Botanica a *Ginevra.*

Flower Prof. **Guglielmo Enrico** Membro della Società R. di Londra; Direttore del Dipartimento di Storia naturale al *British Museum - Londra.*

Gaudry Prof. **Alberto** - *Parigi.*

Hoffmann Dott. **Guglielmo Augusto** Uffiz. ✠; Cav. ✠; Uffiz. della Legion d'onore, dell'Ordine austriaco di Francesco Giuseppe e della Rosa del Brasile; Dottore onorario dell'Università di Bologna; Professore di Chimica nell' Università di *Berlino;* Presidente della Società Chimica di Berlino; Membro della R. Accademia delle scienze di Berlino; Corrispondente straniero dell' I. Accademia delle scienze di Vienna, dell' Accademia I. di S. Pietroburgo, dell' Istituto di Francia, della R. Accademia dei Lincei, e della R. Accademia delle scienze di Torino; Membro straniero della Società Reale di Londra.

Hooker Sir **Giuseppe Dalton** Membro della Società R. di Londra; Membro corrispondente della R. Accademia delle scienze di Berlino; Socio straniero della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle scienze di Torino e della R. Accademia delle scienze, lettere e belle arti di Palermo; Direttore dei *Royal Kew Gardens - Londra.*

Owen Sir **Riccardo** Cav. dell'Ordine di Prussia *pour le mérite;* Membro onorario dell'I. Accademia delle scienze di Vienna; Membro straniero della R. Accademia delle scienze di Berlino; Membro della Società R. di Londra; Socio straniero della R. Accademia dei Lincei, della Società Italiana dei XL, della R. Accademia delle Scienze di Torino, e della R. Società di Napoli; Professore e Direttore delle Collezioni di Storia naturale al *British Museum - Londra.*

Pauthier G. P. Guglielmo - *Parigi.*

Philippi Rodolfo Armando Socio Corrispondente della R. Accademia delle scienze di Torino - *Santiago del Chili.*

Quatrefages de Breau Prof. **Giovanni Luigi Armando** Membro dell'Istituto di Francia; Membro straniero della Società R. di Londra - *Parigi.*

Regel S. E. Dott. **Edoardo** Consigliere di Stato attuale: Socio corrispondente estero della R. Accademia di scienze, lettere e belle arti di Palermo; Direttore del Giardino Imperiale di Botanica a *S. Pietroburgo.*

Renard Dott. **Carlo** Consigliere privato; Presidente dell'I. Società dei naturalisti di *Mosca.*

Schrauf Dott. **Alberto** Professore di Mineralogia nell'Universita di *Vienna;* Membro corrispondente nazionale dell'I. Accademia delle scienze di Vienna.

Sclater Filippo Lutley Socio corrispondente della R. Accademia delle scienze di Torino; Segretario della Società Zoologica di *Londra.*

Steenstrup Prof. **Gio. Japetus Smith** Membro straniero della Società R. di Londra, e della R. Accademia dei Lincei; Membro corrispondente della R. Accademia delle scienze di Berlino - *Copenaghen.*

Van Beneden Prof. **Pietro Giuseppe** Membro straniero della Società R. di Londra; Membro onorario Belga dell'Accademia R. di Medicina del Belgio; Membro corrispondente della R. Accademia delle scienze di Berlino - *Lovanio.*

SEZIONE TERZA

Medicina e Chirurgia.

Beale Dott. **Lionello Smith** Professore di Medicina pratica e già di Fisiologia e d'Anatomia Patologica nel King's College di Londra; Corrispondente straniero dell'Accademia R. di Medicina del Belgio; Membro della Società R. di *Londra.*

Bergh Prof. **Rodolfo** Medico primario nell'Ospedale di *Copenaghen.*

Billroth Dott. **Teodoro** Consigliere Aulico; Professore di Chirurgia e di Clinica chirurgica nell'Università di *Vienna;* Membro dell'I. Accademia delle scienze di Vienna; Membro onorario straniero dell'Accademia R. di Medicina del Belgio; Dottore onorario della R. Università di Bologna..

Braun de Fernwald Cav. Prof. **Carlo** - *Vienna.*

Charcot Prof. **J. M.** Membro dell'Istituto di Francia; Membro onorario straniero dell'Accademia R. di Medicina del Belgio - *Parigi.*

Gruber Dott. **Venceslao Leopoldo** Professore emerito e Direttore dell'Istituto di Anatomia pratica dell'Accademia Medica di S. Pietroburgo; Consigliere privato; Membro onorario straniero dell'Accademia R. di Medicina del Belgio - *S. Pietroburgo.*

Gurlt Dott. **E. F.** Professore di Chirurgia all'Università di *Berlino.*

Holmes Prof. **T.** - *Londra.*

Hyrtl Dott. **Giuseppe** Consigliere aulico e Professore emerito di Anatomia

nell'Università di Vienna; Membro dell'I. Accademia delle scienze di Vienna - *Perchtoldsdorf,* Südbahn (Austria).

Janssens Dott. **Eugenio** Membro titolare dell'Accademia R. di Medicina del Belgio; Ispettore Capo del servizio d'Igiene della città di *Bruxelles.*

Kock Prof. **Roberto** Consigliere intimo Medico; Corrispondente straniero dell'Accademia R. di Medicina del Belgio, e della R. Accademia delle scienze di Torino - *Berlino.*

Köllicker Prof. **Alberto** Membro corrispondente della R. Accademia delle scienze di Berlino; Membro straniero della Società R. di Londra - *Würzburg.*

Leyden Prof. **E.** - *Berlino.*

Martin Dott. **Eduardo** - *Berlino.*

Pasteur Prof. **Luigi** Membro dell'Istituto di Francia e dell'Accademia Francese; Membro onorario straniero dell'Accademia R. di Medicina del Belgio; Membro straniero della Società R. di Londra; Corrispondente straniero dell'I. Accademia delle scienze di Vienna - *Parigi.*

Ranvier Prof. **Luigi** Corrispondente straniero dell'Accademia R. di Medicina del Belgio - *Parigi.*

Retzius Prof. **Gustavo** - *Stoccolma.*

Robin Prof. **Carlo** - *Parigi.*

Schiff Prof. **Maurizio** Cav. ✠; Membro onorario straniero dell'Accademia R. di Medicina del Belgio - *Ginevra.*

Virchow Prof. **Rodolfo** Socio ordinario della R. Accademia di Berlino; Membro straniero della Società R. di Londra; Membro onorario straniero dell'Accademia R. di Medicina del Belgio e della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena - *Berlino.*

ACCADEMICI DEFUNTI NELL'ANNO 1889-90

Loreta Conte Comm. Prof. **Pietro,** Accademico Benedettino, morto in Bologna il 20 Luglio 1889.

Bellardi Uffiz. Prof. **Luigi,** Accademico Onorario, morto in Torino in Settembre 1889.

Respighi Comm. Prof. **Lorenzo,** Accademico corrispondente nazionale, morto in Roma il 10 Dicembre 1889.

Joule Dott. **James Prescott,** Accademico corrispondente straniero, morto l'11 Ottobre 1889.

Hirn Prof. **Gustavo Adolfo,** Accademico corrispondente straniero, morto a Colmar il 14 Gennaio 1890.

Hébert Prof. **Edmondo,** Accademico corrispondente straniero, morto a Parigi il 4 Aprile 1890.

Biagi Dott. Don **Clodoveo,** Accademico Onorario morto in Bologna il 21 Maggio 1890.

Soret Prof. **Luigi,** Accademico corrispondente straniero, morto a Ginevra il 31 Maggio 1890.

SAGGIO

DI UNA

BIBLIOGRAFIA EUCLIDEA

PARTE QUARTA

MEMORIA

del Professore PIETRO RICCARDI

(Letta nella Sessione del 24 Febbraio 1889).

AGGIUNTE ALL' **Elenco cronologico** DELLE EDIZIONI DELLE OPERE DI EUCLIDE, E SCRITTI INTORNO AL QUINTO POSTULATO DEI SUOI *ELEMENTI*.

Bene mi apposi quando nella prima parte di questa mia BIBLIOGRAFIA EUCLIDEA, affermai che malgrado lo avere registrate oltre ad un migliaio di edizioni del testo e delle traduzioni e riduzioni de' suoi Elementi, non presumeva di averne noverata la massima parte. Nel breve periodo di poco più di un anno trascorso dalla pubblicazione di quella prima parte, sono riescito a raccogliere le indicazioni di altre quattrocento pubblicazioni attinenti alla bibliografia Euclidea, ed a meglio identificare alcune di quelle che sulle meno esatte indicazioni dei cataloghi a stampa, aveva precedentemente notate.

Debbo alla cortesia degli esimii bibliografi e dotti scienziati Cav. Enrico Narducci, Prof. Ferdinando Jacoli, Prof. I. L. Heiberg, P. A. Manganotti, e P. Carlo Sommervogel, i quali efficacemente mi coadiuvarono in codeste ricerche, le indicazioni relative a parecchie delle edizioni notate in queste AGGIUNTE; e ne rendo loro pubblica testimonianza di viva riconoscenza.

In queste AGGIUNTE ho particolarmente segnalati in una distinta classe, gli scritti speciali concernenti la dimostrazione del famoso Postulato quinto di Euclide, che posto fra le domande, o come taluni reputarono, fra gli Assiomi, costituisce la più grave delle poche mende che si riscontrano nei suoi impareggiabili Elementi.

Premesso il quarto Postulato, nel quale si domanda *che tutti gli angoli*

retti sieno eguali tra loro; il che immediatamente si deduce dalla definizione data dell' angolo retto, soggiunge (Post.V.) « *Ed inoltre che se in due linee rette vi cada un' altra linea retta, e faccia gli angoli interiori dalla stessa parte minori di due retti; quelle due rette prolungate indefinitamente debbano incontrarsi da quella parte dove gli angoli sono minori di due retti* (1) ».

Questo principio sul quale, come è noto, vengono basate la 29ª proposizione del 1° Libro degli Elementi e la teoria delle parallele, avendo d' uopo di essere dimostrato, non può classificarsi fra i Postulati, e nè manco fra gli Assiomi. Imperocchè oltre il mancare della evidenza assiomatica, non è pure, almeno intuitivamente, di facile percezione; in quanto che si potrebbe forse intuire che due rette le quali segate da una terza formano ciascuno degli angoli interiori dalla stessa parte minori del retto, concorrino in un punto; ma non s' intuisce il loro concorso quando uno dei detti angoli è acuto e l' altro ottuso.

Il più antico geometra di cui si conosca un tentativo di rigorosa dimostrazione del quinto Postulato, è Proclo (2); il noto commentatore degli Elementi; il quale assume per evidente il principio ammesso già come assioma da Aristotele, che *se si prolunghino indefinitivamente i lati di un angolo rettilineo, la loro distanza deve farsi maggiore di qualunque linea retta data.* Ma sia perchè questo principio abbisognerebbe di essere dimostrato; sia perchè Proclo non definisce cosa debbasi intendere per distanza fra due rette nel piano; sia perchè egli assume come evidente che due rette parallele siano equidistanti, la sua dimostrazione non venne accolta dai geometri come abbastanza rigorosa. E per verità il sostituire alla definizione delle rette parallele data Euclide, il concetto della equidistanza, benchè accolto, al dire di Proclo, da Posidonio, da Gemino e da Tolomeo, non sembra a sufficienza corretto: avvegnachè quand' anche la equidistanza fra due rette si potesse ammettere senza prima dimostrarne la possibilità, siccome la voce greca παραλληλος equivale ad equidistante, l' affermare come taluni si permisero, che rette parallele sono le equidistanti, è un *idem per idem;* mentre poi d' altra parte alla teoria Euclidea delle parallele, sarebbe necessario sostituire una teoria tutta speciale delle rette equidistanti.

---

(1) Versione del Flauti.

Per molte buone ragioni si ritiene che il testo degli Elementi non sia a noi pervenuto nella sua integrità, come venne composto da Euclide; ed anzi chi prestasse cieca fede nelle sottigliezze della critica moderna, non so cosa rimarrebbe dell'opera originale. Il quinto postulato, avuto riguardo al concetto ond' è informato, al modo di esposizione, al luogo nel quale è collocato, è esso opera di Euclide? È più facile dubitarne che, escludendo quel postulato, il ricostituire il testo nell' ordine col quale venne compilato dall' autore.

(2) V. l' Elenco cronologico nella 2ª parte, alla data 1533¹. Per la indicazione delle successive edizioni e traduzioni, ricorrasi al n.° 13 della Classe VIII nella Parte 3ª.

Nè come abbastanza rigorosa, benchè ingegnosa, potevasi accogliere la dimostrazione del noto Postulato esposta dal geometra Persiano Nassir-Eddin, cui dobbiamo una versione assai riputata degli Elementi di Euclide (1); facendo egli uso della proprietà dei triangoli che forma soggetto della 32ª proposizione del 1° libro d' Euclide, e che dalla 29ª dipende.

I primi traduttori e commentatori degli Elementi, il Campano, lo Zamberti, il Pacioli, il Tartaglia e il Candalla (2), riportano il nostro Postulato, senza alcuna osservazione critica; anzi il Tartaglia afferma che il principio in esso esposto è al senso, alla esperienza ed allo intelletto manifesto; ed il Candalla lo comprende fra gli assiomi, tentando di chiarirne il senso dipendentemente dalla definizione Euclidea delle parallele, che egli arbitrariamente trasforma, sostituendovi il concetto di rette equidistanti.

Solo dopo qualche anno dalla pubblicazione del testo greco dei commenti di Proclo (3) e della traduzione latina fattane dal Barozzi (4), si cominciò a dubitare della evidenza di quel Postulato.

Il Commandino (5) infatti dopo avere in una erudita nota alla Definizione 35ª, esposti i concetti degli antichi geometri (Posidonio, Pithone, Sereno) intorno alle rette parallele, appone al quinto Postulato la seguente osservazione.

« *Proclo giudica, che questo in tutto si debba tor via dal numero dei Postulati, essendo theorema, che anchora ha molte dubitazioni, le quali Ptolomeo in un suo libro, si propose di sciogliere* (6); *& per essere dimostrato ha bisogno di molte deffinitioni, & theoremi, il cui conuerso Euclide etiandio come theorema ne dimostra; ma di questo si dirà di sotto a suo luogo* ».

Ed il suo luogo è appunto la 29ª proposizione del libro 1°; a commento della quale il Commandino riporta in sunto la dimostrazione del quinto postulato data da Proclo.

---

(1) Le diverse edizioni di questa versione sono indicate nel citato Elenco cronologico, sotto le date 1588¹, 1594¹, 1657¹, 1801². Chi non avesse modo di consultarne alcuna, o non conoscesse la lingua araba, vegga un sunto di quella dimostrazione nell' opera del Flauti: *I primi sei libri, e l' 11° e 12° degli Elementi di Euclide* (Napoli 1818, p. 349).

(2) Anche nei sunti o riduzioni della Geometria Euclidea di Boezio e di Giorgio Valla, è semplicemente enunciato il nostro Postulato.

Si avverta che l' Indice alfabetico, per ciascuno di questi nomi d'autori rimanda alle Classi cui appartengono le loro opere; e che alle date indicate nelle Classi corrisponde nell' Elenco cronologico la descrizione bibliografica delle varie edizioni delle opere stesse.

(3) V. nell' Elenco cronologico, sotto la data del 1533¹.

(4) V. Ibid., sotto la data del 1560¹.

(5) V. l' Indice alfabetico, al nome di Commandino Federico.

(6) Non sono riescito a rinvenire il luogo ove Tolomeo, al dire di Proclo, si proponeva di sciogliere queste dubitazioni; nè se e dove le abbia sciolte.

Il Clavio (1) comprende il quinto Postulato fra gli Assiomi (XIII); ma apponendovi una breve nota illustrativa, ne rimanda la dimostrazione ad un lungo Scolio alla 28ª proposizione; nel quale chiarita e discussa la dimostrazione di Proclo, espone la sua che, come avvertí il Flauti, in qualche parte s' incontra con quella di Nassir-Eddin. Di questa, comeché ne conoscesse la esistenza, dichiara di non avere potuto ottenere copia da colui che possedeva la traduzione dell' Euclide in lingua arabica. Imperocché sia presumibile che la traduzione di cui parla il Clavio, fosse appunto quella di Nassir-Eddin, della quale esisteva nella biblioteca Medicea in Roma il Codice che serví alla stampa della edizione di Roma del 1594 (2).

La prima pubblicazione speciale intorno al quinto Postulato, é per quanto mi consta, la *Operetta delle linee rette equidistanti et non equidistanti* del valente matematico bolognese Pierantonio Cataldi (3). Peró avvedutosi egli del paralogismo che conteneva la sua dimostrazione, tentó di renderla rigorosa con un'*aggiunta,* la quale tuttavia non vale, a mio avviso, a ridurla abbastanza corretta.

Fu seguita da una memoria su questo soggetto di Tommaso Oliviero di Bury, citata dal Thomson, e che non mi é riescito di consultare (4).

Nella traduzione degli Elementi di Euclide del P. Richard (5), il quinto Postulato é compreso fra gli Assiomi, con l' aggiunta di un breve commento nel quale sono cennate le dimostrazioni di Proclo e di Clavio; i quali dic' egli, *assumunt id quod obscurum est & probatione indiget.* Se non che egli vi sostituisce un argomento dichiarativo che parmi non regga alla prova della sana critica.

Il Dechalles sostituisce al Postulato Euclideo una proposizione fondata sul principio della equidistanza fra le parallele (6).

Il Tacquet (7) benché lo riponga fra gli assiomi, tentó di darne una dimostrazione nello Scolio della sua 31ª proposizione del primo libro.

Giovanni Alfonso Borelli in uno Scolio apposto alla proposizione XVI (lib. 1°) del suo *Euclides restitutus* (8) si occupa del noto Postulato e della

---

(1) V. i richiami nell' INDICE ALFABETICO al nome di Clavio Cristoforo.

(2) V. l' ELENCO CRONOLOGICO sotto la data del 1594¹.

(3) V. l' APPENDICE ALL' ELENCO CRONOLOGICO contenuta in questa IV PARTE, sotto le date del 1603 e 1604. Si consulti ancora l' ELENCO CRONOLOGICO all' an. 1615². Dalla lettera di Luca Valerio al Galilei del 31 Agosto 1613, apparisce che quel valente geometra si era pure occupato della dimostrazione del quinto Postulato. - V. Galilei, *Le opere* ecc., t. VIII, 1851, p. 283.

(4) V. l'APPENDICE, an. 1604.

(5) V. l' ELENCO CRONOLOGICO, sotto la data del 1645².

(6) V. citate le date delle diverse edizioni nella CLASSE VII, n.° 32, con i rispettivi richiami all' ELENCO CRONOLOGICO.

(7) Ibid., n.° 36.

(8) Ibid., sotto le date del 1680¹ e 1686¹.

teoria in generale delle parallele. Egli trova incomprensibile la definizione di parallele data da Euclide; *nam extensio illa infinita ad utramque partem, absque concursu, concepi non potest* etc. Ed invero anche il Flauti, benché appunti di poca ponderazione la osservazione del Borelli, nel tradurre la definizione Euclidea delle parallele, sostituisce più correttamente la ipotesi del prolungamento indefinito delle rette, a quella del loro prolungarsi all' infinito. E d' altra parte poi il principio ammesso dal Borelli che due rette nel piano debbano incontrarsi se non sono equidistanti, abbisogna di essere dimostrato, e forse s' intuisce meno facilmente del Postulato Euclideo.

Senonché il Borelli nel suo libro non attenendosi strettamente all'ordinamento Euclideo, anziché una restituzione degli Elementi, mi pare che si abbia a considerare come un lavoro originale in cui la teoria delle parallele è basata sopra principj diversi dagli Euclidei.

Il Barrow che pubblicó il suo Euclide in lingua inglese, traducendolo con una brevità Tacitiana, riporta la definizione Euclidea delle Parallele, e pone fra gli assiomi il 4° ed il 5° Postulato (1).

Vitale Giordano, benché ponga fra gli assiomi il quinto Postulato, pure ne tentó la dimostrazione in uno Scolio che nella prima edizione del suo *Euclide restituito* (2) appose alla 31ª proposizione del 1° libro, e nella seconda edizione premise alla 27ª proposizione. Ma questo cangiamento di luogo svela il difetto della sua dimostrazione; la quale non puó stare dopo la 31ª proposizione, dovendo com' è noto servire a dimostrare la 29ª; e non puó premettersi alla 27ª, ammettendovisi ció che viene dimostrato nelle successive.

Il Viviani riporta nei suoi Elementi di Euclide (3) il quinto Postulato, senza apporvi alcuna osservazione.

Il Gregory che si prefisse nella sua classica collezione una esatta versione delle opere di Euclide (4) fa del quarto e del quinto Postulato gli assiomi 10° e 11°, limitandosi ad avvertire che in alcuni codici, codesti due assiomi sono noverati fra i Postulati.

Il Rondelli definisce le parallele come equidistanti, ed ammette il Postulato come assioma (5).

Il Simson in una Nota posta alla 29ª Proposizione del 1° libro nella prima edizione in lingua latina del suo Euclide (9), affermato che il quinto

---

(1) V. i richiami alle edizioni del suo Euclide, nelle Classi VI (A) 20, VII 29 e VIII 73, della Parte III.

(2) V. l' Elenco cronologico sotto le date del 1680¹, e 1686¹.

(3) Ibid., an. 1690¹.

(4) Ibid., an. 1703¹.

(5) V. l' Elenco cronologico sotto la data del 1719¹.

(6) Ibid., sotto la data del 1756¹.

Postulato non è dimostrabile, servendosi del Commento di Proclo si limita a darne una spiegazione. Ma posteriormente nella ripubblicazione in lingua inglese del suo Euclide (1) fu d'avviso di poterne dare una dimostrazione, la quale se vale a dar prova dell'ingegno di quel valente geometra, non è accolta dai matematici come abbastanza esatta.

Giovanni Castiglioni nella sua teoria delle parallele (2) riporta la dimostrazione del V Postulato data da Nassir-Eddin; ma vorrebbe persuadere che tutti codesti sforzi fatti da sommi geometri per dimostrarlo, potevano risparmiarsi, perchè la teoria Euclidea delle parallele è abbastanza rigorosa. Egli considera il noto Postulato (da lui riportato quale XI assioma) come proposizione conversa della 17ª; della quale, a suo parere, conseguenza manifesta è che; se due rette nel piano segate da una terza fanno con questa gli angoli interiori dalle stesse parti minori di due retti, è possibile che queste due rette prolungate s'incontrino da quelle parti ove gli angoli sono minori di due retti; mentre è possibile che esse siano parti di due lati di un triangolo. Su questa proposizione egli basa la dimostrazione della 29ª. Ma è appunto la possibilità che quelle due rette siano parti di due lati di un triangolo che ha d'uopo di essere dimostrata.

Il P. Guido Grandi nella sua volgarizzazione degli Elementi d'Euclide (3) riporta il quinto Postulato fra gli assiomi (VIII); ma in una nota alla proposizione 29ª ne espone in succinto la dimostrazione del Clavio.

Il Lorgna (4), come in generale gli esatti volgarizzatori degli Elementi, si attiene al testo Euclideo.

L'Horsley (5) deduce il nostro Postulato dalla 28ª proposizione del 1° Libro.

Pur prescindendo da quelle teorie delle parallele che si trovano in quei trattati di Geometria elementare nei quali non è seguito l'ordine Euclideo, molti e vari tentativi di dimostrazione del quinto Postulato sono dovuti alla più parte dei traduttori e commentatori degli Elementi di Euclide, fra i quali il Gestrinius, l'Heikel, il Berlin, lo Strömer ecc. Quella dello Strömer venne riprodotta dal Bräkenhjelm, dal Witt ed Areskoug, da Falk, da Ruth, da Lindeman, da Wiemer, da Lutteman, da Broman ecc. (6).

---

(1) Id. 1775[1]. Per le successive edizioni si ricorra all' INDICE ALFABETICO.

(2) Id. 1785[3].

(3) V. l' ELENCO CRONOLOGICO alla data del 1731[1].
Per le successive edizioni si ricorra all' INDICE ALFABETICO.

(4) Ibid., an. 1766[1] - 75[1] - 92[1] - 1805[1]. E così il Peyrard, il Flauti, l'Heiberg, ec.Vedi il quinto Postulato.

(5) Ibid., 1802[1].

(6) Ricorrendo nell' INDICE ALFABETICO al nome di questi autori, si troveranno, nel modo già avvertito, le indicazioni delle edizioni delle loro opere attinenti alla bibliografia Euclidea.

Dei tentativi fatti da Proclo, da Nassir-Eddin, da Kircher, da Tacquet, da Hauff, da Lorenz, da Simson, da Bossut, da Kastner, da Segner, da Schmidt, da Schwab, da Legendre, da Lacroix, da Hindenburg, da Hill ecc. dà ragguaglio l'Hoffmann in una sua monografia sulla teoria delle parallele (1).

Se non che riuscirebbe forse più sazievole che utile il noverare la farragine degli illustratori degli Elementi di Euclide che di questo argomento si sono occupati. Mi sono perciò limitato a dare un cenno degli studj fatti dai primi e più riputati traduttori e commentatori degli Elementi intorno al quinto Postulato ed alla teoria delle parallele. Ma dalla fine del secolo passato ad oggi è talmente aumentato il numero degli scritti intorno a questo argomento, che il darne ragguaglio, comeché breve, esigerebbe un lavoro storico-scientifico estraneo allo scopo principalmente bibliografico che mi sono proposto in questo Saggio. D'altra parte sono noti agli studiosi i più importanti lavori su questo argomento, quali sono quelli di Legendre, di Karstner, di Schwab, di Flauti, di Jacobi, di Lobatschefsky, di Bolyai, di Hoüel ecc. In corrispondenza quindi allo scopo di questo Saggio, mi sono solo prefisso di compilare un catalogo delle monografie pervenute a mia notizia concernenti l'argomento stesso, oltre quelle già notate nell'Elenco cronologico, al quale con opportuni richiami rimando il lettore.

Dopo tutto si ritiene dai geometri che una rigorosa dimostrazione del quinto Postulato, in acconcio al testo Euclideo, non siasi per anco data; e dubito se sia possibile il darla. Imperocché mi sembri che la definizione Euclidea delle parallele implichi già un concetto dell'infinito, nel solo modo col quale possiamo intuirlo, cioé per via di esclusione; e che perciò la teoria delle parallele dipendente da quella definizione non possa fondarsi sopra i principj razionalmente dimostrabili della geometria finita.

Anche le scienze più positive, quali le matematiche, sono in parte fondate sopra alcuni principj che si possono bensì intuire, come i concetti dell'infinito e dell'infinitesimale; ma che le ristrette forze della nostra mente non valgono a comprendere, e che solo si possono ammettere per via di esclusione. E coloro che si affaticano ad esigere che ogni principio dello scibile sia rigorosamente dimostrato, anziché razionalmente intuito, presentano qualche somiglianza con quei peripatetici dei secoli di mezzo, i quali invece di far avanzare la scienza con l'analisi delle proprietà fisiche dei corpi e delle leggi che le governano, sciupavano il tempo e l'ingegno nello studio della natura degli elementi.

---

(1) V. l'Appendice alla data del 1807. Le dimostrazioni date da Proclo, da Nassir-Eddin, da Clavio e da Simson sono riportate da Flauti nella edizione notata all'an. 1818[1].

Il maggior difetto che a mio avviso presenta il quinto Postulato od Assioma Euclideo, é il non essere né dimostrato né razionalmente intuibile. Onde reputerei che si provvederebbe sufficientemente al necessario rigore scientifico, quando si riescisse a sostituire al quinto Postulato un' assunto a maniera di Assioma o di Postulato, se non dimostrabile almeno razionalmente intuibile, dal quale con procedimento teorematico si ottenesse la dimostrazione del Postulato Euclideo.

Mi si permetta un' ultima osservazione.

Taluni avvisarono che come il testo degli Elementi Euclidei é informato ad un metodo rigoroso, per quanto, salve poche eccezioni, si può ragionevolmente sperare, cosí anche nei principj su cui é basato si potesse fare astrazione da ogni intuizione che a noi sia pervenuta dal mondo sensibile; ed alla geometria informata ai concetti del positivo e dell' astratto intelligibile, sostituiscono la geometria dell' ideale incomprensibile e ripugnante alle percezioni del sensibile; la quale potendo solo essere sintetizzata in quell' ordine del sovranaturale cui per ora non ci é dato di partecipare, avviserei che si dovesse solamente ammettere come una ipotesi od un artifizio per giungere alla scoperta delle verità geometriche appartenenti all' ordine dell' astratto intelligibile.

Il metodo Euclideo é logicamente rigoroso ed astratto; ma la sua Geometria s' informa ad uno scopo applicativo meno apparente, ma che più l' avvicina alle sue origini ed al significato delle radici di questo vocabolo. I suoi tre primi Postulati non sono che la traduzione dal concreto all' astratto degli usi pratici della riga e del compasso. I suoi teoremi e vieppiù i suoi problemi sono quasi sempre suscettivi ed in acconcio delle più comuni applicazioni; e quasi a coronamento di ciascun libro ci conduce passo passo, e con ordine ammirevole, a successive proposizioni della maggiore importanza pratica.

E tale dev' essere un testo di geometria a scopo classico generale. Imperocché quando lo studio della Geometria elementare non conducesse a fornire la mente di quelle nozioni intorno alla quantità continua e figurata che si richiedono in ogni scienza ed arte, e solo servisse ad un esercizio della mente onde abituarla, come giustamente si avvisa, al rigore della dimostrazione, non sarebbe che un' applicazione della filosofia, che nelle scienze positive é da considerarsi principalmente quale uno strumento della invenzione.

E Dio ci tenga lontani dal giorno in cui nello studio delle scienze positive si abusasse di codesto strumento!

AGGIUNTE ALL'ELENCO CRONOLOGICO

DELLE EDIZIONI DELLE OPERE DI EUCLIDE CONTENUTE NELLA

PARTE SECONDA

SERIE I.

1500[1] * — Tex|tus de Sphe|ra Iohannis de Sa|crobosco Cum additione | etc. Et Geometria Eu|clidis Megarensis.

E nel fine:

C Impressum Parisii in pago diui Jacobi ad insigne sãcti Georgii Anno christi siderũ | conditoris 1500 prima septembris Per impressorẽ vvolgãgũ hopylium Cui ec.

Car. 32 s. n., in fo., con fig. sul legno fra il testo.
Nelle car. 28 *verso* - 32 *recto* sono contenuti:
Liber primus (II, III e IV) Geometrie Euclidis.
C Incipit liber primus Geometrie Euclidis a Boetio in latinum translata.

1506[1] — La ediz. notata sotto questa data è forse la 2ª parte di quella che trovasi indicata nel « Catalogue de la bibl. de feu M.r Aug. Const. Naumann (*Leipzig, Weigel,* 1854, nº 238) col titolo: « Opusculum theoricarum planetarum mag. Georgii peurbachij, preceptoris singularis Iohannis de Regiomonte impr. per Conradum Baumgardt in stadio novo Franckfordiano 1507. Accedunt Euclidis libri priores IV cum familiari Campani Commentario, 1506, 4º. »

1507[1] — Textus de Sphera ec. Et Geometria Euclidis ec.

Un esemp. di codesta ediz., già da me notata nella Par. II, è posseduto dalla Bib. Estense.

1516[4] — Un esemp. di questa ediz. è posseduto dalla Bib. della Università di Bologna. Altro esemp. è posseduto dal Prof. Jacoli. La data appostavi è quella della dedicatoria.

1527[1] * — Textus de sphaera ec. Et Geometria Euclidis ec.
Parisiis | *Vœnit* Simonem Colinæum. | 1527.

Car. 35 ed 1 bianca nel fine: in fo.

1538[1] — Sacrobosco (Ioannis de). Textus de Sphaera: Introductoria additione (quantum necessarium est) commentarioq. Cum compositione

annuli Astronomici Boneti Latensis: et Geometria Euclidis Megarensis. *Paris,* 1538, in fo.

« Voodcuts in the text and on the margins. » Così nel Cat. Macmillan and Bowes, n° 222.

Più esatta descrizione della ediz. registrata all'anno 1544[2], sull'esempl. della Biblioteca Comunale di Bologna.

1544[2] — Orontii Finaei... In Sex priores libros Geometricorum Elementorum Euclidis Megarensis Demonstrationes: auctae et emendatae, una cum Euclidis textu graeco, et interpretatione latina Bartholamaei Zamberti. *Lutetiae Parisiorum, apud Simonem Colinaeum.* 1544, in fol.

1550[1] — Un esemp. di codesta ediz. è posseduto dalla Bib. Comunale di Bologna.

La ediz. della Cattotrica, citata in nota al n° 1557[2], viene qui più esattamente descritta sull'esemp. posseduto dalla Bib. Universitaria di Bologna.

1557[2 bis] — Catoptrica, idest elementa ejus scientiae, qua universa speculorum vis atque natura explicantur. Graece, cum versione latina Dasyspodi. (Græce et Lat.). *Argentorati, Rihel,* 1557, 4°.

1558[6] — Evclidis elementorvm libri qvindecim. *Parisiis, ex typographia Thomae Richardi,* 1558, 4°, c. 44.

Ediz. indicatami dal Sommervogel.

1564[3] — Nel *Catalogue de la Bibl. scientifique de feu M. Michel Chasles* (Paris, 1881), è notato:

Les six premiers livres des éléments d'Euclide trad. et comm. par Pierre Forcadel de Beziers. *Paris,* 1564, pet. in 4°.

1566[5] — Mathematicæ quædam selectæ propositiones, ex Euclidis, Böetij, et antiquorum aliorum libris decerptæ, quibus liberales disciplinæ in compendium quoddam redactæ non magno negotio perviæ adiscentibus erunt. In eorum gratiam qui grauioribus studijs, occupati integros autores euoluere nequeunt. A Ioanne Segura Doctore Complutensi, Collega diui Illefonsi, luculentissimè expositæ. Quibus accessit vtilissimum Arithmeticæ Geometricæq; praxis compendium. *Complvti. Excudebat Andreas de Angula,* 1566, f. 73 in 4°.

Nota favoritami dal Sommervogel.

1566[6] — Les six premiers livres des élémens d'Euclide traduits par Pierre Forcadel. *Paris,* 1566, in 8° pic.

Indicata nel detto cat. dei libri di M. Chasles, e nel Cat. Kirchhoff & Wigand, n° 804.
Più esatta descrizione della prima ediz. inglese, notata all'anno 1570[1], favoritami dal Sommervogel.

1570 [1] — The Elements of Geometrie, faithfully translated into the English toung, by H. Billingsley, Citizen of London. Whereunte are annexed certaine Scholies, Annotations and Inventions of the first mathematicians, both of Time part and of our Age. *London, by Iohn Daye,* 1570, fo.

La pref. è di Iohn Dee. Cat. della Bodlejana, t. I, 1843.

1570 [4] — (Aggiungasi) Lib. I. Heroni vocabula geometrica, Græce et Latine, edita per Conr. Dasypodium. *Argentorati*, 8°.

(Bib. S. Trinità di Dublino. Cat. della Bodlejana).

1572 [3] — Phaenomena, Gr. et Lat. *Arg.*, 1572, 8°.

Notata nel *Cat. impressorum librorum Bib. Bodlejanæ,* p. 239, col. 1; e non so se sia un estratto di parte dell'ediz. registrata al 1571 [1].

1580 [1] — Euclidis ec.

Vedi sotto questa data la Par. II. Elenco cronologico.
Anche in questa ediz. come in quelle del 1557 e successive, precede « *Ad Candidum lectorem St. Gracilis Praefatio* ».
Note del P. Sommervogel.

1595 [1] — Ki ho youen pen. (Sex primi libri Euclidis). Nan tchang fou, 1595.

Sotto questa data il P. Sommervogel m'indica la traduzione in lingua Chinese dell'Euclide, eseguita dal P. Matteo Ricci, su quella del Clavio; e da me notata sotto l'anno 1608. Vedine le ristampe indicate sotto le date del 1857 [1] nella Par. II, e del 1865 [2] in queste Aggiunte.

1598 [4] — Descubrimientos geometricos de Ioan Alfonso de Molina Cano. (*Anversa,* 4°).

V. la traduzione latina sotto la data del 1620 in queste Aggiunte.

1605 [3] — Les neuf premiérs livres des élémens d'Euclide traduits et commentez par I. Errard de Bar-le-Duc. *Paris, chez Guillaume Auvray,* 8°.

Posseduto dal Prof. Ferdinando Jacoli.

1609 [2] — Euclidis phænomena ec. (come all'an. 1591 [2]). *Romæ*, 4°.

Bib. della S. Trinità di Dublino.

1610 [4] — Les élémens de la géométrie d'Euclide Mégarien trad. et restitués selon l'ordre de Théon, le tout par Dounot de Bar-le-duc. *Paris, I. Le Roy*, 4°.

Cat. della bib. di M. Chasles, n° 1561.

1612 [3] — Christ. Clavii Opera ec.

Il frontis. generale ha la data del 1612; ma dopo la dedic. e l'indice vi è un nuovo frontis. col titolo:

Christophori Clavii Bambergensis e Soc. J. Opervm Mathematicorvm tomvs primus. Complectens Commentaria in Euclidis Elementa geometrica, in Sphœrica Theodosii ec. *Moguntiæ, sumptibus Antonii Hierat, excudebat Reinhardus Eltz,* anno M·DC·XI, car. 1 + pag. 638.
Nota Sommervogel.

1612 [5] — Diverso da quello notato al n° 1612[4] nell'Elenco cronologico, o parte di esso sembra il seguente:

Florimundus Puteanus. Euclidis Elementum 10^{um} in quo singularum Demonstratium linae et superficies numeris exprimuntur, cum corollariis ex Clavio. *Parisiis,* 1612.

1613 [2] — Questa ediz. è indicata nel cat. della bibl. dello Chasles, al n° 1562, col seguente titolo:

« Les éléments de la géométrie d'Euclide Mégarien, trad. et restitués à leur ancienne briéveté, selon l'ordre de Théon, auquels ont esté adjoustez le XIV.^{e} et XV.^{e} d'Ipsicles Alexandrien augm. par l'autheur — *Paris,* in 4°. »

Più esatta descrizione della ediz. indicata con la data del

1620 [3] — Euclidis elementorum libri sex priores. Quorum demonstrationes tum alibi sparsim, tum maximé libro quinto ad faciliorem captum accomodavit Carolus Malapertius Montensis é Societate Jesu. *Duaci, Typis Balthazari Belleri, anno* 1620, 12°, p. 142 (per 242).

Il nome dell'a. è Malapert, non Maupertuis.

1620 [5] — Nova reperta geometrica Iohannis Alfonsi Molinensis Cani. In quibus subtiliores Geometricæ quæstiones de Duplicatione cubi, Quadratura circuli, Rectitudine angulorum, Aequalitate linearum curvarum cum recta discutiuntur. Demonstrationibus firmissimis fulciuntur. Indeque aurea corollaria Geometricarum subtilitatum deducuntur: Euclidea elementa nonnulla corriguntur, nonnulla falsa reijciuntur. Hispanice edita, jam vero latinitate donata a Nicolao Jansonio Arnh. Geldro. *Arnhemii, Vœneunt apud Johannem Jansonium, typographum, Anno* M·DC·XX, 4°.

V. sotto la data del 1598. Le erronee critiche agli Elementi di Euclide contenute in questo libro furono confutate dal Cataldi — V. sotto la data del 1626[2] dell'Elenco cronologico.

1622 [1] — Elémens de Géométrie traduit de Grec en François, par P. Le Mardelé. *Paris,* 8°.

Esemplare posseduto dal Principe Boncompagni.

1625 [2] — Euclidis elementorum ec. (come all'anno 1620[3] in questa Ag.) Editio altera emendatior. *Duaci, typis Balthazaris Belleri,* Anno 1625, 12°, p. 242.

1629[4] — Euclidis sex primi elementorum geometricorum libri, cum parte undecimi, ex majoribus Clavii Comment. in commodiorem formam contracti, rerumq. mathematicarum Christophori Grienbergeri Oenshallensis e Societate Jesu. Opusculum primum. *Romæ, apud hær. Bartholomæi Zannetti,* 1629, p. 202 in 12.°

Ediz. indicatami dal P. Sommervogel. V. anche *Collectio scrip. S. I.* e Rocca, Lettere, p. 160.

1633[1] — Euclidis elementorum ec. (come nell'anno 1620[3] in queste Ag.). *Duaci, typis Balthazaris Belleri, Anno* 1633, 12°, p. 243.

Più completa indicazione delle ediz. notate nella Par. II sotto questa data.

1637[1] — Elementos geometricos de Euclides philosopho megarense sus seys primeiros libros. Al Ex.mo S.r D. Gaspar de Gvzman Conde de Olibares.... Traducido el texto y comentado por Lvis Cardvchi Mathematico de su Magestad. *En Alcala, por Antonio Duplaste Año de* 1637, f. 113 in 4°, con tav.

Più esatta descrizione dell' ediz. notata a questo anno, favoritami dal Sommervogel.

1640[1] (?) — De vijfthien broken Eũclides overgeset d. C. V. N *(ienrode). Utrecht,* 8°. *(Heiberg).*

1643[2] — L'introduction à la mathématique.... Le tout tiré des Elémens d'Euclide rengez ec. par le P. Pierre Bourdin, S. I. *Paris, Fr. Pelican,* 12°, p. 264 e 3 tav.

Note Sommervogel.

Più completa descrizione, favoritami dal Sommervogel, dell' ediz. indicata all' anno

1644[4] — Euclidis sex priores Elementorum geometricorum libri demonstrati a P. Georgio Fournier, S. I. *Parisiis, apud Iohannem Henault,* 1644, 12°.

1644[5] — Nella preziosa collezione del Mersenne registrata sotto questa data nell' Elenco cronologico, è contenuto per quanto si riferisce ad Euclide:

Euclidis Elementorum libri XV, cum 3 Candallæ (p. 1-64 con le def. ed i soli titoli delle proposizioni).

Euclidis ex traditione Maurolyci. *Phœnomena* (p. 249-256).

Euclidis data, e Græco a Claudio Hardy conversa (p. 373-381).

Seguono in brevi sunti: Pappus de datis Euclidis — De proportioni sectione — De Spatii sectione — De determinata sectione — De tactionibus sphæricis — De Porismatibus Euclidis — De Locis planis.

Nella Prefazione trovasi: Synopsis libri Datorum Euclidis.

Esemp. della Bib. della Università di Bologna.

1645 [3] — Euclidis ec. Accesserunt Elementa astronomica ubi Theodosii Tripolitæ Sphœricorum libri tres, et universa triangulorum resolutio demonstratur per Ioh. Baptistam Duhamel, math. Prof. Editio prioribus auctior. *Cantabrigæ, excudebat z. Field,* 1645, 12°.

1651 [3] — Elements of Geometry. The first VI boocks: In a compendious form contracted and demonstrated by Captain Thomas *Rudd* ecc. is added mathematical preface of Mr. John Dee. *London, Robert & William Leybourne,* 8°.

Esemp. Boncompagni.

1652 [2] — Un esemp. di questa ediz. è posseduto dalla Bib. Comunale di Bologna.

1657 [3] — Euclides. Data succincte demonstrata: una cum emendationibus quibusdam et additionibus ad Elementa Euclidis nuper edita Lat. opera Is. Barrow. *Cantab.* (*Cat. Lib. impres. qui in Museo Brit. adservantur.* Vol. II, pars alt., *Londra,* 1816).

1662 [2] — G. Oũchtredo Euclidis declaratio. *Oxon.*, 8°.

Indicatomi dall' Heiberg.

1665 [4] — Elementorum libri XV breviter demonstrati. Opera Is. Barrow. Cum scholiis antiquis. *Cantabrigæ,* 8°.

Indicatomi dal Sommervogel.

Più esatta descrizione, favoritami dal Sommervogel, della ediz. indicata sotto la data del

1671 [3] — Eléméns de Géométrie, ou par une Méthode courte et aisée on peut apprendre ce qu'il faut sçavoir d'Euclide, d'Archiméde, d'Apollonius, et les plus belles inventions des anciens et des nouveaux Géométres. Par le P. Ignace Pardies de la C. d. J. *Paris, Sebastien Marbre-Cramoisy,* 1671, 12°.

1672 [6] — Tacquet A. Elem. geom. *Antuerpiæ,* 8°.

Cat. Os. Weigels, n. 31, pag. 30.

1672 — Geometria pratica Euclidis problemata continens authore A. R. P. Iosepho Zaragoza é Soc. Jesu ec. *Matriti, apud Bernardum a Villa Diego,* in 4°.

Posseduto dal Prof. Jacoli.

1673 [5] — Compendium Euclidis curiosi. Belg. 4°. *Amstelodami.*

Così indicato nel Cat. della Bib. del Museo Britannico; e non so se sia quello stesso che ho notato all'anno 1673 [1], od una ristampa di quello notato all'an. 1672 [5].

1673 [3] — Un esemp. della edizione sotto questo numero notata, è posseduto dal prof. Jacoli, ed è in lingua latina col titolo:

Euclidis Novo antiquus singulari methodo illustratus, authore A. R. P. Iosepho Zaragoza ec. Secunda editio. *Valentiæ, apud Hyeronimum Villagrassa.* MDCLXXIII.

1673 [4] — Elémens de Géométrie ec. Par le P. Ignace Pardies (come alla data del 1671 [3] in queste Ag.). Seconde édition, revûë et corrigée. *Paris, Seb. Marbre-Cramoisy,* MDCLXXIII, in 12°, di p. 163.

Note Sommervogel.

Completasi la indicazione della ediz. notata all' anno:

1675 [2] — Euclidis elementorum ec. Auctore P. Claudio Francisco Milliet Dechales. Tertia editio. Cæteris facilior et correctior. Ludguni, Sumptibus Viduæ Benedicti Coral, MDCLXXV. Pag. 378 in 16°.

Secondo il Sommervogel non sarebbe esatta la indicazione data dal Murhard della ediz. notata sotto l' anno 1679 [6].

Più completa indicazione della ediz. notata all' anno 1677 [1], secondo la descrizione favoritami dal P. Sommervogel.

1677 [1] — Les élémens d'Euclide expliquez d'une manière nouvelle et tres-faciles. Avec l'usage de chaque proposition pour toutes les parties des mathématiques. Par le P. Claude François Milliet Dechales, de la Compagnie de Jesu. *A Paris, chez Estienne Michallet,* MDCLXXVII, pag. 422 in 12°.

1677 [3] — Compendium Euclidis curiosi: or geometrical operations shewing how with one single opening of the compasses and a straight ruler all the propositions of Euclid's first five books are performed. Translated out of Dutch by Ioseph Moxon. *London,* 4°.

Bib. della S. Trinità di Dublino. V. sotto l' an. 1672 [5]. nell' Elenco cronologico.

Più completa descrizione della ediz. indicata alla data del

1678 [2] — Euclidis elementa geometrica novo ordine ac methodo fere demonstrata. Una cum Nicolai Mercatoris in geometriam introductione breve quâ magnitudinum ortus ex genuinis principiis et octavum affectiones ex ipsa Genesi derivantur. *Londini,* 1678, in-12, 3 planches.

1678 [3] — Elementorum libri XV breviter demonstrati opera Is. Barrow. *Londini, typis F. Redmayne,* 8°.

Esemp. Boncompagni.

1678 [4] — Élémens de Géométrie ec. Par le P. Ignace Pardies. (come

alla data del 1671[3] in queste Agg.). Troisième édition. *Paris, Seb. Marbre-Cramoisy,* 1678, 12°, p. 162.

Note del Sommervogel.

1681 [3] — Nel cat. degli Elzeviri del 1681, è annunciata una ediz. di Euclide. *Amstelodami, Dan. Elzevirus,* 8°.

Più esatta descrizione della ediz. notata sotto la data

1683 [4] — Les élémens d'Euclide.... Par le P. Claude François Milliet Dechales ec. *A Paris, Estienne Michallet,* M·DC·LXXXIII, pag. 4 + 389, 12°.

Indicatami dal P. Sommervogel.

1683 [5] — Les quinze livres des Eléments d'Euclide traduits en Francais par D. Henrion. *A Paris, chez Pierre Baudoyn,* 8°.

Esemp. Boncompagni.

1683 [6] — Euclide. Eléments géométriques, trad. par Henrion mathématicien, augmentés de plus. Figures. *Ruen,* in 8°.

Ediz. indicata nel cat. della bib. dello Chasles, che sembra sia diversa dalla precedente.

1684 [3] — Elementa Geometriæ, in quibus methodo brevi ac facili summe necessaria ex Euclide, Archimede, Apollonio, et nobilissima veterum et recentiorum geometricorum inventa traduntur per P. Ignat. Gastonem Pardies S. J. Gallico idiomate conscripta, nunc vero post tertiam editionem in usum studiosæ juventutis latinitate donata. *Jenæ, literis Joh. Bar. Wertheri,* s. a., 12°, p. 163.

La dedicatoria di Gio. Andrea Schmidt, abbate di Marienthal, prof. di teologia a Helmstadt, è in data di Jena, 14 Marzo 1684.

Negli *Acta erud. Lipsiæ* (1685, p. 130), affermasi che l'ediz. è del 1684; mentre la *Bibliothéque Germanique* (t. 14, p. 169) vi appone la data del 1685. (Note del Sommervogel).

La dissertazione indicata sotto la data del 1685[5] nella Par. II., sarebbe una memoria illustrativa della preindicata edizione?

Più esatta descrizione favoritami dal P. Sommervogel, della ediz. notata sotto l'anno:

1685 [1] — The Elements of Euclid explained in a new but most easy Method, with the uses of each Proposition in all the parts of the Mathematics. By Claude Francis Millet de Chales of the Society of Jesus, done out of french, corrected, augmented and illustred wiht nine Coper-Plates, by Villiam Halifax. *London,* 8°.

Esemp. della bib. della S. Trinità di Dublino.

1685 [6] — The Elements of Euclid explained in a new but most easy Method. Translated from the french of F. Cl. F. Milliet de Chales. *Oxford,* 8°.

Indicatami dal P. Sommervogel. Ristampa della precedente.

1686[3] — Luders Th. Traité mathématique contenant les principales définitions, problémes et théorêmes d'Euclide ec. *Paris,* in fo.

Cat. Kirchhoff & Wigand, n° 804.

1686[4] — Euclid's Elements.... by Is. Barrow. *London,* 8°.

Ivi ristampati negli anni 1696, 1715, 1751. Ediz. indicatemi dal Sommervogel.

1688[2] — Elémens de Géométrie ec. Par le P. Ignace Pardies; (Come alla data del 1671[3] in queste Ag.). Quatrième édition. *A Lyon, Chez J. B. Barbier,* 1688, 12°, p. 163.

Indicatami dal Sommervogel.

1689[2] — Leggasi Knesa ecc. in luogo di Kresa, (p. 439 e 7 tav).

1689[3] — Andr. Hedionis Exercitatio academica de Euclidis prop. 47 lib. I. *Regiomonti,* 4°.

R. Biblioteca di Copenaghen.

1690[5] — Elémens de Géométrie ec. Par le P. Ignace Pardies. (Come alla data del 1671[3] in queste Ag.). Quatrième edition. Suivant la copie de Paris. *A La Haye, chez Adrien Moetjens*, 1690, 12°, p. 163.

Indicatami dal Sommervogel.

1691[8] — La parte delle opere matematiche notate sotto questo anno, che riguarda la geometria, ha il seguente titolo e data.

Elémens de géométrie ou par une méthode court & aisée l'on peut apprendre ce qu'il faut sçavoir d'Euclide, d'Archiméde, d'Apollonius ec. par le P. Ignace Gaston Pardies. Quatrième edition. *A la Haye, chez Adrien Moetjens* M·D·C·LXXXX, in 12°.

Esemp. posseduto dal prof. Jacoli.

1693[2] — Più esatta descrizione di questa memoria, sull'esemplare possedutone dal professor Jacoli.

EVCLIDEM ΣΤΟΙΚΕ-ΙΩΤΗΝ | Dissertatione historico-mathematica | In illustri CHRISTIAN-ALBERTINA | Praeside | viro Nobilissimo ac Consultissimo | D*no* SAMVELE REYERO | ec. | *Junii Anno* 1693 | eruditorum examini submittit | Caspar Ringelmann Oldenb. Westph. | Auctor |. KILIÆ | Literis Joachimi Reumanni Acad. Typogr. In 4°.

1693[5] — Escuela de Palas ó sea Curso Mathematico dividido en XI triàtados, que contienen la Arithmetica, Geometria especulativa, practica, Lugares planos, Dados de Euclides, Esphera, Geographia, Algebra nume-

resa, y especiosa, Trigonometria, y Logorithmica, y ultimamente el Arte Militar, ec.

En Milan, en la Emprenta Real, por Marcos Antonio Pandulpho Malatesta, Año MDCXCIII, fo.

Car. 10 in principio con componimenti poetici di vari autori, fra i quali figurano i nomi di Tommaso Ceva, di Carlo Maria Maggi e di Francesco Lemene; e due scritti di Pietro Paolo Caravaggi e di D. Ioseph Chafrion. Fac. 217 + 212; car. d' indice ed una bianca nel fine; e tav. sul rame.

1700 [4] — The Elements of Euclid... By Claude Francis Millet De Chales ec. *Oxford,* 8°.

Furono poscia, secondo le indicazioni favoritemi dal P. Sommervogel, ivi ristampati negl' anni 1704, 1712, 1720, 1726, 1748, 1752.

1700 [5] — Teutsch-Redender Eucl., od. acht Bücher von denen Anfängen d. Mess-Kunst, auff e. neue u. gantz leichte Art in Teutscher Sprache eingerichtet u. bewiesen durch A E B W P. (A. E. Burkh von Pirkenstein). *Wien,* 4°.

Cat. Kirchhoff & Wigand, n° 804.

1701 [2] — Magistrum matheseos publico examini submittunt præses M. Jo. Georg. Christoph. Feuerlein et respondens M. Jo. Georg. Hornbergerus. *Vitembergae litteris Christiani Gerdesii.* In 4°.

Saggio scolastico relativo al teorema di Pitagora (Propositio quae Euclidis est 47. I). Esemplare posseduto dal prof. Jacoli.

1703 [4] — The elements of Euclid, explained und demonstrated in a new and easy method, by Claude Fr. Milliet de Challes u. Done out of Frenk by Reeve Williams. *London, A. Lea,* 8°.

1703 [5] — Exercitatio geometrica de linea juxta proportionem divinam divisione quam ec. in Academia Pregelana praeside Dn. M. Davide Blaesingio ec. publice defendet Georgius Sigismundus Kast. *Regiomonti, typis Resnerianis.*

Tesi che tratta delle proposizioni 11ª del lib. II, e 30ª del lib. VI. degli Elementi di Euclide. Esemp. posseduto dal prof. Jacoli.

Più esatta descrizione, favoritami dal Sommervogel, della ediz. notata sotto la data del

1705 [3] — The English Euclid; being the first six Elemente of Geometry, translated with annotations and supplements by Edmund Scarbugh. *Oxford,* 1705, in fo.

1705 [6] — Hominum vestigia. Sc. schemata in libros sex priores elementorum per Edv. Twniter, S. I., 8°.

Cat. della Bodlejana, t. I, 1843.

1711[1] — Aggiungi « Specimen novæ editionis operum Euclidis per Edv. Bernard » Cat. della Bodlejana.

1721[3] — Elementa geometriae in quibus methodo brevi ac facili summe necessaria ex Euclide, Archimede, Apollonio ec. traduntur per P. Ignat. Gaston Pardies. Editio quinta. *Jenae, sumpt. Georgii Christ. Troebert.*

Fa parte con frontis. e num. separata delle: « Opera mathematica » del Pardies (Editio tertia Jenae, MDCCXXI). Esemp. posseduto dal prof. Jacoli.

1723[7] — Elementorum libri priores sex. Item undecimus et duodecimus. Ex versione latina *Federici Commandini.* Quibus accedunt Trigonometriae planae & sphericae Elementa. Item tractatus de Natura et Arithmetica Logarithmorum. *Oxoniae, e Theatro Sheldoniano,* 8°.

Esemp. Boncompagni.

1724[3] — Elémens de Géométrie ec. Par le P. Ignace Pardies. (Come alla data del 1671[3] in queste Agg.). Sixième édition. *A Amsterdam, chez Pierre de Coup,* 1724, 12°, p. 63.

Indicatami dal Sommervogel.

1725[3] — Les élémens d'Euclide ec. Par le P. Claude François Milliet Dechales.... Revûe ec. par Ozanam. *Paris, Claude Jombert,* p. 360 in 12°.

Indicatami dal P. Sommervogel.

1726[2] — The Elements ec. (come al 1685[1] in queste Aggiunte). Seventh edit. *London,* 8°.

1728[2] — Euclides with theorems out of Archimedes. By A. Tacquet, and pratical corollaries, by William Whiston, M. A. *Dublin,* 8° (6th edit.).

Bib. della S. Trinità di Dublino.

1730[4] — Synopsis.... geometriæ ad 20 Theoremata contracta. *Græcii, typis Widmanstadii,* 1730, 8°.

Indicatami dal Sommervogel; e forse è la stessa di quella notata all' anno 1730[3] della Par. II.

1731[4] — Elementorum.... logarithmorum *(titolo uguale a quello notato al n. 1723[7]). Oxoniae, e Theatro Sheldoniano,* 8°.

Esemp. Boncompagni.

1735[3] — Elementos de geometria plana e solida, segundo a ordem de Euclides, Principe dos Geometras, accrescontados com tres uteis appendi-

ces.... Para uso de real Aula da Sphera da Collegio de Sancto Antño. *Lisboa, na Officina Rita-Cassiana,* 1735, 4°.

Pag. XXXVIII + 333 e 9 tav. Indicatomi dal P. Sommervogel. È diverso dalla seguente?

1735 [4] — Eucl. por Manoel de Campos (in lingua portoghese). *Lisbõa* 4°.

1737 [6] — Trigonometria plana et sphærica cum selectis ex geometria et astronomia problematibus, sinuum canonibus, et propositionibus ex Euclide magis necessariis. *Claudiopoli,* 8°.

Fac. 108 + 28 + 48 e 4 tav. Indicatami dal Sommervogel come opera del P. Nicola Janossi.

1738 [1] * — Les élémens d'Euclide expliquéz d'une manière nouvelle et tres-facile ec. par le P. Dechalles ec. Nouvelle édition revue, corrigée et augmentée par M. Ozanam. *Paris, chez C. A. Jombert,* 8°.

Car. 6, fac. 408 e 16 tav. di fig. Più esatta descrizione di questa ediz. sull' esemp. da me posseduto.

Più completa descrizione, favoritami dal P. Sommervogel, della ediz. indicata sotto la data del

1738 [2] — Euclidis ec. demonstrationibus Christophori Clavii (c. s.) a Iohanne Henrico Van Lom, Philosophiæ doctore ec. Qui brevem narrationem historicam de vita ac Elementis Euclidis addidit. Adjectis tabulis aeneis nitidioribus ac accuratioribus. *Amstelodami, apud Henricum Vieroolt*, 1738, 8°, p. LXXXVIII + 392.

Note del Sommervogel.

1738 [7] — Elementa geometriæ Ign. Gaston Pardies (recudi curavit Franciscus Faludi, Hungarus, S. I., cum præfatione). *Græcii,* 1738, 12°.

V. Collectio script. S. I.

1738 [8] — Sotto questa data il Prof. Jacoli mi indica uno scritto con titolo quasi identico a quello da me notato nell' Elenco cronologico alla data del 1737[2], attribuendolo al Card. Girolamo Querini.

1739 [3] — Elementos geometricos de Euclides, dispuestos en methodo breve, y facil, para mayor comodidad de los aficionados, y uso del Real Seminario de Nobles de Madrid. Su autor el Padre Gaspar Alvarez, de la Compañia de Jesus, Maestro de Mathematicas en el mismo Real Seminario. Dedicados al Gloriosissimo Jesuita San Luis Gonzaga, Patron de todos los estudiosos de la Compañia. *En Madrid, en la oficina de la calle Augosta de San Bernardo.* Año de 1739, 4°, 4 tav.

Indicatomi dal P. Sommervogel.

1743[3] — Theses mathematicae ex geometria practica, de dimensione planorum ac divisione rectilineorum secundum omnem proportionem: praevia dissertatione mathematica in qua examinantur an elementa matheseos D. Christiani Wolfii discentibus *sola abundè satisfaciant* ec. quae praeside R. P. Luca Offermann, S. J. demonstrandos ex Euclide & Archimede susceperunt D. Ioan. Bapt. Andreas Löhlein et D. Ioan. Ios. Mainhardus Och Vircerburgenses ec. *Virceburgi, typis Ioan. Christ. Kleyer,* in 4°.

Esemp. posseduto dal prof. Jacoli.

Più esattamente sulle note del Sommervogel indicasi la ediz. registrata nella PAR, II. sotto la data del

1744[4] — Euclidis elementa lib. XV ad græci contextus fidem recensita et ad usum tyronum accomodata, a G. F. Baermann. *Lipsiæ, Gledisteh,* 1744, 8°.

1744[5] — Euclidis elementa geometriæ, Det er Förste Grūnd til Geometrien, det Daucke Sprog oversat af Ernest Gotlieb Ziegenbalg. *Kjöbenhavn. Tryht hos Ernest Henrich Berling,* 4°.

Posseduta dal Prof. Heiberg.

1748[2] — Al titolo indicato aggiungasi:

And a new revisied, corrected and greatly improved by Samuel Ashby.

1749[5] — Les élémens d'Euclide du R. P. Dechalles. Demontrés.... par M. Ozanam.... Edit. revue, corrigée et augmentée par M. Audierne ec. *Paris,* 8°.

Indicatami dal P. Sommervogel.

1750[4] — Dissertatio. Principia Geometriæ, ex Lib. I. et II. Euclidis: una cum variis problematibus Arithmeticæ et Geometriæ practicæ. Cum II. tabulis æneis. *Moguntiæ,* 1750, 4°.

Questa dissertazione del P. Enrico Pfeffer d. C. d. G. mi venne indicata dal Sommervogel.

1751[3] — Elemente; the whole fifteen book compendiously demonstrated: with Archimede's Theorems of the Sphere and Cylinder. Investigated by the method of Indivisibles. Also Euclide's Data, and a brief Treatise of regular solids. By Isaac Barrow.... To which is new added an Appendix, containing the nature construction and application of Logarithms. By I. Barrow. *London, w. and J. Mount,* ec. 8°.

Esemp. Boncompagni.

1752[2] — Diversa dalla ediz. notata sotto questa data parmi sia quella indicata nel Catalogo della Bodlejana (t. I, 1843) col titolo « (Euclid). translated from Dr. Gregory's edition, with notes and additions, by E. Stone. » 8° *London,* 1752.

1752[9] — Dissertatio. Elementa Catoptricæ, cum annexis selectis propositionibus ex Libris III. et IV. Euclidis, et Geometria practica. *Moguntiæ,* 1752, 4°.

Questa dissertazione del P. Enrico Pfeffer d. C. d. G., mi venne indicata dal Sommervogel.

1752[10] — Jetze Franc. Christ. Theorematis Pythagorici demonstrationes plures. *Halae Magdeburgicae, ex off. Joan. Friderici Grunerti,* 4°.

Esemp. posseduto dal prof. Jacoli.

1754[2] — Les élémens d'Euclide du R. P. Dechalles. Démontrés.... par M. Ozanam.... Révue par M. Audierne. *Paris, C. A. Jombert,* 8°, p. XI + 547, fig.

Indicatami dal P. Sommervogel.

1755[2] — Un esemp. di questa ediz. è posseduta dalla Bib. della Università di Bologna.

1756[5] — Liber II. Euclidis algebraice demonstratus, in usum Matheseos tyronum. *Pragœ,* 4°.

Il Sommervogel ne indica autore il P. G. Stepling d. C. d. G.

1759[2] — Elements of Geometry, from the Latin translation of Commandine, with Treatises on Logarithms and Trigonometry by Prof. John Keill. The which revised by Sam. Cunn. 8th. edit. revised.

1761[2] — Theoremata quædam ex Euclidis Elementis selecta. *Dublini,* 8°.

Bib. della S. Trinità di Dublino.

1762[2] — Aggiungasi al titolo: « to which is added Euclid's Data. »

1762[6] — Elements of Geométry, from the Latin tran. of Commandine, with a Preface &c. by Dr. John Keill: revised by Samuel Cunn. 8°. *London,* 1762.

Cat. del Museo Brit., vol. II, pars altera, Lond. 1816.

1767[6] — Payne Wm. Introduction to geometry, containing the most useful propositions in Euclid and others authors. 4°.

1771[3] — Euclid. In English, by R. Simson. *Edinburgh,* 8°.

Bib. della S. Trinità di Dublino.

1772[3] — Elements of geometry from the latine translation of *Commandine.* To which is added a Treatise of the nature and arithmetic of Loga-

rithms, likewise another of the Elements of plane and spherical Trigonometry: with a preface.... by Doctor John Keill.... Preface by *Samuel* Cunn. The eleventh edition.... *London, W. Strahan, Rivington,* 8°.

Esemp. Boncompagni.

1772 [4] — Euclides ec. (come all'an. 1728 [2]) 10[th] edit. *Dublin,* 8°.

Bib. della S. Trinità di Dublino.

1772 [5] — Euclid, with several Theorems out of Archimedes, by Andrew Tacquet, to which is added Pratical Corollaries by Wm. Whiston. 10th. edit. with an Appendix of Practical Geometry by S. F. Plates. *Dublin,* 1772, 8°.

1772 [6] — Euclid. Books I-VI with XI and XII. The errors of Theon and others corrected, and some of Euclid's Demonstrations restored. Also the book of Euclide's Data in like manner corrected by Robert Simson. *Edinburgh,* 1772, 8°.

Cat. Macmillan and Bowes, n° 222.

1772 [7] — Euclidis Elements. Books I-VI and XI-XII, with the errors corrected and some Demonstrations restored. Also the Book of Euclid's Data corrected by R. Simson. 4th edit. *Edinburg.*

Più estesa indicazione della ediz. dei Porismi notata sotto l'anno:

1776 [2] — Simson Robert. Opera quædam reliqua (I. Apollonii Pergæi de Sectione determinata libri II restituti. II. Porismatum liber. III. De Logarithmis liber. IV. De limitibus quantitatum et rationum. V. Problemata ad illustrandum præcipue veterum geometrarum analysein). Cura Jacobi Clow. *Glascow,* 1776, 4°.

Cat. Macmillan and Bowes, n° 222.

1782 [2-3] — Questi due articoli da me notati, non ne costituiscono che uno solo, di cui possiede un esemplare il prof. Jacoli. Cioè « Expositio et dilucidatio libri quinti elementorum Euclidis cuius partem primam ec. praeside Christ. Frid. Pfleiderer, pubblice ad disputandum proponunt Carolus Felix Seyffer et Samuel David Movchart. *Tubingae, typis Schrammianis* ».

1782 [4] — Elements of Geometry, from the Latin translation of Commandine. Revised by Samuel Cunn. The twelfth Edition. *London,* 1782, 8°.

Indicatami dal Sommervogel. È diversa dalla seguente?

1782 [5] — Elements ec. (come il precedente al n. 1772 [3]). With a preface.... by Doctor John Keill.... the whole revised.... preface by *Samuel* Cunn. The twelfth edition.... *London, W. Strahan,* 8°.

Esemp. Boncompagni.

1784[2] * — Elementa Euclidea geometriæ planæ ac solidæ ec. Auctore Andrea Tacquet ec. cum notis et additamentis Gulielmi Whiston. *Neapoli, apud Jos. Ant. Elia,* fac. 32 + 480 e 7 tav.

1785[4] — Elementa Euclidis.... Auctore Stephano Cabral Sacerdote Lusitano. Editio secunda ab eodem recognita et emendata. *Romæ, sumptibus Benedicti Settari,* MDCCLXXXV, 8°, pag. 130 e 3 tav.

Ediz. indicatami dal P. Sommervogel.

1785[5] — Tacquet A. Elementa Euclidea geometriæ et selecta ex Archimede theoremata. Ed. Gul. Whiston. *Dublin,* 8°.

1787[2] — Elementorum libri priores sex.... a Roberto Simson. *Edinburg,* 8°.

Indicatami dal Sommervogel.

1789[8] — Proposizioni principali de' primi sei libri di Euclide coll'applicazione di esse a diversi problemi e teoremi di fisica che si propone di dimostrare il Sig. Agostino Nani Veneto convittore nel R. D. Collegio dei Nobili di Parma. *Parma, Carmignani,* 4°.

Esemp. posseduto dal prof. Jacoli.

1790[3] — Euclides. Elementos dos VI primeiros livros, do XI, e XII. da versao Latina de F. Commandino, il. p. R. Simson. *Lisboa,* 8°.

V. 1843[4] in queste Aggiunte.

Con maggiore esattezza descrivesi la edizione indicata con la data del

1791[1] — Euclid's Elemente für den gegen wärtigen zwstand (?) des Mathematiken bearbeit von I. And. Michelsen. Berlin, Realschulbhl. 1791.

Note del Sommervogel.

1792[5] — The philosophical and mathematical Commentaries of Proclus on the first book of Euclid's Elements ec. by Taylor. *London,* 2 vol., 4°.

Notato nel cat. della bib. dello Chasles, n° 1576.

1792[6] — On the origin and investigation of Porisms by J. Playfair. *Edinburgh,* 1792, 4°.

1793[2] — (Aggiungasi).... Cum notis. Cura Thomæ Elrington. Editio altera.

1795[2] — Elements of Geometry; containing the first six Books of Eu-

clid, with two Books on the Geometry of Solids; to which are added Elements of Plane and Spherical Trigonometry, by John Playfair F. R. S. 8°. *Edinburgh,* 1795.

Cat. del Museo Brit., vol. II, pars altera, London 1816.

1798 [3] — Historia problematis de cubi duplicatione, sive de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas, auctore Nicolao Theodoro Reimer. *Gottingae, apud Joan. Christ. Dieterich,* 8°.

Il Cap. XII. è intitolato « *Aetas Ptolemaeorum. Quenam Euclidis et Archimedis de nostro problemate sint merita* ».
Esemp. posseduto dal Prof. Jacoli.

1799 [1] — Il titolo di questa ediz. è più completamente indicato nel Cat. della Bodlejana, con le parole: « (Euclides): in which the corrections of Dr. Simson are generaly adopted, but the errors overhoked by im are corrected, and the obscurities of his hand other editions explained, by Alexander Ingram ».

1801 [2] — Più esatta indicazione della ediz. sotto questo numero indicata, conforme all'esemp. che ne possiede il Prof. Jacoli.

« Gli elementi della Geometría di Euclide nuovamente esposti ed illustrati ec. Seconda edizione nuovamente rivista e richiamata ad uso delle pubbliche scuole dall'Ab. P. C. *Padova, per li fratelli Conzatti,* MDCCCI, 8°.

1802 [3] — Eléments d'Euclide de la version d'El Toussi. *Constantinople,* 1216 *de l'Hegire* (1802 de J. C.), 4° pic.

Così indicati nel cat. della bib. dello Chasles, n° 1572.
È, per quanto credo, una ediz. della versione di Nassir-Eddin.

1804 [4] — I primi sei libri tradotti dal greco-latino ed illustrati da Domenico Sonni. *Napoli, presso Aniello de Dominicis,* 8°.

Esemp. Boncompagni.

1804 [4] — The Elements of Euclid; viz. The first six Books, together with the eleventh and twelfth. The errors by which Theon, or others, have long ago vitiated these books ec. Also the book of Euclids Data in like manner corrected. By Robert Simson ec. *London,* 8°.

Posseduta dal prof. Heiberg.

1806 [3] — Euclid's Books I-VI, Xl and XII, also the book of Euclid's Data, by Robert Simpson, 13th edit. 8°.

1806 [4] — Geometrica Schemata, ex Euclide et aliis, tabulis aeneis expressa in usum tironum. 47 plates engraved by I. Basive and I. Skelton. *Oxon.*, 8°.

Bib. della S. Trinità di Dublino.

1808 [4] — The first, second and sixth Books of Euclid's Elements demonstrated in general Terms; with Notes and observations for the use of youngen students, by John Walker. *Dublin,* 1808, 8°.

Indicatami dal Sommervogel.

1809 [11] — Les Elémens de Géométrie d'Euclide, traduits littéralement et suivis d'un Traité du Cercle, du Cylindre, du Cône et de la Sphére; de la mesure des surfaces et des solides; avec des Notes; seconde édition, augmentée du cinquième livre. Par F. Peyrard. *Paris,* 8°.

1810 [2] — La 2ª edizione fu pubblicata nel 1831, con l'aggiunta di note.

1811 [2] — Euclide Elemente, die ersten vier Bücher. *Wien,* 8°.

1811 [3] — Andr. Neũbig. Vindiciae Euclidis. *Erlangen,* 2 p., 8°. (Heiberg).

1812 [2] — Eucl. Elements, corrected by R. Simson. New edit. by I. Christison. *Edinb.*, 8°. (Heiberg).

1814 [3] — Più completa descrizione della ediz. notata sotto questa data.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ.

EUCLIDIS QUÆ SUPERSUNT.

LES OEUVRES D'EUCLIDE.

(Frontis.) LES OEUVRES | d'Euclide, | EN GREC, EN LATIN ET EN FRANCAIS, | D'APRES un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusq'à nos jours. | PAR F. PEYRARD, | TRADUCTEUR DES OEUVRES D'ARCHIMÉDE. | OUVRAGE APPROUVÉ PAR L'INSTITUT DE FRANCE. | DÉDIÉ AU ROI.

A PARIS, | CHEZ M. PATRIS, imprimeur-libraire, rue de la Colombe en la Cité, n° 4 | 1814.

Tome premiér. Fac. 44 num. x-xliv, con car. bianca di riguardo, antip., frontis., dedic., pref., rapporti all'Istituto di Delambre e Prony, di Dacier, e di Lagrange, Legendre e Delambre intorno all'opera, fac. 518 di testo dei libri I-VII e car. d'errata. A pag. 453 comincia la collazione del codice 190 con la ediz. di Oxford, e varianti diverse.

Tome second. (1816) — Fac. 44 num. viij-xliv con antip., frontis. e pref. Fac. 518 di testo e car. d'errata. Contiene i lib. VIII-IX-X. A p. 423 comincia la collazione c. s.

Tome troisième. (1818) — Car. 2 con con antip. e frontis. Fac. 18 num. IV-xviij di pref., fac. 614 di testo, ed una car. d'errata. Contiene i lib. XI-XII-XIII degli elementi, il libro dei DATI, (p. 301) ed i due libri (p. 480) DE QUINQUE CORPORIBUS áttribuiti ad Ipsicle, oltre (pag. 533) le collazioni dei codici.

1814 [7] — I primi sei libri emendati in quei luoghi in cui una volta furono viziati da Teone e da altri.... da V. Flauti. Quarta edizione. *Napoli, Stamp. Reale,* 8°.

Esemp. Boncompagni.

1817[3] — Leslie John. Elements of Geometry (3ª edit.) *Edinburgh,* 8°.

Citato dal Thomson T. Perronet.

1817[4] — Der 28. Satz des XI Büches der Elemente des Euclid commentirt, m. 1 Taf. *Aschaffenburg,* 4°.

(Autore Hoffmann). Posseduto dal prof. Heiberg.

1817[5] — Euclides by R. Simson, new edit. by Christison. *Glasgow,* 8°.

Cat. de livres ecc. de M. Lejeune Dirichlet, M. Piola ecc. *Berlin, Friedlander* & *Sohn*, 1861, n. 242.

1817[6] — Euklid's Elemente. Die ersten vier Bücher. *Klangenfurt, typis Leon,* 8°, p. IV + 144.

Pub. da Paolo Spach, Benedettino austriaco.

1818[9] — Bonnycastel J. Elements of Geometry, containing the principal propositions in Books I. to VI. XI. and XII. of Euclid, with Notes. 6th edition, 8°.

Cat. Macmillan.

1819[8] — Elements of geometry containing the first six books of Euclid; with a supplement on the quadrature of the circle, and the geometry of Solids; to which are added Elements of plane and spherical Trigonometry. By John Playfair. Fifth edition, enlarged. *Edinburg, Bell & Bradfute,* 8°.

Esemp. Boncompagni.

1819[9] — G. L. König. Supplement in Euclidem. *Hamburgh, Forthes,* 1819, 4°.

Indicatomi dal Sommervogel.

1819[10] — Cresswell D. Treatise of Geometrie, with the Elements of solid Geometry. *Cambridge,* 8°.

Segue:

A supplement to the Elements of Euclid. 8°.

Cat. Macmillan, e bib. Chasles, n° 1568.

1819[11] — Geometrical problems, deducible from the first six books of Euclid, with an appendix containing the Elements of plane Geometry, by Miles Bland. *Cambridge,* 8°.

Bib. della S. Trinità di Dublino.

Più completa indicazione dell' opera indicata all' anno:

1820[3] — K. F. Hauber. Chrestomathia geometrica, continens Euclidis elementorum principia græce usque ad libri I propositionem XXVI, et ad illud græca Procli, latina Savillii, aliorumque scholia, cum notis historicis. *Tubingae, Schramm,* 1820, 8°.

Indicatomi dal Sommervogel.

1820[6] — I libri undecimo e duodecimo degli Elementi di Euclide, emendati in quei luoghi in cui una volta furono viziati da Teone e da altri.... Da V. Flauti. *Napoli, dalla Stamp. della Reale Accademia di Marina,* 8°.

Esemp. Boncompagni.

1821[2] — I libri.... *(Da V. Flauti)* (come il precedente all'an. 1820[6]). Ottava edizione. *In Napoli, nella Stamperia al palazzo Cariati,* 8°.

Esemp. Boncompagni.

1821[3] — Mathematisch-Kritische Bearbeitung in Band der Elementen Euclid's, von J. Wolfgang Müller. *Nürnberg, Riegel und Weissner,* 1821, 8°.

Indicatami dal Sommervogel.
Fra gli oppositori di Euclide si consulti principalmente il Lacroix « Essai sur l'enseignement en générale et celui des mathématiques en particulier. » V. la 4.me edit. *Paris,* 1838.

1824[7] — The ennunciations and figures of Euclide (on cards) by the rev. J. Brasse. *London,* 8°.

Cat. della Bodlejana, t. I, 1843.

1824[8] — I libri.... *(Da V. Flauti)* (come il precedente all'anno 1821[2]). Nona edizione. *In Napoli, dal gabinetto bibliografico e tipografico,* 8°.

Esemp. Boncompagni.

1824[9] — Euclid. Demonstrated in general terms by R. Garde. *London,* 8°.

Cat. della Bodlejana, t. I, 1843.

1825[5] — The first six books of the Elements of Euclid, with Notes. (By Bp. Elrington). Eighth edition. *Dublin,* 1825, 8°.

Veggasi notata sotto l'anno 1833[3] la *Tenth edition;* e la successiva *London, Bell,* 12°, nell'anno 1847[10].

1825[6] — A supplement to the elements of Euclid, by Cresswell. London, 1819. The same work. *Cambridge,* 1825, 8°.

Cat. della bib. dello Chasles, n° 1589.

1826[5] — Euclid's Elements of Geometry containing the whole twelwe

Books, translated into English, from the edition of Peyrard. By George Philips. 1826, 8°.

Indicatami dal Sommervogel.

1826 [6] — Scholien zu Euclids Elementen, aus Christ. Fried. Pfleiderers.... gedrukten academischen Schriften und handschriftlichen Nachlassen zusammengestellt. — Zweites Heft. Scholien zum zweiten Buch der Elemente. *Stuttg., Metzler,* 8°.

La pref. è datata « in December 1825. Der Herausgeber Prof. Plieninger in Stuttgart ». Posseduto dal prof. Heiberg.

1827 [2] — Un esem. della memoria notata nell' ELENCO sotto questa data è posseduto dal prof. Heiberg. Essa fa seguito alla precedente indicata in queste aggiunte sotto la data del 1826[6]; e ne ha lo stesso titolo con l' ulteriore indicazione: « Erstes Heft. Scholien zum ersten Buch der elemente. *Stuttg., Metzler,* 1827, 8° ».

Ha per primo titolo:

C. F. Pfleiderers Scholien zum ersten Buche von Euclids Elementen aus Pfleiderers gedruchten und handschriftlichen Nachlassen zusammengestellt und grosstentheils neu bearbeitet von C. F. Hauber. *Stuttg., Metzler,* 8°.

1827 [3] — The elements of Euclid ec. From the text of Dr. Simson: adapted to elementary instruction, by the introduction of symbols. By a a member of the University of Cambridge. (J. M. Williams?). *London,* 8°.

Bib. della S. Trinità di Dublino.

1827 [4] — Hirsch Meyer. Geometry; or a Lequel to Euclid, translated by I. A. Ross. Edited by J. M. F. Wright. 8°.

1827 [4] — Elements of plane Geometry, with copious Notes ec. By John Walker.

1827 [5] — Gũtenãcher. Ueber Euclid. *Würtzburg,* 4°.

1828 [4] — Euklids Elemente als Schulbulch betrachtet. Von Dr. W. J. G. Curtman. *Giessen,* 4°.

Programma posseduto dal prof. Heiberg.

1828 [5] — The first six Books of Euclid's Elements, with a Commentary, geometrical Exercises ec. and a treatise on solid Geometry, by the Rev. D. Lardner. *London,* 1828.

Vedine notata la 9ª ediz. all' anno 1848[2]; e la 11ª all' anno 1855[4].

1828 [6] — Scorza Giuseppe. Euclide vendicato. *Napoli,* 1828.

V. gli Atti dell' Ac. di Napoli, t. VI, 1851, p. XVIII.

1829[4] — Euclid, Elements, chiefly from Dr. Simson Text edit. by J. M. Williams. With many fig., 2 ed. *London,* 8°.

1829[5] — Euclides. Edid. E. F. August. *Berolini,* 2 vol., 8°.

Indicata nel citato cat. della Libreria Dirichlet, n° 245.

1830[5] — The Elements of Euclid; viz. The first six books together with the eleventh and twelfth: also the books of Euclids Data. By Robert Simson ec. To which are added the elements of plane and spherical trigonometry.... by Robertson... The twenty third edition ec. *London,* 8°.

Posseduta dal prof. Heiberg.

1832[5] — Euclid. First six books, with commentary and geometrical Exercises, by D. Lardner. 8°.

1834[4] — Euclid's Books I-VI, XI and XII, also the Book of Euclid's Data, by Robert Simson ec. 24th edit., 8°.

1834[5] — Hill C. B. Almän proportionslära, eller Euclidis 5 bok bearbetad. *London,* 1834, 8°.

Cat. Kirchhoff & Wigand, n° 804.

1834[6] — Euclid's Books.... by R. Simson. 34th edit. *London.*

Notata dal Lowndes: *The Bibliographer's Manual of English Litterature.*

1836[3] — Elements of Geometry, containing the first six books of Euclid; with a supplement on the quadrature of the Circle, and the geometry of solids; to which are added Elements of plane and spherical Trigonometry. By John Playfair; with additions by William Wallace. Ninth edition, with additions by John Davidson. *Edinburgh, Bell & Bradfute, and Stirling, Kenney & Co.,* 8°.

Esemp. Boncompagni.

1836[4] — Thomson T. Perronet. Géométrie sans axiomes, ou le premier livre des Elémens d'Euclide démontré d'une manière complétement rigoreuse, 5.e édit. ec. traduit de l'Anglais par Van Tenac. *Paris, Mercier et Devois,* 8°.

1836[5] — Elements of plane geometry according as improved by Simson and Playfair with several new improvements and additions by A. Bell. *Edinburgh, William and Robert Chambers,* 16°.

Precede un discorso dedicato in gran parte alla storia della Geometria. Esemp. posseduto dal prof. Jacoli.

1838[7] — Euclid arranged symbolically by William. *London, Bogue*, 1838, 8° e 18°.

Indicatomi dal Sommervogel.

1838[8] — Chasles M. Sur la doctrine des porismes d'Euclide. *Corr. math. et phys. pub. par A. Quetelet,* t. X, 1838, p. 1.

1840[9] — A new supplement to Euclid's elements of Geometry by the author of « A new introduction to the mathematics. » (Jos. Denison ?) *London,* 8°.

Vi fanno seguito: Appendices to a new supplement to Euclid's elements of Geometry ec. *London,* 1841, 8°.

Bib. della S. Trinità di Dublino. Sarebbero tutt' uno col n° 1840[7] dell' ELENCO CRONOLOGICO ?

1840[10] — Elementi di Geometria di Euclide, emendati e restituiti al loro pristino stato dal cav. *V. Flauti.* Decimasesta edizione. *In Napoli, nella privata stamperia dell' autore,* 8°.

Esemp. Boncompagni.

1842[6] — Della invenzione geometrica opera postuma di Nicola Fergola, ordinata, compiuta, e corredata d'importanti note dal prof. V. Flauti ec. *In Napoli, st. privata dell' a.* (Flauti), 1842, 8°, con tav.

Opera interessantissima sia per l' attinenza che ha il testo alla Geometria Euclidea, come per la prefazione e le note del Flauti concernenti i libri dei Dati e dei Porismi.

Credo appartenghi pure al Flauti il « Prospetto ragionato di opere componenti un corso di studj matematici ecc. ». utile a consultarsi; e pubblicato senza data, dopo il 1843, in opus. di p. 40 in 8°.

1843[4] — Elementos de Euclides dos seis primeiros livros, e undecimo e duodecimo da versao latina de Fred. Commandino, addicionados e illustrados por Roberto Simson. *Coimbra,* 8°.

V. l' an. 1790[3] in queste AGGIUNTE.

1844[3] — Elements.... Wallace (come nell' edizione 1836[3]). Tenth edition, in which the notes are adapted to students, and the Treatises of Trigonometry are reavvanged and extended. *Edinburg, Bell & Bradfute, and Oliver & Boyd,* 8°.

Esemp. Boncompagni.

1844[4] — Schemata geometrica ex Euclide et aliis tabulis aeneis expressa. *Oxford,* 8°.

1844[5] — Euclid's Books.... by R. Simson. 36.[th] edit. *London, by Maynard*, 1844.

Notata da Lownes, l. c.

1844[6] — Note sur deux passages d'Euclide. Par A. I. H. Vincent.

Nouv. annales des mathém., an. 1844. Note sur le deux locutions: partager une droite, une quantité en moyenne et extrême raison, et donnée qu'en raison. *Nouv. an. de math.*, t. III, 1844, p. 1. Si riferisce ad uno squarcio del libro dei *Data*.

1847[15] — An Appendix to the larger editions of Euclid's Elements of Geometry by R. Potts. *Cambridge and London*, 8°.

Cat. de la bib. de feu M. Aug. Const. Naumann. Leipzig, Weigel, 1854, n. 327.

1847[16] — Ask Fredericus Rodulphus. Demonstratio Prop. XXXII libri I.[mi] Elementorum Euclidis. *Lundae*, 4°.

Lundgren Carolus. Demonstratio ec. c. s. *Ibid.*

Bergström. Demonstratio ec. c. s. *Ibid.*

Formano un solo fascicolo con pag. continuata. Esemp. del Prof. Jacoli.

1848[9] — Nel I vol. dell' opera « Die Schriften der Römischen Feldmesser ecc. ». (*Berlin*, 1848) trovasi: Euclidis — Ex demonstratione artis geometricæ excerpta — Ex Boethii geometria excerpta.

1851[7] — Euclid. Books I-IV., with a Commentary and Geometrical Exercises, to which are annexed a Treatise on solid Geometry and Essays on the ancient Geometrical Analysis and the theory of Transversals. 11th edit. 8°, 1851.

Cat. Macmillan and Bowes, n° 222.

1853[12] — Rogg J. Supplement zu den Elementen des Euclid, m. Tfl. *Stuttg.*, 4°.

1853[13] — Euclid with propositions, and notes, and an essay on logic, by Henry Law. *London*, 2 par., 8°.

Bib. della S. Trinità di Dublino.

1853[14] — Tate I. The first three books of Euclid's elements of geometry. 5 Edit. *London*, 8°.

Cat. Kirchhoff & Wigand, n° 804.

1853[15] — Euclid. Elements of Geometry chiefly from the text of Simson, with Problems ec. and an Outline History of Geometry. By R. Potts 8°.

Cat. Macmillan.

Dell' Euclide di Potts si hanno pure le parziali edizioni: Books 1-4. *London*, 1864, in 12° — The 1st. book, with notes. *Ibid.*, 12° — Books, 1-2., *Ibid.*, 12°.

Bib. della S. Trinità di Dublino.

1853[16] — Intorno al libro X degli Elementi v. lo scritto dello Chasles nei *Comptes rendus*, t. XXXVIII, 1853.

1854[5] — Euclid. Containing the first six books and the first 21 propositions of the eleventh book ec. Edited by J. M. Williams. 24°.

Cat. Macmillan.

1855[6] — Euclid, Elements of Algebra, by Rob. Potts. *London,* 8°.

1855[7] — Euclid. Books 1-6, 11-12 from the text of R. Simson, with corrections by Robert Wallace. *London,* 4°.

Bib. della S. Trinità di Dublino.

1857[5] — Thomson. The first six and 11 and 12 books of Euclids Elements. *Belfast,* 8°.

1858[5] — Euclid. The 5th book treated algebraically. *Oxford and London,* 8°.

Bib. della S. Trinità di Dublino.

1859[5] — Elementi di Geometria di Euclide, emendati e restituiti al loro pristino splendore da V. Flauti. 24a ediz. *Napoli,* 8°.

Ha per primo titolo: « Corso di geometria elementare e sublime I. ».
« I primi sei libri degli Elementi di Euclide ».

1859[6] — Euclid. Books IV-VI translated by the Rev. J. Galbraith and S. Haughton. *London,* 8°.
Id. Books I-III. *Ibid.*, 1863, 8°.

Bib. della S. Trinità di Dublino.

1860[4] — Euclid's elements of geometry, the first six books, chiefly from the text of Dr. Simson, with explanatory notes ec., by Robert Potts, M. A. *London, John von Parker and son,* 12° gr.

Fac. VIII + 364. Più esatta descrizione di questa edizione sull' esemplare da me posseduto.

1860[11] — Notes on the first two books of Euclid, designed for candidates for responsions. *Oxford and London,* 8°.

Bib. della S. Trinità di Dublino.

1861[3] — Euclid. Books 1-6, and portion of the 11th. and 12th. books: read at Cambridge: chiefly from the text of R. Simson, with notes ec. by R. Potts. *London,* 8°.

1861[4] — Les Porismes d'Euclide. (firm. Ch. Housel). Memoria inserita nella *Revue Archéologique,* n. 5, vol. III, p. 221-229, (*Paris,* 1861, 8°).

Intorno al libro dei Porismi di Euclide, ripristinato dallo Chasles (V. Elenco cronologico an. 1860[6]), ed alla questione in proposito col Bréton (De Champ), si consultino, oltre gli scritti citati, *Comptes rendns,* t. XLVIII, 1859, p. 1033; t. L, 1860, p. 377, 940, 997; t. LI, 1860, p. 1036-43; ed i *Nouv. ann. de math.,* p. 1 e 57 del Bul. V. gli scritti:

Sur les porismes. Reponses aux réclamations adressés par M. Bréton (de Champ) dans les séances de l'Ac. des 21 e 28 Mai et du 24 Déc. *Paris, Mallet Bachellier,* 1860, 4°.

Rapport sur les progrés de la Géométrie. *Paris, impr. nat.,* 1870, 8°, p. 223.

1862[7] — Elements of Geometry. For the use of Schools, by R. Potts. *London,* 8°.

1863[5] — Trudi N. Sul criterio degl'equimoltiplici adoperato dagl'antichi geometri nella teorica delle proporzioni, nota ec. *Gior. di mat.,* vol. I, 1863, p. 337.

Può considerarsi un commento alla teorica Euclidiana delle proporzioni.

1864[2] — (È una ristampa di quella sopra notata all'an. 1861[3]).

1865[2] — Untersuchungen über die neu aufgefundenen Scholien des Proklus Diadochus zu Euclids Elementen von Dr. J. H. Knoche. *Herford,* 8°.

Posseduto dal prof. Heiberg.

1865[3] — Ki ho youen pen. *Nankin,* 1865.

In questa ediz. dell'Euclide in lingua Chinese, di cui i primi sei libri furono tradotti dal P. Matteo Ricci, il Vicerè Tseng Kouo-fan aggiunse la traduzione dei libri vii-xv data nel 1857 a Song Kieng dal sig. A. Wylie. Vedi la Parte II, an. 1608[1] e 1857[1]; e queste Aggiunte sotto la data del 1595[1].

1866[5] — Elements of Euclid. The first six books and the eleventh and twelfth, from the text of Robert Simson. Edited in the symbolical form by R. Blakelok. New edit., 24°.

1868[8] — Beltrami Eugenio. Saggio d'interpretazione della geometria Euclidiana. 1868.

1868[9] — Euclide come testo di geometria elementare per J. M. Wilson ec. Estr. dal Giorn. *The educationale times,* e tradotto da R. R. (Rinaldo Ricciarelli?). *Gior. di mat.* di Battaglini, vol. VI, p. 361.

1868[10] — Parole del prof. Hirst sull'introduzione agl'elementi di geometria del prof. Wright. Estr. dal Gior. *The educationale times,* e trad. da R. R. *Ibid.,* p. 369.

1870 [13] — Wolf I. F. Note on Euclid. Books VI, prop. 7. *Quarterly Journal,* vol. XI, 1870, p. 76.

1871 [8] — D'Ovidio Enrico. Nota sul libro XII di Euclide, e sul trattato d'Archimede relativo alla misura del circolo e de' corpi rotondi. Nel *Gior. di mat.* di Battaglini, vol. IX, 1871, p. 122.

Sul XII libro degli Elementi si consulti lo scritto dello Stoz nei *Math. Ann.*, t. XV, p. 269.

Più esatta descrizione dell' art.

1871 [6] — De Montel Enrico. Esposizione del quinto libro di Euclide. Identità della proporzione Euclidiana e della proporzione aritmetica. *Firenze,* 1871, 8°.

Estr. dal periodico « *Il Filocritico* » fasc. VIII e IX.

1871 [9] * — Die principien des I. Buches von Euklidis Elementen. Von Herausgeber. *Zeitschrift für Math. und Natur. Unter.,* 1871, p. 114.

1871 [10] — Un discorso del Dr. Hirst sopra Euclide come libro di testo. *Gior. di mat.,* vol. IX, 1871, p. 180.

1874 [11] * — De Hypsicle mathematico ecc. auct. Gof. Friedlein. *Romæ,* 1874, 4°.

1874 [12] * — Boncompagni Baldassarre. Intorno al Commento di Proclo sul primo libro degli Elementi di Euclide. *Roma, tip. delle scienze,* 1874, 4°.

1874 [13] * — Martin T. H. Procli Diadochi in primum Euclidis Elem. lib. com. ex recensione G. Friedlein. *Romæ,* 1874, 4°.

1874 [14] * — Tessier Andrea. Intorno al Commento di Proclo. Notizie raccolte da B. Boncompagni. *Roma, tip. delle scienze,* 1874, 4°.

1874 [15] — Sur l'époque et l'auteur du prétendu XV.[e] livre des éléments d'Euclide. Lettre de M. Th. H. Martin à D. B. Boncompagni. (*Bullettino* del Boncompagni, t. VII, 1874).

1874 [16] — M. Curtze. Das angebliche Work des Euklides über die Wage. (*Zeitschr. f. Math. u. Phys.,* 1874).

1874 [17] — Hankel. Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter. *Leipzig,* 1874.

V. specialmente l'analisi che fa del lib. V. di Euclide.

1874 [18] — Hunger. Die arithmetische Terminologie der Griechen, als Kriterium für das system der Griechischen Arithmetik. (*Einladungsschrift des Gymnasiums in Hildeburghausen,* 1874).

1875 [9] — Programm des Königlichen Gymnasiums in Tübingen zum Schlusse des Schuljahrs 1874-75. Inhalt: 1. Abhandlung: Proklos über die Petita und Axiomata bei Euklid von Prof. L. Majer. 2. Schulnachrichten von Gymnasialrector Dr. Baur. *Tübingen, Gedruckt bei Heinrich Laupp.*

Car. 1 e fac. 48.

1876 [9] — Kritische Beleuchtung der Euklidischen Geometrie von Dr. Carl Heinze. *Berlin, Friedberg & Mode,* 8°.

Posseduto dal prof. Heiberg.

18... — Besitzt die heutige Schulgeometrie noch die Vorzuge des Euklidischen Originals? Eine Betrachtung von Dr. Hubert Müller. *Metz u. Diedenhofen, G. Scriba,* s. d.

1876 [10] — Kritiske Beleuchtung der Euclidischen Geometrie. *Berlin,* 1876.

V. l' *Archiv. der Math,*, 1877. V. sopra, an. 1876 [8].

1879 [7] — Taylor H. M. Note on Euclid. *Messenger of Math.* Dec., p. 122.

1879 [8] — Bastogi Ferdinando. Il maestro di matematiche elementari dal 1844-79. — Elementi di geometria piana compilati ec. pel confronto dei sistemi di Euclide e Legendre ec. *Livorno, G. Fabbreschi,* 1879.

1879 [9] — Weissenborn. Das Trapez bei Euklid, Heron und Bhramegupta. *Abhand. z. Gesch. der Math.* II Heft, 1879.

1881 [8] — Gustrin E. F. Euclides Elementa. *Pedagogisk tids Krift. Halmstad,* 17, 141-153.

1883 [9] — Life of Sir William Rowan Hamilton.

Nell'appendice al vol. I. (1882) di quest'opera pubblicata da R. P. Graves, trovasi un curioso dialogo fra Pappo ed Euclide, immaginato dall'Hamilton.

1883 [12] — Heiberg I. L. Griechische und Römische Mathematik. *Philologus,* t. 43, 1883.

1884 [14] — Gow. A short History of the Greech Mathematich. *Cambridge,* 1884.

1885[11] — Tirelli Francesco. Le fonti della geometria d'Euclide. *Napoli, A. Tocco,* 1885-86, par. 4 in fac. 254.

Aggiungasi in proposito il di lui scritto, intitolato « Agli onorevoli componenti la Commissione esaminatrice nel concorso alla cattedra di matematica del R. Liceo T. Mamiani. *Bari,* 16 Dic. 1885.

1887[1] — Tannery P. La tecnologie des élémens d'Euclide. *Bul. des sc. math.,* Janv. 1887, p. 17.

1887[2] — Tannery P. Les continuateurs d'Euclide. *Ibid.* Avril 1887, p. 86.

1887[3] — Tannery P. Heron sur Euclide. *Ibid., Mai* 1887.

Al Tannery dobbiamo pure gli scritti: Sur l'authenticité des Axiomes d'Euclide.
De la solution géométrique des problèmes du second dégré avant Euclide.
Mém. de la soc. des sc. phys. et nat. de Bordeaux, 2[e] ser., t. IV.
La géométrie grecque. *Paris,* 1887.

1887[4] — Euclid's Elements of Geometry Book 1, arranged by A. E. Layng M. A. *London, Blake & Son,* 8°.

1887[5] — Adriani Angelo. Elementi di geometria Euclidea esposti con nuovo metodo. *Napoli, Pellerano,* 1887, 8°, p. XVI + 369.

V. l'art. di G. Loria nel *Periodico di mat.*, an. I, 1887, p. 125.

1888[1] — Om Scholierne til Euklidis Elementer. Af J. L. Heiberg. Avec un résumé en francais. *Kjobenhaven, F. Dreyer,* 1888, 4°. Estr.

1889[1] — Euclide. Libro quinto, nuovamente esposto dal Dr. Michele Gremigni. *In Firenze, G. C. Sansoni,* 1889, 8°, p. 80.

1889[2] — Tognoli O. Compendio di geometria elementare secondo il metodo Euclideo. Lib. 1° e 2°. *Torino,* 1889, 8°.

1889[3] — Cristensen. Ueber Gleichungen vierten Grades in zenthen Buch der Elemente Euclid's. *Zeits. f. Math. und Phys.,* t. 34, 1889, *Hist. Lit. Abth.,* p. 201.

1889[4] — D'Ovidio E. I libri primo e secondo di Euclide ec. *Napoli, B. Pellerano,* 1889, 8°.

Fac. 8 + 121, fig. e car. bianca nel fine.

1890[1] — A complemento di queste AGGIUNTE mi compiaccio di segnalare l'interessantissimo saggio storico:

Il periodo aureo della geometria greca ec. di Gino Loria ec. *Torino, C. Clausen,* 1890, 4°, fac. 79 e 2 tav.

(Estr. dalle *Mem. della R. Ac. di Torino,* ser. II, t. XL.).

L'a. in sette capitoli si occupa della vita e delle opere di Euclide, Archimede, Eratostene, Apollonio, Ipsicle, Nicomede, Diocle, Perseo e Zenodoro.

Si consulti ancora l'art. inserito nel *Periodico di mat. per l'insegnamento secondario,* t. V, 1889.

APPENDICE

CONTENENTE L'ELENCO CRONOLOGICO DI UNA SERIE DI MONOGRAFIE ATTINENTI AL QUINTO POSTULATO DI EUCLIDE, ALLA TEORIA DELLE PARALLELE ED AI PRINCIPJ DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA.

1603[3] — Cataldi Pietro Antonio. Operetta delle linee rette equidistanti, et non equidistanti. *Bologna, her. Rossi,* 4°.

Vedi la descrizione di questo raro libretto, e dell' *Aggiunta* pubblicatane nel 1604, nella mia *Bib. mat.,* vol I; col. 303.

1604[2] — Thomas Oliver of Bury. De rectarum linearum parallelismo et concursu doctrina geometrica.

Citato da T. Perronet Thomson. (V. sotto la data 1836[4] in questa APPENDICE).

1693[3] — De postulato quinto ec. (V. l'ELENCO CRONOLOGICO).

1733[3] — Euclides ec. Auct. Hyeronimo Saccheri. (V. l'ELENCO CRONOLOGICO).

Il P. Manganotti, cui principalmente debbo parecchie indicazioni di scritti intorno a questo soggetto, mi fa notare sembrargli, e con ragione, che il Saccheri in questa importante opera già da me citata nell' ELENCO CRONOLOGICO, abbia preceduto il Lobatschewski nei principii della Geometria immaginaria. V. in proposito la nota del Beltrami « Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewski. » Rend. della R. Ac. dei Lincei, vol. V, 1889.

1751[4] — Hanke I. G. Dissertation ec. (intorno alle parallele). *Leipzig.*

Citata dal Klügel.

1763[5] — G. S. Klügel. Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio. Gottingae. 1763. XXX p., 4°, con una tavola sul rame.

« Dissertazione inaugurale presieduta da A. G. Kästner, con osservazioni tratte da Proclo, Posidonio, Tolomeo, Saccheri, Hausen, Maleziev, Nassaraddin (sic) Wallisius, Segner, König, Kärsten, Giordano da Bitonto, Hanke, Clavio, Tacquet, Cataldo, Ramus, Wolff, Behn, Pardies, Clairaut, Sauveur, Camus, Boscowich, Varignon, criticamente esaminate. Le opere tedesche stimate di maggior merito vi si trattano con maggiore chiarezza. » (Hoffmann n° 1). V. in proposito la citata Nota del Beltrami « Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewski. »

1778 [3] — W. Joh. Gustav Kärsten. Versuck eiher völlig berichtigten Theorie der Parallellinien. 1778. 20 p., 4°, con figure incise.

È il discorso inaugurale pel suo ingresso alla cattedra di Matematica e Fisica. (Hoffmann n° 2).

1780 [3] — Mathias Hauser. Theorie der Parallellen. Aus dessen Abhandl. der Anfangsgr. der Mathematik zum Gebrauche der k. k. Academie. Wien, 1780. 2 Theil.

Memoria in 2 parti. P. 34 in f°. (Hoffmann n° 3).

1783 [2] — Theoria rectarum parallelarum ab omni scrupolo vindicata. Auctore J. M. P. C. P. (Pagnini *Jos. Maria*). *Parmæ,* 8°.

V. più oltre negli an. 1787 e 1794.

1784 [3] * — Venturi Giambattista. Memoria intorno alle linee parallele. (Inserita nell' opuscolo di Saggio scolastico: Proposizioni di geometria piana ecc. *Modena, Soc. tip.,* 4°).

1785 [3] — Castiglioni G. — V. l'Elenco cronologico.

1786 [1] — Joh. Heinr. Lambert. Theorie der Parallellinien. In dem Leipziger Magazin für reine und angew. Mathem. von Bernoulli und Hindenburg. 2 Stuch. Leipzig, 1786.

« P. 137 a 164; alle volte in 3 parti. P. 325 a 358, oltre qualche altra cosa sulle Parallele. P. 359 a 376. 8. unitamente alle figure. » (Hoffmann n° 4).

1786 [2] — F. Hindenburg. System der Parallellinien. Leipziger Magazin für 1786.

« 3 Stük da P. 376 a 404, dove si trovano anche ulteriori osservazioni circa la teoria delle Parallele. » (Hoffmann, n° 5).

1786 [3] — De Theoria parallelarum Schulziana, auctoritate amplissimi Philosophorum ordinis in academia Lipsiensi disputabit M. Caspar Eichler, respondente theaeneto Rüffer. 1786. 25 p., 4°. Con 4 figure.

(Hoffmann, n° 6).

1786 [4] — Joh. Schultz. Darstellung der vollkommnen Evidenz und Schärfe seiner Theorie der Parallelen. *Königsberg,* 1786. 60 p., 8°.

(Hoffmann, n° 7).

1786 [5] — Lazarus Bendavid. Ueber Parallellinien.

« In uno scritto al sig. Hofrath Karsten. *Berlin,* 1786 in 16, p. 8, con una tavola sul rame. » (Hoffmann, n° 8).

1787[3] — Franceschinis Francesco Maria. Opuscoli matematici. (Teoria delle parallele rigorosamente dimostrata). *Bassano.*

Secondo l'a., il Varignon se ne sarebbe occupato partendo dal concetto degli angoli uguali fatti dalla trasversale.

1789[7] — Voigt J. H. — V. l'Elenco cronologico.

1790[3] — Jo. Hen. Voigt. Commentatio mathematica exhibens tentamen ex notione distincta et completa lineae rectae veritatem axiomatis XI Euclidis demonstrandi. *Jenae,* 1790.

« 4. 34 p. In ultimo una tavola sul rame ». (Hoffmann, n° 9). Forse è una ripubblicazione della precedente.

1790[4] — M. W. Schröttering. Demonstratio theorematis parallelarum. *Hamburgi,* 1790.

30 p. con figure incise. Hoffmann, n° 10.

1791[5] — De lineis rectis parallelis ec. Indicit J. J. Ebert. *Vitebergæ,* 8°.

V. *Cat. de la bib. du feu M. Chasles,* n° 2345.

1792[7] — Jo. Jac. Ebert. De lineis rectis parallelis etc. *Vitebergae,* 1792.

14 p. 4°, con una incisione sul rame. Segue un programma accademico. Hoffmann, n° 11.

1794[3] — Legendre A.-M. Elémens de Géométrie. *Paris,* 1794, 8°.

Nelle successive ediz. aggiunse più importanti note sulla teoria delle parallele. Il Brunet nota una 11ª ed una 14ª ediz. *Paris Didot,* 1862 e 1863, in 8°.
Fra le molte ediz. di questo apprezzato libro, che non potevasi ommettere di segnalare in una bibliografia degli scritti concernenti la teoria delle parallele, posseggo la 8ª (*Paris, Didot,* 1809, 8°); la 12ª (*Paris, Didot,* 1823, 8°); e le traduzioni italiane di *Pisa, soc. let.,* 1802, 8°; di *Firenze, Piatti,* 1809, t. 2, 8°; di *Firenze, tip. della speranza,* 1834 (versione di Gaetano Cellai); di Napoli, 1850, 8° con note di Tommaso Mandoj; e di *Napoli,* 1864, 8°, versione con note di Camillo Zacchi.

1794[4] * — Josephi Mariae Pagnini Epistola.... in qua continentur castigationes ac supplementa libelli Parmae anno MDCCLXXXIII editi cui titulus Theoria rectarum parallelarum ab omni scrupolo vindicata. *Parmæ, ex tip. Marci Rossi et Andræ Ubaldi,* 8° pic.

V. sotto la data del 1783[2] in quest' Appendice.

1795[3] * — Trattato delle parallele (attribuito a Girolamo Saladini) *S. l. ed a.*

1795[4] — J. G. Büsch. Auszug aus der Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften. *Hamburg,* 1795.

§ 10 in f°. Opuscoletto. Hoffmann, n° 12.

Più esatta indicazione dello scritto notato all' anno 1799[3] dell' ELENCO CRONOLOGICO.

1799[3] — J. K. F. Hauff. Neuer Versuch einer Berichtigung der Euclidischen Theorie der Parallelen.

« Nell' Archivio di Matematica pura ed applicata per M. Hindenburg. 9 quaderno. Lipsia 1799. p. 74 in f°. Il cui supplemento alla sua nuova opera sumenzionata, trovasi nel 10° quaderno del detto Archivio, p. 178 in f°. » Hoffmann, n° 13.

1799[5] — (Anonimo). Demonstratio theorematis parallelarum. *Hamburgi.*

Citata da Klügel.

1801[4] — Schwab J. P. Tentamen ec.

V. ELENCO CRONOLOGICO. È notato anche dall' Hoffmann, n° 14.

1801[6] — (Anonimo). Dissertatio sistens novam theoriam linearum parallelarum ec. *Lundii,* 1801.

Citata da Klügel.

1801[7] — Joh. Jos. Ign. Hoffmann. Versuch einer neuen und gründlichen Theorie der Parallellinien; nebst Widerlegung des Hauff'schen Versuchs. *Offenbach,* 1801.

« 48 p. 8. Con una tavola di figure. Questo trattato fu la prima delle opere date alle stampe dall' Autore del presente scritto. » Hoffmann n° 15.

1802[4] — Voit. Percursio conatuum demonstrandi theoriam parallelarum de eiusque iudicium. *Gottingae.*

Citato da Klügel.

1803[6] * — Nouvelle théorie des paralléles, avec un Appendice contenant la maniére de perfectionner la théorie des paralléles de A. M. Legendre. *Paris, Courcier,* 8°.

P. 64 ed 1 tav. L' appendice è firmata. *Adolphe Kircher mèdecin.* È notata anche dall' Hoffmann, al n° 16.

1804[5] — Bernard Bolzano. Betrachtungen über einige gegenstände der Elementargeometrie. *Prag,* 1804.

« P. X più 63 in 8., oltre una nuova teoria ragionata sulle Parallele. » Hoffmann, n° 17.

1805[4] — Lacroix S. F. Essai sur l'enseignement ec. *Paris,* 1805, 8°.

V. più oltre sotto le date 1816[7] e 1828[6].

1807[3] — Joh. Jos. Ign. Hoffmann Critik der Parallelen-Theorie. *Jena,* 8°.

P. XII e 276 con 10 tav. sul rame.
Questo scritto contiene la illustrazione e giudizio dei tentativi di Clavius, di Proclo, di Hauff,

di Bossut, di Kästner, di Simson, di Lacroix, di Lorenz. di Segner, di Nassareddin, di Kircher, di Schmidt, di Legendre, di Schwab, di Tacquet, di Lindenburg e dello stesso Hoffmann.

Si consulti inoltre:

Hoffmann. Die Principien des 1. Buchs von Euclid's Elementen. (Zeitschr. f. math. naturwis. Unterricht, 3 Jahrg. c. 121).

1808 [5] — Ferdin. Carl Schweikart. Die Theorie der Parallellinien, nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie. *Jena und Leipzig*, 1808.

« 136 p. gr. 8. Opera partita in tre. I. Die Cigenschaften der Parallellinien; II. Die Construction des Quadrats; III. Von dem nothwendigen Zusammentreffen zweier geraden Linien an der Seite, wo sie mit einer dritten sie schneidenden Linie solche Winkel bilden, dasz beiden innern Winkel kleiner als zwei rechte Winkel sind. Con 5 tavole sul rame. » Hoffmann, n° 18.

1808 [6] — Carl Siegm. Ouvrier. Theorie der Parallelen, als Anfündigung eines neuen Versuchs über das Erkenntniszvermögen. *Leipzig*, 1808.

55 p. 8. In fine una tavola di figure. Hoffmann, n° 19.

1808 [7] — J. C. Schwab. Essai sur la situation, pour servir de supplément aux principes de la Géométrie. Stuttgard, 1808.

50 p. Con le rispettive figure incise. Hoffmann, n° 20.

1809 [10] — D'Abreu. Supplém. ec. V. l'Elenco cronologico.

1810 [3] — Suzanne H. De la manière d'étudier les mathématiques. *Paris, Courcier.*

A p. 47 dà una teoria delle parallele seguendo il Tacquet.

1812[2]-13 * — Gergonne. Essai sur la théorie des parallèles.

Inserita ne' suoi *Annales de math.*, t. III, p. 353.

1813 [2] — Crist. Aloys Herrmann. Versuch einer einfachen Begründung des eilften Euclidischen Axioms und einer darauf gebauten Theorie der Parallellinien. *Frankfurt a M.*, 1813.

In 4. 28 p. Con due tavole. Hoffmann, n° 21.

1813 [3] — Jak. Fried. Duttenhofer. Versuch eines strengen Beweises der Theoreme von den Parallellinien, vermittelst einer von jenen Theoremen unabhängigen Construction des Rechtecks. *Stuttgart*, 1813.

24 p. 8° Con una tavola. Hoffmann, n° 22.

Più completa descrizione dello scritto indicato nell' Elenco cronologico all' anno:

1814 [5] — J. C. Schwab. Commentatio in primum Elementorum Euclidis librum, qua veritatem Geometriae principiis ontologicis niti evincitur, om-

nesque propositiones, axiomatum geometricorum loco habitae, demonstrantur. *Stuttgartiae*. 1814.

« P. IV e 67 in 8., con una tavola. Qualche esemplare consta di p. 61. § 47. contenente tanto l'XI assioma di Euclide quanto i teoremi. » Hoffmann, n° 23.

1815 [3] — Matthias Metternich. Vollständige Theorie der Parallellinien.

« In fine una appendice nella quale si svolge il fondamento della dottrina sulla linea retta. *Mainz* (Magonza) 1815. XIV più 44 p. in 8 gr. Con una tavola sul rame. In fine un supplemento stampato più tardi. » Hoffmann, n° 24.

1816 [5] — Aug. Leop. Crelle. Ueber Parallelen-Theorieen und das System in der Geometrie. *Berlin*, 1816.

8 p. Con una tavola sul rame. Hoffmann, n° 25.

1816 [6] — J. A. P. Bürger. Vollständige Theorie der Parallellinien. (In fine una nota sulle teorie, fin'ora apparse, delle Parallele). *Carlsruhe*, 1816.

P. XII. più 35, in 8 gr. con una tavola di figure. Hoffmann, n° 27.

1816 [7] * — Lacroix S. F. Essai sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier. Seconde édition, revue et corrigée. *Paris*, v.[e] *Courcier*, 8°.

V. più oltre alla data 1828 [6].

1817 [7] — Friedr. Ludw. Wachter. Demonstratio axiomatis geometrici in Euclideis undecimi. *Gedani*, 1817.

15 p. in 8° pic. Senza tavole. Hoffmann, n° 28.

1818 [1] — V. l'Elenco cronologico.

1818 [6] — D'Abreu — V. l'Elenco cronologico.

1818 [10] — Exley Thomas. The theory of Parallel Lines perfected, or the Twelfth Axiom of Euclid's Elements demonstrated. *London, Hatchara*, 8°.

Citato dal Thomson T. Perronet.

1818 [11] — Carl Christ. Herm. Vermehren. Versuch, die Lehre von den parallelen und convergenten Linien aus einfachen Begriffen vollständig herzuleiten und gründlich zu erweisen. *Güstrow*, 1818.

26 p. in 8 pic. Con una tavola. Hoffmann, n° 26.

1818 [12] — C. F. H. Euklid's eilfter Grundsatz als Lehrsatz bewiesen. Hamburg, 1818.

8 p., 4° con figure incise. Hoffmann, n° 29.

1818 [13] — C. M. Heszling. Versuch einer Theorie der Parallellinien.

« Un Vol. in 223 pag. in 8 gr. contenente da p. 1 a 73: Versuch einer Theorie der Parallellinien; da p. 74 a 136. Grundsätze zu derselben: da p. 137 a 215 Beiträge zur Verhältniszlehre; da p. 216 a 223. Zusammenstellung dessen, was in Eucl. Elem. B. 1 über den Parallelismus vorgetragen worden ist. *Halle*. 1818. Con 5 tavole, e figure incise. » Hoffmann, n° 30.

1819 [12] — (Anonimo). Sur l'emploi de l'algorithme fonctionnel dans la démonstration des théorémes en Géométrie.

Ann. de Gergonne, t. X, an. 1819-20.

1819 [13] — Joh. Wolfg. Müller. Ausführliche evidente Theorie der Parallellinien. *Nürnberg,* 1819.

79 p. in 8. Con una tavola sul rame. Hoffmann, n° 31.

1819 [14] — Aug. Friedr. Lüdicke. Versuch einer neuen Theorie der Parallel-Linien, im Zusammenhange mit den Grundlehren der Geometrie. Meiszen, 1819.

15 p. in 8. In fine una giunta e l' errata-corrige. Con una tavola di figure. Hoffmann, n° 32.

1820 [7] — K. L. Struve. Theorie der Parallellinien. (Con 19 figure incise). *Königsberg,* 1820.

P. XII + 36, in 8°, Hoffmann, n° 33.

1820 [8] — J. A. P. Bürger. Vollstandige Theorie der Parallellinien u. s. w. *Karlsruhe*, 1820, in 8°, p. 53.

Seconda edizione, accresciuta con osservazioni, dell' opera notata superiormente all' anno 1816. Hoffmann, n° 34.

1821 [4] — B. F. Mönnich. Ein Versuch, die Theorie der Parallellinien auf einen Grundbegriff der allgemeinen Groszenlehre zurückzüfuhren. *Berlin,* 1821.

56 p. in 8. Con due tavole. Hoffmann, n° 35.

1821 [5] — J. C. Köster. Versuch einer neuen Theorie der Parallelen. (Con una prefazione di Hofrath Bährens). *Hamm.* 1821.

38 p. in 8. con una tavola litografata. Hoffmann, n° 36.

1821 [6] — Car. Hauff. Nova rectarum parallelarum theoria. Ed. altera supplementis aucta. *Francof. a. M.*, 1821.

« P. VIII più 86 in 4. con una gran tavola. Sect. I. Theoria parallelarum e contemplatione trigoni aequilateri deducta; Sect. II. theor. rect. parallel. e contemplatione quadrati deducta; Sect. III. theor. rect. parallel. e contemplatione circuli deducta. » Hoffmann, n° 37.

1821[7] — M. Creizenach. Abhandlung über den eilften Euclidischen Grundsatz in Betreff der Parallellinien.

« In fine una nuova dimostrazione della 28 proposizione nell' XI libro degli Elementi: *Mainz.* 1821. 28 p. in 4°. Colle figure incise. » Hoffmann, n° 38.

1821[8] — Sulla teoria delle parallele e su quella delle figure equivalenti.

Gazz. di Bologna, 1821, n° 38.

1822[3] — Mathias Metternich. Vollstandige Theorie der Parallellinien, oder geometrischer Beweis des eilften Euclidischen Grundsatzes.

« Seconda adizione riveduta, con una tavola di figure. *Mainz*, 1882. XX più 41 p. in 8. (Vedi pure all' an. 1815). La dimostrazione della 12 proposizione fu prima di tutti fatta da me. » (Così l' Hoffmann, n° 40).

1822[4] — Carl Reinhard Müller. Theorie der Parallelen. *Marburg,* 1822.

P. IV più 40 in 4, con una tavola di figure. Hoffmann, n° 39.

1823[2] * — Legendre A. M. Elémens de Géométrie avec des notes. XII édit. *Paris, Didot.*

La nota II è diretta a stabilire il Postulato di Euclide; e vi è citato un art. di dotto geometra inserito nel *Philosophical Magazin,* del Marzo 1822; non che i seguenti scritti di Leslie (2ª e 3ª ediz. de' suoi elementi di geometria) che confuta la dimostrazione di Legendre: di Playfair che nel t. XX della *Edinburg Review* confuta Leslie: di Maurice che nella *Bibliothèque universelle* di Ginevra (ott. 1819) difende Legendre: di David Brewter che nella sua traduzione inglese degli Elementi di Legendre (*Edinburg,* 1822) ne discute le obbiezioni.

1823[3] — Hauff M. C. e Foex.

Il Gergonne in una sua nota alla memoria dello Stein (an. 1824), ed inserita a p. 82 del t. XV degli *an. de math.*, cita uno scritto di Hauff pubblicato a Francfort nel 1823 (di 86 p. in 4°) contenente la critica di parecchie altre pubblicazioni su questo soggetto; ed uno di Foex, allora presentato all' Accademia di Parigi.

La memeria di Stein è intitolata: « Examen de quelques tentatives de théorie des paralléles. » *Ann. de math.*, t. XV, 1823-24, p. 77.

1823[4] — F. W. Lud. Wahl. Dissertatio mathematica, symbolas ad epicrisin theoriarum parallelas spectantium continens. Particula 1. Insunt IV theoriae earumque censura. *Jenae,* 1823.

« P. VIII. e 44 in 4. Cum tabula aenea. L' opuscoletto di questo trattato si trova unito alla critica del Saggio di Voigt, Langsdorf, Thibaut e di qualche altro anonimo. » Hoffmann, n.° 42.

1823[5] — Daniel Huber. Nova Theoria de parallelarum rectarum proprietatibus. *Basileae,* 1823.

40 p. in 8.° con rame inciso. Hoffmann, n° 41.

1823[6]-24 * — (Anonimo). Essai de démonstration du principe qui sert de fondement á la théorie des paralléles.

Ann. de Gergonne, t. XIV, an. 1823-24, p. 269.

1824[4] — Euclidis ec. V. l'ELENCO CRONOLOGICO.

1824[5] — Jacobi C. F. A. — V. l'ELENCO CRONOLOGICO. Lavoro, dice l'Hoffmann, premiato dall'Accademia.

Più completa descrizione dello scritto indicato nell'ELENCO CRONOLOGICO all'anno:

1824[6] — Joh. Dav. Bensemann. Dissertatio de undecimo axiomate Elementorum Euclidis (pro facultate legendi). *Halae,* 1824.

50 p. in 8. Con una tavola di figure. Hoffmann, n.° 43.

1824[9]-25 * — Stein. Examen de quelques tentatives de théorie des paralléles. (*Annales* de Gergonne, t. XV, p. 77).

L'a. cita due art. anonimi notati sotto le date 1823-24.
Il Gergonne vi appone alcune note, citando altri articoli e memorie su questo soggetto, fra le quali una di M. C. Hauff pubblicata a Francfort, ed una di Foex presentata all'Accademia. La memoria dello Stein seguita a p. 45 del t. XVI, an. 1825-26.

1825[7] — F. A. Taurinus. Theorie der Parallellinien. *Köln,* (Colonia sul Reno). 1825.

« P. XIV più 93 in 8. Con tre tavole a litografia, e con un supplemento circa la teoria delle Parallele. *Ebend.* 1825. 8 p. con tavola a litografia. » Hoffmann, n° 45.

1825[8] — F. A. Hegenberg. Vollständige, auf die bekannten Elementarsatze von den geraden Linien und Winkeln gegründete Theorie der Parallellinien. *Berlin,* 1825.

46 p. in 8. Con una tavola di figure. Hoffmann, n° 46.

1825[9]-26 * — Servois. Lettres au rédacteur des Annales (Gergonne). Sur la théorie des paralléles.

Gergonne, Annales, t. XVI, 1825-26, p. 233.

1825[10]-26 * — Stein. Lettre sur divers sujéts traités dans les *Annales* (de Gergonne). Théorie des paralléles.

Ibid., t. XVI, p. 259.

1826[7] — Joh. Wolfg. Müller. Neue Beitrage zu der Parallelen.

« Portante la dimostrazione della proposizione di Pitagora e il modo di computare de' Pitagorici. *Augsburg und Leipzig.* 1826. 71 p. in 8. In fine un' appendice a complemento della precedente teoria dei Pitagorici in 28 p. Con una tavola di figure. » Hoffmann, n° 47.

1826[8]-27* — Bouvier L. C. Essai de démonstration du *Postulatum* XI des Élémens d'Euclide.

An. de Gergonne, t. XVII, 1826-27, p. 152.

1827[6] — Christian Adolph Koch. Ueber Parallellinien.

« Saggio vertente sullo studio suindicato. *Hamburg.* 1827. 12 p. in 8°. con incisione sul legno. » Hoffmann, n° 48.

1828[3] — Lampredi Urbano. Intorno ec. — V. l'ELENCO CRONOLOGICO.

1828[6] — Scorza. Euclide vendicato. V. le AGGIUNTE.

1828[7] — Lacroix S. F. Essais sur l'enseignement en général et sur celles des mathématiques en particulier ec. 3.e edit. *Paris, Bachelier,* 8°.

Al n° 3 del § III della Sez. II, fa importanti osservazioni circa i punti fondamentali della geometria.

1830[4] — Brunacci V. — V. l'ELENCO CRONOLOGICO.

1833[2] — Thomson T. Perronet — V. l'ELENCO CRONOLOGICO.

1833[4] — J. A. P. Bürger. Vollständig erwiesene, von den ältesten zeiten bis jetzt noch unberichtigt gewesene Theorie der Parallellinien, nebst einer critik mehrerer bisher erschienener Paralleltheorien und Anführung anderer neuerfundener geometrischer Gegenstände u. s. w. *Heidelberg,* 1833.

P. XII più 208 in 8 gr. In fine due tavole di figure. Hoffmann, n° 49.

1833[5] * — Legendre A. M. Reflexions sur différentes maniéres de démontrer la théorie des paralléles, ou le théoreme sur la somme de trois angles du triangle.

Mèm. de l' Ac. des sciences, t. XII, 1833, p. 367. Memoria classica.

1834[2] — Metzing S. Beweis ec. — V. l'ELENCO CRONOLOGICO. Notato da Hoffmann al n.° 51).

1834[7] — Dessen. Neuaufgefundener Beweis von dem seit 21 hundert Jahren unberichtigt gewesenen eilften Euklidischen Grundsatze in der Geometrie in Betreff der Parallelen-Theorie. Heidelberg, 1834.

« 16 p. Con una tavola di figure e un' appendice appostavi. 16 p. in 8. Con una tavola di figure. » Hoffmann, n° 50.

1835[2] — Hill C. S. Conatum theoriam linearum parallelarum stabiliendi ec. *Lundae.*

Indicatomi dall' Eneström. Ne veggo citata una ediz. del 1880.

1836[4] — Thomson T. — V. le precedenti AGGIUNTE.

Si consulti quest' opera anche per la bibliografia e l' analisi degli scritti concernenti il noto postulato di Euclide, e le teorie delle parallele, pubblicati a parte o contenuti nelle opere di geometria di d' Alembert, di Lacroix, di Legendre, di Bezout, di Didiez, di Vincent, ecc. che non ho potuto comprendere nella bibliografia euclidea.

1836 [6] — Ignaz Kaiser. Versuch, die Theorie der Parallelen Linien streng nachzuweisen. *Wien,* 1836.

23 p. In fine due tavole in 8. Hoffmann, n° 52.

1836 [7] — Carl Auguste Hennig. Neue Begründung der Parallelentheorie. *Nürnberg,* 1836.

16 p. in 4. In fine una tavola sul rame. Hoffmann, n° 53.

1836[8]-37-38 — Lobatschewski N. Nouveaux principes de Géométrie avec une théorie compléte des parallelés.

Mém. de l' Université de Kasan, an. d.

1836 [9] — Lampredi Urbano. Tentativo di una nuova teorica elementare delle linee perpendicolari, obblique e parallele ec. Seconda edizione. *Napoli, Raf. De Stefano,* 1836, 8°, p. 32 ed 1 tav.

V. all' anno 1828 [3], nella PARTE SECONDA. ELENCO CRONQLOGICO.

1837 [5] — Lobatschewski N. Géométrie imaginaire.

Crelle, *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* Band. XVII, an.° d.°

1837 [6] — Gottfr. Wieszner. Begründung der Parallelentheorie, auf den ohne Beihülfe der Parallellinien geführten Beweis, dasz die Winkelsumme eines jeden Dreiecks zwei rechten Winkeln gleich sei. *Jena,* 1837.

13 p. in 8, con tavola di figure. Hoffmann, n° 54.

1837 [7] — Carl Gräf. Der Satz von der Winkelsumme des Dreiecks ohne Hülfe der Parallellinien bewiesen. *Rudolfstadt,* 1837.

16 p. con tavola di figure. Hoffmann, n° 55.

1839 [1] — Day A. — V. l'ELENCO CRONOLOGICO.

1839 [4] — Friedr. Marker. Theorie der Parallellinien. *Meiningen,* 1839.

16 p. 8, con una tavola di figure a litografia. Hoffmann, n° 56

1840 [2] — Thomson T. Perronet — V. l' ELENCO CRONOLOGICO.

1840 [5] — Seeber L. A. — V. l'ELENCO CRONOLOGICO, e l'Hoffmann, n.° 57.

1840 [11] — Lobatschewski N. Geometrische Untersuchungen zur Théorie der Parallellinien ec. *Berlin,* 8°.

P. 61 e 2 tav. — Hoffmann, n° 58.

1840 [12] — Anton Bischof. Ueber die theorie der Parallelen.

Programma per saggio Ginnasiale a Monaco nel 1839-40. 34 p. in 4, senza tavole di figure. Hoffmann, n° 59.

1841 [2] — Fusco Giovanni — V. l' ELENCO CRONOLOGICO.

1841 [6] — Eduard Lynker. Theorie der Parallelen. *Wien,* 1841.

16 p. in 8, con tavola di figure. Hoffmann, n° 60.

1844 [7] — Cournot. Traité de l'enchainement des idées fondamentales dans les sciences et dans l' histoire. *Paris, Hachette,* 1844, 8°.

(V. L. I, c. III, p. 44).

1844 [8] — J. C. Dr. Hill. Conatus theoriam linearum parallelarum stabiliendi præcipui, quos recensuit novisque superstruxit fundamentis atque auxit Auctor. *Lundae,* 4°.

74 pag. con 2 tav. di fig. Lavoro molto importante, il quale, dice l' Hoffmann (n° 61) merita una versione tedesca. V. sopra, an. 1835 [2].

1845 [8] — Lafitte C. Essai ec. — V. l' ELENCO CRONOLOGICO.

1845 [12] — Broc. Mémoire sur la ligne droite.

Citata nei *Comptes rendus,* 1845, II par., p. 879.

1846 [7] — Bolyai W. — Urtan elemei Kezdöknek. (Elementi della scienza dello Spazio) — c. d.

V. Forti, *intorno alla vita di W. e G. Bolyai* ec. (1868 [14]).

1847 [17] — Marsano G. B. Memoria sopra tre teorie più elementari della Geometria. *Genova, tip. de' Sordomuti.*

1848 [10] — Gottfried Wieszner. Vollständige Verwadlung des eilften Euklidischen Grundsatzes in einen gewöhnlichen Lehersatz. *Jena,* 1848, 8°.

15 p. con tav. di fig. Hoffmann, n° 62.

1849 [3] — Knorr E. — V. l' ELENCO CRONOLOGICO.

1850 [1] — Hill C. J. — V. l' ELENCO CRONOLOGICO.

1850 [6] — Bouniakowsky *Victor-Jacob.* Nouvelle théorie des paralléles. *Saint-Pétersbourg.*

1851 [1] — Elementi ec. — V. l'Elenco cronologico.

1851 [8] — Bolyai W. Kurzer Grundriss eines Versuchs. I. Die *Arithmetik* ec. II. In der *Geometrie* ec.

(Breve esposizione di un saggio: I per presentare l'*Aritmetica* in modo evidente ecc. II. In Geometria, non solamente per determinare con precisione le nozioni della linea retta, del piano, dell' angolo in generale ecc., ma anche per dimostrare la loro esistenza nello spazio ecc.) *Maros Vásarhely,* 1851.
V. Forti, *intorno alla vita* ecc. (1868 [14]).

1852 [10] — Nuova e semplice dimostrazione del principio fondamentale delle parallele, corrispondente all'esatta nozione di tali rette date da Euclide. (V. Flauti ?).

Atti della R. Ac. di Napoli, vol. VI. — *Mem. Clas. mat.,* 1852, p. 1.

1853 [1] — Elementi ec. V. Elenco cronologico.

1853 [9] — Hennessy John Pope — V. Elenco cronologico.

1853 [16] — Bouniakowsky *Victor-Jacob.* Lignes paralléles. *Saint-Pétersbourg.*

1855 [8] — Lobatschewsky N. Pangéométrie, ou précis de Géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des Paralléles. *Kasan.*

1856 [5] — Ex Procli ec. — V. l' Elenco cronologico.

1856 [6] — Serret Paul. Des méthodes en géométrie. *Paris,* 1856, 8°.

1856 [7] — Chasles M. Rémarque à l'occasion d'une note de M. Vincent sur la théorie des paralléles.

Comptes rendus, t. XLII, 1856, p. 1114 e 1240.

1857 [4] — Sur un point de l'histoire de la géométrie chez les Grecs et sur les principes philosophiques de cette science. *Paris,* 8°.

1857 [5] — Note de M. Th. H. Martin sur la théorie des paralléles à l'occasion d'une mémoire de M. Vincent.

Jour. gèn. de l' instruction pubblique, 1857, 8°.

1858 [6] — Nouvelle théorie des parallèles... par C. Beck.

Premessa ad una contraffazione Belga del Legendre. *L'avertissement* è datato da Verviers, 10 Giugno 1858.

1858 [7] — Bordoni A. Sul parallelismo.

Atti del *R. Ist. Lombardo,* an.° d.°.

1859 [4] — Hoffmann J. J. I. — V. l'ELENCO CRONOLOGICO.

1860 [12] — Delboeuf I. Prolegoménes philosophiques de la géométrie, et solution des POSTULATUM. *Liege,* 8°.

1861 [5] — Collignon *Romain-Charles-Edouard.* Essai sur la théorie des parallèles. *Saint-Pétersbourg, Quesneville,* 1861.

Citato nel *Dictionnaire* di De Gubernatis.

1862 [6] — Untersuchungen ec. V. l'ELENCO CRONOLOGICO.

1863 [3] — Hoüel J. — V. più oltre sotto la data del 1867[1].

1864 [3] — Théorie des parallèles par M. Laurent ec. *Clermont-Ferrand, Mont-Luis,* an.° d.°

1866 [6] — Études géométriques sur la théorie des parallèles par N. S. Lobatschewsky ec. traduit de l'Allemand par J. Hoüel ec. et suivi d'un extrait de la correspondance de Gauss et de Schumacher. *Paris, Gauthier-Villars.*

Era già stato inserito nelle *Mém. de la soc. de sciences de Bordeaux,* t. IV, 1866.

1867 [1] — Hoüel J. — V. l'ELENCO CRONOLOGICO.

Parte del contenuto di codesto scritto era stato pubblicato nell' *Archiv. der Math.* di Grunert, an. 1863, col titolo: *Essai d'une exposition rationnelle des principes fondamentaux de la géométrie élémentaire. Par M.* J. Hoüel.

1867 [8] ★ — Lobatschewsky N. Pangeometria o sunto di geometria fondata sopra una teoria generale e rigorosa delle parallele. *Napoli,* 1867, 8°.

La 2ª ediz. è di *Napoli,* 1874, 8°.

1867 [9] — Intorno alla geometria immaginaria, o non Euclidiana. Considerazioni storico-critiche del Prof. Angelo Forti. *Bologna, tip. Fava e Garagnani,* 8°.

(Est. dalla *Rivista bolognese,* vol. 2°; e ristampata con aggiunte nel giornale: *La Provincia di Pisa,* an. 1867, n.° 25 e seg. col titolo: *Studi geometrici sulla teorica delle parallele di N. J. Lobatschewsky.*

Questa e le altre memorie sui principj della nuova geometria, vengono citate come le più interessanti per gli studj comparativi fra la geometria Euclidea e la Non-Euclidea.

1867 [10] — Battaglini Giuseppe. Sulla geometria immaginaria di Lobastchewski.

(Gior. di mat., Napoli, vol. V, an° d°).
Una traduzione francese di questo scritto, intitolato: *Sur la Géométrie imaginaire de Lobatchewsky, par M. G. Battaglini,* trovasi nei *Nouv. an. de math.* di M. Gerono, 1868.

1868 [2] — Il quinto Postulato ec. — V. l'ELENCO CRONOLOGICO.

1868 [9] — Wilson I. M. Euclide ec. — V. le precedenti AGGIUNTE.

1868 [10] — Parole del prof. Hirst ec. — V. le precedenti AGGIUNTE.

1868 [11] — Bolyai G. Sulla scienza dello spazio assolutamente vera, ed indipendente dalla verità o dalla falsità dell'assioma XI di Euclide. (Trad. dal Battaglini).

(*Gior. di matem.,* vol. VI, p. 97, an. 1868). Estr. dall' opera « *Tentamen Juventutem studiosam* » ecc. Maros Vasarheli, 1832.

1868 [12] — Beltrami E. Saggio d'interpretazione della Geometria Non-Euclidea.

Gior. di mat. vol. VI, p. 284, an. 1868.
Tradotto da Hoüel ed inserito negli *Annales scientifiques de l' Ecole normale supérieure,* t. VI, 1870.

1868 [13] — Helmotz. Des faits qui servent de base à la Géométrie.

(*Nachrichten von d. Kön.* G. Göttingen, Juin, 1868).
Cita la seguente:
Des hypothêses qui servent de base á la Géométrie.
(*Abhandl. der Königl. Gesell.,* Gottingen, B. XIII).

1868 [14] — La science absolue de l'espace, indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'Axiome XI d'Euclide que l'on ne pourra jamais établir *a priori:* suivie de la quadrature géométrique du cercle, dans le cas de la fausseté de l'Axiome XI. Par Jean Bolyai ec. Précédé d'une notice sur la vie et les travaux de W. et de J. Bolyai, par M. Fr. Schmidt. *Paris, Gauthier-Villars,* 1868, 8°.

Era già stato inserito nell' *Archiv. der math. und phys.* di Grunert, an. 1868; col titolo: *Aus dem Leben zweier ungarischer Mathematiker Johann und Wolfgang Bolyai von Bolya. Von Herrn Franz Schmidt in Temesvár.* E tradotto in francese, ed inserito nelle *Mém. de la Soc. de science de Bordeaux,* t. V, an. 1868.
Le principali notizie biografiche contenutevi, sono riportate nell' importante nota del Prof. Angelo Forti:
Intorno alla vita ed agli scritti di Wolfgang e Giovanni Bolyai di Bolya matematici ungheresi. *Roma, tip. delle scienze mat. e fis.,* 1868, 8°.

(Estr. dal *Bul.* del Boncompagni, t. I, set. 1868.

Nel 1° vol. dell' opera di Bolyai: *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos* ecc. *introducendi* (Maros Vásárhelyini, 1832), si contiene fra gli altri scritti:

Generalis conspectus geometriæ.

Appendix. Scientiam spatii absolute veram exhibens a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) indipendentem. Adjecta ecc. *Auctore Johanne Bolyai* ecc.

1869 [1] — Demonstratio ec. — V. l' ELENCO CRONOLOGICO.

1869 [4] — Genocchi A. — V. l' ELENCO CRONOLOGICO.

1869 [6] — (Nel *Gior. di Mat.* di Battaglini, di d.° an.° Vol. VII, veggasi l'estratto di una lettera di Hoüel al Redattore, ed una lettera di Brioschi a Cremona).

1869 [7] — Del piano, sua definizione, assioma del piano elevato a teorema, pel Dott. Valeriano Valeriani.

Gior. di matem., vol. VII, 1869, p. 376.

1869 [8] — Bertrand. Rapport sur un Mémoire de M. Carton.

(*Comptes rendus,* an° d° II par. p. 1265).

1870 [3] — Hoüel I. — V. l' ELENCO CRONOLOGICO.

1870 [4] — Sugl' Elementi ec. — *Ibid.*

1870 [6] — Flye Saint-Marie — *Ibid.*

1870 [7] — Lionnet F. J. — *Ibid.*

1870 [14] — Mansion. Sur le premier livre de la géométrie de Legendre à propos de quelques traités récents. (*Révue de l' instr. pub.*, 1870, p. 317).

1870 [15] — Helmotz. Les axiomes de la Géométrie. *Révue des cours scientifiques,* VII an., 1870, p. 498.

1870 [16] — Kober J. Ueber die definition des parallelismus.

Zeits. für Math. und Naturw., 1870, p. 491.

1871 [10] — V. nel *Gior. di mat.* (vol, IX, p. 180) il discorso del prof. Hirst, sopra Euclide, come libro di testo. Vi è citata l' opera del Rev. D. Jones « *On the Unsuitableness* (?) *of Euclid as a Text-Book on a Geometry* ». London.

1871 [11] — Études analytiques sur la théorie des paralléles par Flye S.te Marie. *Paris, Gauthier-Villars.*

1871 [12] — Transon ab. De l'infini, ou méthaphysique et géométrie à l'occasion d'une pseudo-géométrie. *Hevreux, Hérissey.*

1871 [13] — Klein F. Ueber die sogenannt nicht Euklidische Geometrie.

(Clebsch-Neumann an. 1871, p. 573).
(Id. Zwates Autsatz, 1873, p. 113).

1871 [14] — Antonelli G. Saggio di ideologia geometrica.

Fa parte del suo libro intitolato: *Di alcuni studi speciali risguardanti la Metereologia, la Geometria, la Geodesia e la Divina Commedia* ecc. Firenze, tip. Calasanziana, 8°.

1871 [15] — Lamarle M. E. Sur la géométrie sans postulat et sur la théories des paralléles.

Bul. de l' Ac. R. de Belgique, 1871, p. 567.

1871 [16] — Ueber die Hypothese der Parallelentheorie. (Baltzer R.).

Jour. für diè Reine Angew. Math., Juli 1871, p. 372.

1872 [2] — Cipolla Francesco — V. l' ELENCO CRONOLOGICO.

1872 [3] — Saleta F. Exposé sommaire ec. — V. l' ELENCO CRONOLOGICO.

1872 [7] — Cassani Prof. Pietro. Geometria rigorosa ec. *Venezia.*

1873 [4] — Procli Diadochi ec. — V. l' ELENCO CRONOLOGICO.

1873 [10] — Purgotti S. Alcuni cenni ec. — *Ibid.*

1873 [11] — Cassani Pietro. Intorno alle ipotesi fondamentali della geometria, studio ec.

Gior. di mat. di Battaglini, t. XI, an. 1873, p. 333.
Cita lo Schláfli « Del nesso che vige fra l' analisi e l' intuizione geometrica » (*Resoconti dell' Ist. Lombardo,* feb. 1872).

1874 [19] — Rossetti Giuseppe. Delle parallele, memoria ec. *Napoli, Fibreno,* 1874, 8.°, p. 32.

1875 [10] — Falk. Försöch till en teori för parallela linier. *Upsala.*

Indicatami dall' Eneström.

1875 [11] — La théorie des paralléles selon les géométres Japonais. (Claudel). *Bruxelles,* 1875, 8°.

P. 20 e tav. V. il *Zeitsch. für Math. und Phys.,* Marz 1875.

1876 [11] — Günther S. Sulla possibilità di dimostrare l'assioma delle parallele mediante considerazioni stereometriche. Complemento alla Geometria assoluta di Bolyai. Traduzione dal tedesco di A. Sparagna.

(Nel *Gior. di mat.* di Battaglini t. XIV, an. 1876, p. 97).

Il Günther vi cita fra l' altre le seguenti pubblicazioni:

Riemann. Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu grunde liegen (R. Soc. di scienze di Gottinga, 1868).

Sturm. Die neuere Geometrie auf der Schule. (Gior. di Hoffmann per l' insegnamento matematico, 1° an., p. 486).

Kober. Ueber die Definition des Parallelismus (Ibid. p. 491).

Grassmann. Die lineale Ausdehnungslehere, ein neuer Zweig der mathematik. *Stettino,* 1871.

Schening. Die Schwerkraft in Gauss' schen Raume. (*Mem. della R. Soc.,* Luglio 1870).

Klein F. Verglechende Betrachlungen über neuere Geometrische Forschungen. *Erlangen,* 1872.

Baltzer. Ueber die Hypothese der Parallelentheorie. (Gior. di Crelle, vol. 73).

Fischer. Lehrbuch der Planimetrie, ed.Th. Schröder. *Norimberga* ,1874.

Worpitsky. Ueber die Grundbegriffe der Geometrie. (Arc. d. mat., 553).

Germach. Die Wichligkert einer richtigen Aufassung von Thibaut's Beweis ec., und besonders für die Theorie der Parallelen.

Arch. der Math. und Phys., 15 Band, § 361.

1876 [12] — Elemente der absoluten Geometrie von D. I. Frischauf. *Leipzig, Teubner.*

1876 [13] — Der Thibaut's Beweis für das elfte Axiom historisch und Kritisch erörtert.

Programm zur Scholssfeier des Jahres 1876-77 an der nöniglichen Studieranstalt zu Ansbach von Dr. Siegmund Günther ec. *Druck von G. Brügel und Sohn in Ansbach.*

1876 [14] — Lüroth I. Ueber Bertrand's Beweis der Parallelen axioms.

Zeits. für Math. und Phys., Juli 1876, p. 294.

1877 [8] — Erdmann. Die Axiome der Geometrie. Eine philosophische Untersuchung der Riemann-Helmhotzschen Raumtheorie. *Leipzig,* 1877.

1877 [9] — Cassani Pietro. Nuove proposte intorno ai fondamenti della Geometria.

Gior. di mat. di Battaglini, Vol. XV, an. 1877, p. 284.

1877 [10] — De Zolt Antonio. Saggio di Pangeometria. *Ibid., id.* p. 336.

1877 [11] — Genocchi A. Sur un mémoire de Daviet de Foncenex et sur les géométres non Euclidiennes. *Turin, Imp. R.,* 1877, 4°, p. 42 ed 1 tav.

1877 [12] — Zum Repertorium Mathematik. (Bearb. V. Dr. S. Gunther. Fortsetzung von VII 408. (Das Waher Fundament der Parallelentheorie).

Zeitsch. für Math. und Natursw., 1777, Lit. Ber., p. 169.

1878 [4] — Conti Ernesto. Dimostrazione rigorosa delle proprietà delle parallele ec. *Torino, Paravia,* 1878, 8°, p. 12 ed 1 tav.

1878 [5] — Fiedler G. Sulla riforma dell' insegnamento geometrico.

Gior. di mat., vol. XVI, 1878, p. 243. (Trad. di G. Torelli).

1879 [10] — Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la Méchanique par I. M. de Tilly. *Bordeaux.*

1879 [11] — Fleury. Le calcul infinitesimal fondé sur des principes rationnels. *Marseille, Camoin,* 8°.

V. a p. 45 ove tratta delle parallele.
Cita uno scritto intitolato: *Gèometrie affranchie du Postulatum d' Euclide,* e l' *Exposé de vrais principes des mathématiques di* Coyteaux.

1879 [12] — Ruffolo Francesco. Dimostrazione del XII°. Assioma di Euclide. *Pavia, G. Morelli,* 1879, p. 12, 8°.

1879 [13] — De Rossi Vincenzo. Dimostrazione del quinto Postulato d' Euclide, nota ec. *Roma tip. delle sc. mat.*, 4°.

(*Atti dell' Ac. de' nuovi Lincei,* an. XXXI, 1878).
V. in proposito l' art. del Genocchi, nel *Bollettino* del Boncompagni, t. XII, 1879, p. 812; ed i *Nouv. Ann. de math.*, sept. 1879.

1880 [11] — Gauss. Werke, Band IV. (*Gottingae,* 1880, p. 364). Circa duo opuscula ec.

Sono i due opuscoli dello Schwab e del Metternich, sopra notati.
Id., ibid., p. 368. Esame dell' opuscolo del Müller, sopra notato.
Qnesti articoli del Gauss erano stati pubblicati nel periodico « Göttingisches gelehrt Anzeigen » del 1816 e del 1822.

1881 [4] — Taylor T. S. — V. l' ELENCO CRONOLOGICO.

1881 [7] — Majer Ludwig — *Ibid.*

1883 [1] — Essai critique ec. — *Ibid.*

1883 [5] — Cavezzali A. — *Ibid.*

1883 [12] — Les incertitudes de la géométrie par I. Carbonelle S. J. *Bruxelles, Vromant.*

(Est. dalla *Revue des questions scientifiques,* 1883).

1883 [13] — Strona Eligio. Dimostrazione della teoria delle parallele. *Roma, tip. della Pace,* 1883, 16°, p. 24.

1883 [14] — Complemento della teoria delle perpendicolari e delle oblique — La somma degl' angoli di un triangolo indipendente dalle nozioni delle parallele e della circonferenza — Teoria completa delle rette parallele — L' XI Assioma di Euclide e Postulato V di Campano — Dimostrazioni scientificamente rigorose di Giulio Agolini Ugolini. *Novara, tip. della Riv. di Contabilità,* 1883, 8°, p. 32.

1885 [3] — Dechamps J. — V. l' ELENCO CRONOLOGICO.

1885 [8]* — Cassani Pietro — Ibid.

1885 [12] — Killing. Die nicht Euclidischen Formen. *Leipzig.*

Mi si afferma esservi contenuta una bibliografia concernente il Postulato Euclideo.
Veggo pure citata su questo argomento una nota inserita nell' *American Journal,* t. II, ed una memoria di Victor Schlegel inserita nel periodico: *Kais. Leopold.-Carolin. Deuts. Akad. des Naturfors.* Halle, 1886, 2 Heft.

1885 [13] — Lettera del P. Giovanni Egidi al P. Stanislao Ferrari (senza indicazioni tipografiche).

Opus. di 8 p. in 8° intorno alle parallele.

1885 [14] — Cassani Pietro. Geometria pura Euclidiana ad *n* dimensioni.

Gior. di mat. di Battaglini, vol. XXIII, an. 1885, p. 1.

1885 [15] — Galimberti G. B. Teoria delle rette parallele. *Treviglio, stab. soc. tip.,* 1885, 8°, p. 20.

1886 [16] — Bettazzi Rodolfo. I postulati e gli enti geometrici. *Period. di mat.,* an. I, 1886, p. 170.

1886 [17] — Aschieri F. Sullo spazio delle sfere Euclidee. *Rend. dell' Ist. Lomb.,* ser. II, vol. XIX, 1886, p. 355, 416 e 449.

1887 [2] — Tannery P. Sur l'authenticité ec. V. le precedenti AGGIUNTE.

SULLA CONVEZIONE FOTOELETTRICA

E SU ALTRI

FENOMENI ELETTRICI NELL' ARIA RAREFATTA

MEMORIA

DEL PROFESSORE AUGUSTO RIGHI

(CON UNA TAVOLA)

(Letta nella Seduta delli 27 Aprile 1890).

INTRODUZIONE

1. Nelle ultime linee di una precedente Nota sulla *Convezione elettrica* (1) espressi il proposito di studiare se e come si modificano le traiettorie percorse dalle particelle elettrizzate, rarefacendo il gas entro il quale il fenomeno si produce. Siccome, secondo ogni probabilità, la convezione fotoelettrica, la dispersione prodotta da una punta carica, e quella che ha luogo dalla superficie d' un corpo rovente, sono fenomeni della stessa natura meccanica, così potevo scegliere fra questi fenomeni quello che meglio si prestasse alla ricerca, e per vari motivi ho dato la preferenza al fenomeno fotoelettrico. Perciò la presente Memoria potrebbe considerarsi come un seguito alle tre precedentemente pubblicate su questo argomento (2).

A scopo di chiarezza richiamerò ancora certe elementarissime considerazioni fatte altravolta circa il moto di una particella elettrizzata (3), applicandole qui specialmeute ad un caso particolare che è precisamente quello che si può più facilmente realizzare nelle esperienze.

Si abbia un cilindro conduttore indefinito elettrizzato C ed un piano conduttore indefinito P ad esso parallelo e mantenuto al potenziale zero (fig. 1). Le linee di forza di un tal sistema giaciono evidentemente in piani

(1) Rend. della R. Acc. dei Lincei, 2 Marzo 1890.

(2) *Sui fenomeni elettrici provocati dalle radiazioni.* — Acc. R. di Bologna, 11 Novembre 1888; N. Cimento 1888.

Id. II. Memoria. — Atti del R. Ist. Ven. tom. VII, serie VI; N. Cimento 1889.

Id. III. Memoria. — Atti del R. Ist. Ven. tom. VII, serie VI; N. Cimento 1890.

(3) *Le ombre elettriche,* II. Memoria. — Acc. R. di Bologna, serie IV, tom. III, pag. 461.

perpendicolari all'asse del cilindro. In uno qualunque di questi piani, p. es. il piano di figura, quelle linee sono archi di cerchio aventi il centro sulla traccia P del piano conduttore, e passanti pel punto A della perpendicolare OB abbassata dalla traccia O dell'asse del cilindro sulla traccia P del piano, il quale punto A dista da B di una quantità $AB = \sqrt{d^2 - R^2}$, dicendo R il raggio del cilindro e ponendo $d = OB$.

Sia M un punto del cilindro ed MN la linea di forza per esso passante. Se una particella viene posta in M ed abbandonata a sè stessa senza velocità iniziale, essa prenderà dal cilindro una certa carica e sarà da esso respinta. Facendo astrazione da ogni resistenza passiva e dalla gravità, la particella percorrerà una certa traiettoria che non si sa determinare, ma che per ragione di simmetria sarà compresa nel piano di figura, e che certamente giacerà fra la linea di forza MN e la normale OM prolungata. Se una causa estranea qualunque toglie continuamente alla particella in moto parte della sua velocità, la traiettoria muterà e diverrà meno differente dalla linea di forza. Delle polveri leggiere elettrizzate si muovono appunto in un campo elettrico sensibilmente secondo le linee di forza, in causa della resistenza dell'aria, e possono produrre delle ombre elettriche ecc. [1].

Benchè non si conosca la traiettoria percorsa da una particella elettrizzata in un campo elettrico, pure è facile persuadersi che, supponendo sempre la particella abbandonata a sè stessa senza velocità iniziale, la detta traiettoria non cambia, se si cambia la massa m della particella o la sua carica e, come pure se si fa variare in un rapporto costante il potenziale di ogni punto del sistema elettrizzato (a). Le traiettorie delle varie particelle abbandonate nei vari punti d' un conduttore carico, costituiscono dunque un sistema di linee fisse per ogni dato sistema di linee

---

(1) V. la II. Memoria: *Sulle ombre elettriche*, pag. 488.

(a) Siano XYZ le componenti della forza elettrica che agisce sulla particella per ogni unità di carica. Le equazioni del moto saranno:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = eX, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = eY, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = eZ$$

(Vedi la nota alla pag. 470 della II. Memoria: *Sulle ombre elettriche*). Se si pone $t = \theta\sqrt{\frac{m}{e}}$, essendo θ una nuova variabile indipendente, esse divengono: $\frac{d^2x}{d\theta^2} = X$ ecc. L'eliminazione di θ fra queste equazioni condurrà a quelle della traiettoria; ma eliminando θ restano eliminate, non solo t, ma anche m ed e. Dunque la traiettoria non varia se si cambiano m ed e.

Se poi il potenziale in ogni punto viene variato nel rapporto k, le componenti della forza diverranno kX, kY, kZ, e ponendo $t = \theta\sqrt{\frac{m}{ek}}$ le equazioni del moto assumeranno la solita forma $\frac{d^2x}{d\theta^2} = X$ ecc. Eliminando θ fra esse si fa sparire anche k. Dunque la traiettoria non muta neppure in questo caso.

di forza. La massa e la carica della particella, ed il valore del potenziale nei vari punti del campo, influiscono solo sulla velocità con cui ogni particella percorre la sua traiettoria, ed anzi la velocità v che la particella, partita senza velocità da un punto ove il potenziale è V_o, possiede allorchè arriva in un punto della traiettoria ove il potenziale è V, si dedurrà dalla equazione $\frac{1}{2} mv^2 = e(V_o - V)$.

Si vede quindi che lasciando costanti i potenziali, questa velocità varia proporzionalmente a $\sqrt{\frac{e}{m}}$, mentre che se la particella resta la stessa, ma si fanno variare in un rapporto costante k i potenziali e la carica e, la velocità varia pure nello stesso rapporto.

Quest' ultimo caso è precisamente quello che si verifica se si muta il potenziale V_o del cilindro C (fig. 1) dalla superficie del quale supponiamo partire la particella, giacchè varierà nello stesso rapporto il potenziale in ogni punto del campo, come pure la carica e che prende la particella dal cilindro prima d' esserne respinta. Dunque se si caricherà il cilindro ad un potenziale più o meno elevato, non si otterrà alcuna modificazione nella traiettoria percorsa dalla particella, ma solo si farà muovere quest' ultima con velocità più o meno grande in proporzione.

Tutto ciò vale per una particella libera completamente. Ma se esistono cause che sottraggano velocità alla particella, la sua traiettoria rimane mutata. In tal caso la semplice variazione del potenziale del cilindro potrà avere per conseguenza un cambiamento di traiettoria, come appunto si vedrà in seguito.

Le numerose e svariate esperienze, relative alla convezione elettrica, da me descritte per l' addietro, mostrano che nei casi ordinari vi sono cause che tanto sottraggono velocità alle particelle in moto, che queste seguono sensibilmente le linee di forza. Fra le altre, quelle esperienze nelle quali si fa uso delle polveri elettroscopiche (come quelle descritte nelle due Memorie: *Sulle ombre elettriche*, nella II. Memoria: *Sui fenomeni elettrici delle radiazioni,* e nella Nota citata in principio di questo scritto) sono le più parlanti. Posso quindi ammettere d' avere dimostrato in modo completo quella modalità del fenomeno di convezione; ma restano a studiare i casi nei quali non avviene quella continua perdita di velocità delle particelle in moto, e resta a sapersi qual sia la natura di queste.

2. Nelle mie precedenti pubblicazioni ho lasciato trasparire più o meno la convinzione che le stesse molecole del gas ambiente possano produrre la convezione elettrica. Questa opinione fu da me formulata nettamente nelle Memorie sulle ombre elettriche; ma ricerche pubblicate dopo, relative agli effetti che possono ascriversi alle particelle staccate dai condut-

tori o al pulviscolo sospeso nell' atmosfera, possono autorizzare ragionevolmente pareri diversi, e per conto mio non mi rifiuterò ad ammettere, qualora se ne forniscano le relative prove, che, nello stesso modo che a formare una scintilla elettrica concorrono generalmente tanto le particelle strappate dagli elettrodi quanto le molecole del gas ambiente (come risulta dall' esame spettroscopico), così anche nei vari casi di convezione possano prendere parte al fenomeno particelle metalliche e molecole del gas, con prevalenza delle une o delle altre a seconda dei casi.

Si vedrà più avanti per quali motivi, oltre a quelli accumulati nella III. Mem. sui fenomeni elettrici delle radiazioni, mi sembra giustificata la opinione, che la convezione fotoelettrica sia operata prevalentemente dalle molecole gassose (*a*).

Cerchiamo ad ogni modo di renderci conto del meccanismo della convezione elettrica, tanto nella ipotesi ammessa, che nell' ipotesi secondo la quale l' elettricità è trasportata da particelle staccate dagli elettrodi.

Se particelle materiali sono staccate dal metallo elettrizzato e da esso respinte, è chiaro che è la resistenza dell' aria nella quale devono muoversi che fa sì che esse percorrano sensibilmente le linee di forza. Se l' aria viene gradatamente rarefatta, le traiettorie percorse devono differire di più in più dalle linee di forza, e quindi la particella partita da M (fig. 1) deve colpire il piano P, non più in N, ma in punti di più in più lontani da B. I fenomeni prodotti dal catodo nei tubi a gas estremamente rarefatto, sembrano anzi indicare che allora le traiettorie diversificano poco dalle normali al conduttore.

Se invece si ammette che il trasporto elettrico sia operato dalle molecole del gas, è meno facile spiegare come avvenga che il trasporto stesso si faccia seconde le linee di forza. Però, se si ritiene che sieno in opera forze elettriche tali da imprimere velocità assai grandi in confronto delle velocità molecolari, e se si tien conto dei frequentissimi urti reciproci fra le molecole, in causa dei quali la molecola partita da M ne urta ben presto una seconda cui cede parte della propria carica e della propria velocità, e poi le due molecole cariche e già meno veloci ne urtano altre, e così di seguito, si arriva a comprendere come in causa di questi urti, a partire da una piccola distanza dal conduttore, ogni particella debba muoversi press' a poco nella direzione della forza che ad ogni istante su di essa agisce, e quindi come l' elettricità sia in complesso trasportata sensibilmente secondo le linee di forza.

(*a*) Secondo le esperienze di Nahrwold ed altri sembra che nei casi ordinari di dispersione d'elettricità, questa venga trasportata principalmente dal pulviscolo atmosferico o da altre simili particelle sospese nell' aria. Ciò non dimostra che sia impossibile il trasporto dell' elettricità per opera delle molecole gassose, e perciò non si possono citare quelle esperienze a guisa di obbiezione alla mia ipotesi.

Quando poi l' aria viene gradatamente rarefatta, gli urti divengono via via meno frequenti; si comprende certo che il trasporto dell'elettricità non puó più avvenire secondo le linee di forza, ma é difficile prevedere ciò che dovrà accadere in generale. Non cosi in un caso particolare limite, quello cioé del gas estremamente rarefatto e di un conduttore cosi debolmente carico che le velocità dovute alle forze elettriche sieno trascurabili di fronte alle velocità termiche. In questo caso le molecole continuano a muoversi quasi come se le cariche elettriche non esistessero, e dell'elettricità ne sarà trasportata in ogni direzione. Cosi, nel caso della figura 1ª, le molecole elettrizzate che partono da M potranno giungere direttamente, non solo in N, ma in ogni altra parte del piano P da cui M sia visibile.

Quando poi, il gas pur essendo estremamente rarefatto, il potenziale del conduttore C non è più piccolissimo, le velocità dovute alle forze elettriche diverranno comparabili alle velocità termiche od anche le supereranno, ed ogni molecola che parte da M andrà a colpire il piano P in un punto più lontano da B del punto in cui lo colpirebbe se le forze stesse non esistessero.

Le prime delle esperienze descritte in questa Memoria tendono appunto a stabilire come si modifichino le linee percorse nella convezione elettrica, al diminuire della pressione dell' aria ambiente. In queste esperienze la convezione ha luogo a partire da una generatrice M di un cilindro C (fig. 1), mentre l'elettricità trasportata è raccolta da un elettrometro posto successivamente in comunicazione con varie porzioni lineari del piano P. I risultati di queste esperienze sono esposti nel cap. II.

Nel corso di queste ricerche notai certi fenomeni che m' indussero a misurare ciò che chiamo *coefficiente di dispersione fotoelettrica* (v. cap. III), come pure a misurare in quale abbondanza passi l' elettricità da un conduttore ad un altro nell' aria rarefatta, all' infuori delle radiazioni. I risultati di queste misure hanno dato luogo ai cap. III e IV di questa Memoria.

Il cap. I. che ora segue, é destinato a far conoscere le disposizioni sperimentali impiegate in tali ricerche.

Cap. I. - **Descrizione degli apparecchi.**

3. Il principale degli apparecchi adoperati consiste in un bicchiere di cristallo nel quale sono stati fatti due fori, l' uno A nel fondo ed un po' eccentrico, l' altro B nella parete cilindrica (vedi fig. 2. e 3., delle quali la prima mostra l' apparecchio visto d' alto in basso, e l' altra visto in direzione orizzontale). In corrispondenza a questi fori sono fissati con un mastice (miscuglio di gomma lacca e trementina) dei tubi metallici *ab*,

cd, terminati da larghi anelli per assicurare l' aderenza al vetro, ed entro i quali sono fissati collo stesso mastice dei tubi di vetro *C* e *D* che descriverò in appresso. Un anello d' ottone *EF* è similmente fissato alla bocca del bicchiere. Sulla parte piana anullare di esso si applica poi il disco di quarzo *GG* (di 8 c. di diametro e 0,8 di spessore) per mezzo di un mastice assai fusibile (miscuglio di cera vergine con un po' di colofonia). La buona tenuta dell' apparecchio è assicurata da due scatole cilindriche di cartone *ee, hh,* incollate sul vetro, che circondano i tubi *ab* e *cd,* e che si riempiono di mercurio. Non trovai conveniente di applicare una simile chiusura a mercurio anche all' anello *EF* ed al quarzo *G*.

Entro il bicchiere trovansi due conduttori, e cioè il cilindro metallico verticale *H* (o qualche volta invece di questo una lastra piana di zinco), e la lastra metallica piana e verticale *IL*.

Il cilindro *H* ha un centimetro di diametro, e porta lungo una generatrice un profondo taglio largo quasi un millimetro, entro il quale viene collocata una lastrina di zinco che si può facilmente levare e rimettere, e che una volta a posto completa il cilindro. Essendo questo verniciato, mentre la striscia di zinco è pulita perfettamente prima di ogni esperienza, accadrà che le radiazioni, le quali passando pel quarzo giungono al cilindro, determinano la convezione fotoelettrica solo a partire dalla striscia di zinco. Il detto cilindro è poi sostenuto da un' asticella d' ottone fissata entro il tubo di vetro *M*. Questo tubo, di cui una porzione conica è lavorata a robinetto, passa entro il tubo *C* citato più sopra e lo chiude. È possibile così far girare il cilindro intorno al proprio asse anche quando è fatto il vuoto nel bicchiere, senza che sia compromessa la tenuta, specialmente in virtù dell' allargamento ad imbuto col quale termina in alto il tubo *C,* il quale vien riempito di mercurio. Al di sopra di questo allargamento è fissato un disco graduato orizzontale (non rappresentato nella figura); esso serve a misurare approssimativamente la rotazione che si può far subire al cilindro, come pure a riconoscere verso qual parte è rivolta la generatrice di zinco, giacchè il disco è collocato in modo che lo zero della graduazione indica che la striscia di zinco è rivolta verso la lastra *IL*.

La lastra piana *IL* è d' ottone, ed è fissata sopra un prolungamento apposito dell' anello *EF*; essa dista 1, 5 c. dall' asse del cilindro *H*. Presso i lati orizzontali di essa sono praticati venti piccoli fori, dieci sopra e dieci sotto, riempiti con altrettanti cilindretti d' ebanite, i quali, dalla parte rivolta al cilindro, sporgono appena sul piano della lastra. Ad ogni cilindretto d' ebanite che si trova presso il lembo superiore della lastra, ne corrisponde verticalmente al disotto uno che si trova presso il lembo inferiore. Fra essi è teso un sottile filo d' ottone che passa attraverso due forellini praticati nell' ebanite, e le cui estremità sono fissate dalla parte posteriore.

Si hanno così dieci fili d'ottone verticali ed equidistanti, che distano dalla lastra *IL* solo d'una piccolissima frazione di millimetro, ma perfettamente isolati. Il primo di questi fili f_1 occupa la posizione della proiezione dell'asse del cilindro *H* sulla lastra *IL*; gli altri nove f_2, $f_3 \ldots . f_{10}$ lo seguono verso sinistra od intervalli di 0. 5 c. l'uno dall'altro. Essi possono praticamente considerarsi come sottili striscie della lastra, parallele al cilindro e isolate dal resto della lastra.

Il tubo *D* serve per avere all'esterno le comunicazioni ai dieci fili, e in pari tempo, per mezzo di un ramo laterale *N*, per mettere il recipiente in comunicazione colla pompa a mercurio che deve farvi il vuoto. Questo tubo *D* è chiuso all'estremità esterna, ma porta al disotto dieci diramazioni, attraverso le estremità chiuse delle quali sono saldati altrettanti fili di platino $g_1, g_2 \ldots . g_{10}$. Questi fili di platino comunicano ordinatamente coi dieci fili $f_1, f_2 \ldots . f_{10}$ per mezzo di dieci fili di rame coperti di guttapercha. La superficie esterna delle dieci diramazioni laterali del tubo *D* è rivestita di gomma lacca fusa, allo scopo che i fili sieno ben isolati anche se l'aria esterna non è secca.

Siccome uno per volta i fili $f_1 \ldots . f_{10}$ devono essere messi in comunicazione coll'elettrometro, mentre gli altri nove, insieme alla lastra *IL*, devono rimanere in comunicazione col suolo, ho creduto comodo far uso d'uno speciale commutatore. Esso consiste in un bastone orizzontale d'ebanite *AB* (fig. 4) sul quale sono fissati dieci serrafili (di cui uno solo *C* è rappresentato nella figura), nel foro dei quali vengono fissate le estremità dei fili di platino del tubo *D*. Ogni serrafilo porta un pernio orizzontale intorno a cui gira una lastrina di rame della forma *EFGH*, cioè formata di un arco *EF* e di un manico rettilineo *GH*. Secondo la posizione che si dà a quest'ultimo, o l'estremità *E* dell'arco *EF* s'immerge nel mercurio contenuto in un lungo truogolo di rame *L* comunicante col suolo, mentre l'estremità *F* resta sollevata, oppure quest'ultima pesca nel truogolo *I* isolato e comunicante coll'elettrometro, mentre l'estremità *E* in tal caso resta lontana da *L*. Se tutti i dieci archi *EF* meno uno, hanno la loro estremità *E* immersa in *L*, mentre il decimo ha la sua estremità *F* immersa in *I*, il filo corrispondente a quest'ultimo arco sarà in comunicazione coll'elettrometro, e gli altri col suolo.

Oltre i dieci archi mobili descritti, il commutatore ne porta un altro sempre comunicante col suolo, la cui estremità libera può immergersi o no nel truogolo *I*. Esso serve a mettere al suolo l'elettrometro per trovarne lo zero.

4. Oltre a questo apparecchio ne ho costruiti altri per speciali esperienze. Uno di essi è formato pure da un bichiere di vetro, chiuso alla bocca col disco di quarzo, e con due fori *A, B* (fig. 5). Al primo è fissato

al solito modo un tubo di vetro che regge un' asta metallica terminata in un disco Z o in un conduttore d' altra forma, e che porta un ramo laterale C per la comunicazione colla pompa. Il foro B serve per avere all' esterno la comunicazione di un altro conduttore D di diverse forme a seconda dei casi. Questo conduttore D è portato da un anello di ferro sorretto da sei piccole carrucole fissate alle estremità di tre molle d'ottone saldate all' anello pel loro punto di mezzo. Con una elettrocalamita esterna al bicchiere si può così variare facilmente la distanza fra D e Z. Questa disposizione è dettagliatamente descritta altrove [1].

Infine, per alcune esperienze nelle quali non dovevano aver parte le radiazioni, adoperai un apparecchio tutto in vetro, della forma seguente. Ad un palloncino di vetro AB di 8 cent. di diametro, il cui collo C è internamente smerigliato in modo da poter essere chiuso con un tappo di vetro smerigliato D, sono saldati i tubi FG ed H, il primo dei quali ha il suo asse press' a poco nel prolungamento di quello del collo C. Il tappo D è cavo e si prolunga in un cannello E chiuso all' estremità, che serve a reggere un' asta metallica, all' estremità I della quale possono avvitarsi elettrodi di diverse forme. La comunicazione coll' asta si ha all' esterno per mezzo del filo di platino M saldato attraverso il vetro. Nel tubo FG si trova del pari un' asta metallica, al cui estremo L possono avvitarsi successivamente elettrodi diversi; ma quest' asta può scorrere liberamente entro il tubo. La distanza fra i due elettrodi si può quindi variare a piacere, inclinando e scuotendo leggermente l' apparecchio. La comunicazione con L dall' esterno si ha poi per mezzo d' un filo di platino N saldato nel vetro, e di una lunga e sottilissima elica metallica che lo connette all' asta.

Il tubo H, munito di rubinetto in vetro serve per la comunicazione colla pompa. Infine un filo di platino non visibile nella figura, saldato attraverso la parete, serve a mantenere in comunicazione col suolo lo strato d' argento col quale fu rivestita la superficie interna del palloncino.

5. Come sorgente delle radiazioni cominciai coll' adoperare la lampada a zinco; ma ben presto riconobbi la necessità di sacrificare l' intensità alla costanza, e feci uso sempre di poi dell' arco voltaico fra carboni. La lampada è chiusa in una cassetta o specie di lanterna, da un' apertura della quale, chiusa con un disco di quarzo simile a quello degli apparecchi descritti più sopra, escono le radiazioni.

L' intensità dei fenomeni fotoelettrici dati da un' ordinaria lampada ad arco dipende immensamente dalla lunghezza dell' arco stesso, crescendo rapidamente al crescere della distanza fra i due carboni. Per avere quindi un' intensità costante di radiazioni attive bisogna mantenere costante con

---

[1] V. la III. Mem.: *sui fenomeni elettrici delle radiazioni* § 20.

estrema cura la distanza dei due carboni. Il regolatore Serrin da me adoperato, quantunque ottimo nell' uso ordinario, non rispondeva bene allo scopo, per cui dovetti rassegnarmi a correggere a mano la posizione dei carboni del regolatore, quando ciò mostravasi necessario, ed a questo fine un' immagine molto ingrandita dei due carboni veniva proiettata con una lente convergente sopra una parete lontana. Dei tratti segnati sul muro indicavano le posizioni che dovevano occupare le immagini delle estremità dei carboni. Siccome quasi sempre l' azione delle radiazioni non doveva durare che 10 secondi per ogni misura, così cominciavo col mettere i carboni al loro posto regolandomi sull' immagine proiettata, poi alzavo lo sportello che scopriva il disco di quarzo. Per 10 secondi e certamente anche per un tempo alquanto maggiore, la distanza dei carboni, e quindi l'intensità delle radiazioni attive, non variava quasi mai in modo sensibile. Se qualche volta una variazione accadeva, la misura veniva ripetuta. La distanza fra i carboni fu mantenuta sempre di 4 millimetri. La corrente aveva intanto l'intensità di 8 Ampère.

6. Per rarefare l' aria nel recipiente contenente i metalli su cui cadevano le radiazioni, adoperai una macchina pneumatica di Alvergniat, formata da una Toepler riunita ad una Sprengel a tre tubi di caduta. Colla Toepler si faceva da prima il vuoto sino ad 1 o 2 millimetri; la Sprengel spingeva la rarefazione assai oltre, spesso a meno d' un millesimo di millimetro. Siccome l' apparecchio non era interamente formato con saldature di vetro, la rarefazione diminuiva qualche poco se si sospendeva l' azione della pompa, e quindi per le rarefazioni massime dovevo mantenerla in azione anche durante le misure. Poche volte però raggiunsi le rarefazioni del millesimo di millimetro, giacchè per ottenerle era necessario che l' apparecchio rimanesse da un giorno all' altro con un discreto vuoto, acciocchè si distaccasse il gas aderente alle pareti, prima di spingere la rarefazione sino al massimo limite.

Prima di rarefare l' aria ebbi sempre cura di riempire l' apparecchio con aria perfettamente secca.

La misura della pressione dell' aria venne fatta con un manometro del tipo Mac-Leod, munito di serbatoio mobile pel mercurio e costruito con molta cura. Invece di graduarlo nel solito modo, sul tubo sottile con cui termina il serbatoio dell' aria, vennero fatti solo tre segni. Ad uno di questi segni si conduce il livello del mercurio nell' atto di fare la misura della pressione. I volumi compresi fra i detti segni e l' estremità chiusa del tubo, come pure la capacità complessiva del serbatoio, furono esattamente misurati con pesate di mercurio, e così si potè esattamente, e non soltanto approssimativamente, calcolare, per ciascuno dei detti segni, il coefficiente pel quale devono moltiplicarsi le differenze di livello lette per avere la

pressione dell'aria. Tali coefficienti sono: 0,0257; 0,00623; 0,000718. Come si vede, colle letture fatte portando il livello del mercurio nell'ultimo tratto, si possono valutare con certezza i dieci millesimi di millimetro di pressione. Un tal grado di precisione era del resto superfluo per le attuali ricerche.

7. Non resta ora che a descrivere gli apparecchi di carica e di misura.

Per caricare il conduttore esposto alle radiazioni lo mettevo in comunicazione col polo negativo di una pila di Volta a rame-acqua-zinco, il cui polo positivo era in comunicazione col suolo. Il numero delle coppie della pila poteva variarsi a piacere, e spesso fu di seicento. La forza elettromotrice della pila, le cui lastre venivano spesso pulite a nuovo, era misurata ogni giorno coll'elettrometro prima e dopo delle altre misure, prendendo alcuni gruppi di 10 coppie per volta.

L'apparecchio di misura fu sempre un elettrometro modello Mascart, il cui sistema mobile fu però da me rifatto onde fosse estremamente leggiero. Una coppia di quadranti era in istabile comunicazione col suolo, mentre l'altra coppia comunicava col conduttore di cui si voleva misurare il potenziale, e cioè uno dei dieci fili dell'apparecchio delle fig. 2 e 3, o il filo dell'apparecchio fig. 5, o uno degli elettrodi dell'apparecchio fig. 6. L'ago mobile era mantenuto carico positivamente per mezzo di una pila separata di 20 a 200 coppie rame-acqua-zinco. Le deviazioni, lette con cannocchiale e scala, venivano ridotte in Volta per mezzo di una coppia campione Latimer-Clarke. Si leggeva più volte nel corso della giornata la deviazione elettrometrica prodotta dalla coppia campione, giacchè la forza elettromotrice della pila di carica dell'elettrometro poteva non poco variare col tempo.

Nelle misure fatte coll'uso delle radiazioni, si dava a queste libero accesso nell'apparecchio ove dovevano agire sollevando, per un tempo determinato, misurato da un orologio a secondi, uno schermo girevole intorno ad un asse orizzontale. Un istante prima di far ciò, il conduttore del quale volevasi misurare il potenziale, e che normalmente stava in comunicazione col suolo, veniva isolato. Fatta la lettura, si ristabiliva la comunicazione col suolo.

Siccome l'ago dell'elettrometro impiega alquanto tempo prima di fermarsi, accade certamente che durante questo tempo l'elettricità acquistata dal conduttore di cui vuol misurarsi il potenziale, in parte si disperde. Invece di aspettare che l'ago si fermasse, presi il partito di leggere gli estremi di tre successive oscillazioni. Così facendo non evitavo certo che in parte le perdite per dispersione; ma trattandosi di piccole differenze, e non avendo altro obbiettivo che di paragonare fra loro i potenziali ottenuti in diverse circostanze, ciò non costituiva un inconveniente grave.

Nel caso poi delle esperienze del cap. IV, nelle quali dovevo misurare il potenziale acquistato in un dato tempo da uno degli elettrodi *I* od *L* (fig. 6), mentre l' altro era mantenuto carico, questo metodo non era direttamente applicabile, giacchè durante il tempo in cui avrei fatto le tre letture, nuova elettricità sarebbe passata al certo dall' uno all' altro elettrodo. Fortunatamente nelle esperienze del cap. IV i valori da paragonare erano quasi sempre di grandezze estremamente differenti, e quindi la più grossolana approssimazione bastava a rendere evidenti i principali risultati. Mi contentai quindi di fare ancora le tre letture, procurando però che la prima precedesse il termine del tempo d' azione prefisso, circa di quanto l' ultima lettura lo oltrepassava.

Cap. II. - **Sulle traiettorie percorse nella convezione fotoelettrica a varie pressioni.**

8. Mantenuto ad un potenziale negativo costante il cilindro *H* dell' apparecchio fig. 3, ciascuno dei dieci fili $f_1 \ldots f_{10}$ veniva a sua volta messo in comunicazione coll' elettrometro per mezzo del commutatore fig. 4, e si facevano agire le radiazioni per un tempo determinato. La durata dell'azione della luce deve essere naturalmente la minima possibile, affinchè la carica che acquista il filo comunicante coll' elettrometro non modifichi sensibilmente il campo elettrico, e non agisca sensibilmente per ripulsione sulle particelle in moto. Una durata di 10 secondi fu trovata conveniente.

A ciascuno dei quadri seguenti sono premessi i valori di quelle delle quantità seguenti: θ, *V*, *P*, che si mantennero costanti. Con θ indico l' angolo che fa il piano passante per l' asse del cilindro e per la generatrice di zinco, col piano passante per l' asse medesimo e perpendicolare alla lastra *IL* (fig. 2 e 3). Con *V* indico il potenziale a cui è mantenuto il cilindro e con *P* la pressione dell' aria entro il recipiente.

Siccome non è rigorosamente nulla la convezione dalla superficie verniciata dal cilindro, e siccome inoltre qualche po' di elettricità può passare da esso ai fili della lastra anche all' infuori dell' azione della luce, così per ogni misura fu sottratto dalla deviazione osservata, quella che si ottenne ripetendo l' esperienza dopo aver girato il cilindro intorno al proprio asse finchè la generatrice di zinco restasse in ombra.

Tabella I. $\theta = 90°$, $V = -411$ Volta.

Numero d'ordine dei fili	Pressione dell' aria P.					
	760^{mm}	7,31	1,72	0,564	0,112	0,005
1	0,00	0,00	0,09	0,16	0,05	0,03
2	0,00	0,00	0,41	1,99	0,41	0,08
3	0,00	0,00	2,11	5,50	1,66	0,26
4	0,00	0,23	2,63	5,95	2,90	0,84
5	0,18	0,50	2,76	6,07	2,95	0,95
6	0,14	0,45	1,60	4,52	2,44	1,01
7	0,03	0,20	0,81	3,52	1,79	1,16
8	0,00	0,08	0,35	1,53	1,62	1,18
9	0,00	0,03	0,16	0,80	1,27	1,10
10	0,00	0,00	0,08	0,30	0,95	0,85

I numeri inscritti nelle colonne della tabella sono i potenziali raggiunti successivamente da ciascuno dei dieci fili, espressi in Volta (a). Altre serie di misure, che qui non riporto, diedero risultati simili, dai quali si ricava ciò che segue.

Alla pressione ordinaria dell' atmosfera l' elettricità che parte dalla generatrice di zinco (la quale, essendo qui $\theta = 90°$, è rivolta direttamente verso la sorgente delle radiazioni) è trasportata in una ristretta regione della lastra piana prossima al filo f_5. Ora, precisamente nel luogo occupato dal filo f_5 terminano le linee di forza che partono dalla striscia di zinco.

Rarefacendo l' aria sino a $7^{mm},31$ anche i fili f_4 ed f_8 raccolgono elettricità, rimanendo però al filo f_5 il massimo di carica. Alla pressione di $1^{mm},72$ tutti i fili raccolgono elettricità, e così pure alle successive pressioni inferiori; ma, eccettuato il caso della pressione più bassa, è sempre presso il filo f_5 che si raccoglie la carica piu forte.

Si manifesta una variazione nei risultati alla pressione di 5 millesimi di millimetro. Qui non è più il filo f_5 che raccoglie la massima carica, ma bensì il filo f_8. Questo allontanarsi delle particelle elettrizzate che partono dal cilindro, che ha luogo alle pressioni bassissime, si manifesta tanto meglio, quanto più alto è numericamente il potenziale del cilindro.

(a) Questi potenziali sono naturalmente tutti negativi; ho però ommesso per semplicità il segno — nelle tabelle.

Se questo ha una debole carica il fenomeno non ha più luogo in modo sensibile.

Questa influenza che ha, alle pressioni bassissime, il valore del potenziale del cilindro, risulta chiaramente dalle tabelle seguenti, nelle quali sono poste a confronto le deviazioni elettrometriche ottenute, dando potenziali di grandezze assai differenti al cilindro. Non avrei potuto oltrepassare di molto il più alto dei due potenziali senza che troppo si manifestasse una convezione elettrica dal cilindro ai fili anche senza l' intervento delle radiazioni.

Tabella II.
$\theta = 90^{\circ}$, $P = 0{,}0025$ mm.

Numero d'ordine dei fili	Potenziale del cilindro.	
	— 54,8 V.	— 411 V.
1	0,05	0,05
2	0,16	0,11
3	0,24	0,46
4	0,27	1,04
5	0,27	1,33
6	0,20	1,43
7	0,11	1,54
8	0,08	1,62
9	0,05	1,75
10	0,03	1,61

Tabella III.
$\theta = 90^{\circ}$, $P = 0{,}0004$ mm.

Numero d'ord.ne dei fili	Potenziale del cilindro.	
	— 54,8 V.	— 411 V.
1	0,04	0,05
2	0,08	0,06
3	0,17	0,07
4	0,22	0,20
5	0,23	0,24
6	0,13	0,32
7	0,11	0,34
8	0,10	0,35
9	0,08	0,37
10	0,06	0,38

Tabella IV.
$\theta = 73^{\circ}\ 44'$, (*a*) $P = 0{,}0025$ mm.

Numero d'ordine dei fili	Potenziale del cilindro.	
	— 54,8 V.	— 411 V.
1	0,09	0,00
2	0,26	0,16
3	0,38	0,63
4	0,41	1,32
5	0,30	1,41
6	0,20	1,48
7		1,01
8	0,09	0,70
9		0,46
10	0,03	0,24

Ecco dunque che la massima carica è trasportata nel luogo ove fanno capo le linee di forza che si possono immaginare tracciate a partire dalla generatrice di zinco, quando il cilindro è debolmente carico, mentre che la massima carica è invece acquistata da un filo alquanto più lontano dal cilindro, quando la carica di questo è assai forte.

Si possono quindi enunciare i risultati finora raggiunti nel modo seguente.

1° Mentre alla pressione ordinaria dell' aria la convezione fotoelettrica si fa sensibilmente secondo le linee di forza, rarefacendo l' aria il fascio curvilineo costituito dalle particelle elettrizzate in moto va via via allargandosi; nel caso del cilindro carico e del piano parallelo a potenziale zero, il luogo nel quale prima quasi tutta l' elettricità era trasportata diviene semplicemente il luogo ove l' elettricità è trasportata in maggior abbondanza,

(*a*) Questo valore di θ è quello pel quale le linee di forza che partono dalla generatrice in zinco incontrano la lamina piana nel posto occupato dal filo f_4.

2° Alle pressioni bassissime e con potenziale del cilindro sufficientemente elevato l' elettricità è trasportata in quantità massima, in un luogo della lastra piana alquanto più lontano dal cilindro.

9. Riportandosi alle considerazioni svolte nella Introduzione, si riconosce che quest' ultimo risultato é una conseguenza ovvia delle velocitá che le particelle in moto acquistano per l' azione delle forze elettriche, qualunque ipotesi si faccia sulla natura delle particelle stesse. Il primo invece, e cioè l' allargarsi del fascio difficilmente si potrebbe spiegare nell' ipotesi secondo la quale le particelle in moto sono parti metalliche, mentre riceve una semplicissima e naturale spiegazione una volta ammessa l' ipotesi contraria.

Infatti, se dal cilindro illuminato si distacca una particella metallica, questa deve percorrere liberamente nell' aria estremamente rarefatta la sua traiettoria. La regione della lastra piana colpita dalle particelle elettrizzate non dovrebbe peró divenire molto piú larga che alla pressione ordinaria. Essa dovrebbe solo spostarsi più o meno al progredire della rarefazione, in causa della diminuzione continua di resistenza offerta dall' aria ambiente. Per spiegare l' allargarsi della regione colpita bisognerebbe ricorrere ad ipotesi sussidiarie più o meno inverosimili.

Se invece si suppone che le molecole gassose siano quelle che trasportano l' elettricità, i precedenti risultati si spiegano nel modo più naturale. Consideriamo dapprima il caso in cui la carica del conduttore illuminato sia cosí debole, che si possano trascurare gli effetti delle forze elettriche. Tutte le molecole che, in virtú del loro moto termico, giungono a colpire il metallo illuminato, restano elettrizzate e seguitano a muoversi cosí cariche in virtú delle loro velocitá termiche. Se colla rarefazione il medio cammino libero delle molecole é divenuto abbastanza grande, tutte le regioni della lastra piana potranno quindi ricevere dell' elettricitá; e se la rarefazione é grandissima, la regione su cui si raccoglie la massima carica non sará altro che quella per la quale é massimo il numero di molecole che, partite dal metallo illuminato possono nell' unitá di tempo colpirla.

Se poi la carica del conduttore é forte, i moti delle molecole cessano di essere rettilinei, e alla velocitá termica di esse si compone la velocitá dovuta alle forze elettriche. Se questa velocitá esistesse sola, ogni molecola percorrerebbe la traiettoria, che si é detto essere compresa fra la normale al punto di partenza e la linea di forza; si comprende quindi che l'effetto delle forze elettriche sará quello di spostare la regione che riceve il massimo di elettricitá nel senso che é appunto indicato dalle esperienze.

Resta peró un punto a chiarire in questa spiegazione. Infatti risulta dalle esperienze riportate, che nel caso di un cilindro posto nell' aria rarefatta e debolmente caricato, di fronte ad una lastra piana ad esso parallela, la regione di questa che riceve la massima carica é precisamente la re-

gione ove terminano le linee di forza tracciate a partire dalla generatrice del cilindro sulla quale ha origine la convezione. È facile rendere ragione di questa coincidenza, e perció basta calcolare il numero probabile di molecole che nell' unitá di tempo una data regione della lastra puó ricevere dal metallo illuminato.

10. A questo scopo ammettiamo dapprima le solite ipotesi semplificative, e cioè invece di supporre che le varie molecole del gas abbiano velocità di varie grandezze, attribuiamo a tutte una velocità media, e supponiamo che riflettendosi una di esse sopra un corpo solido, rimbalzi ancora colla stessa velocitá e sotto un angolo di riflessione eguale all' angolo d' incidenza, il ché é lecito giacché secondo le regole della probabilitá tante saranno le molecole riflesse in un dato punto che fanno un certo angolo di riflessione, quante le molecole incidenti che fanno un egual angolo d' incidenza [1].

Ció posto é chiaro che il numero di molecole gassose le quali, riflesse da un elemento superficiale $d\omega$ possono giungere nell' unitá di tempo in un dato punto A, sará eguale al numero di quelle che attraversando l' elemento $d\omega$ giungerebbero in A' immagine ottica di A data dall' elemento $d\omega$ considerato come uno specchio. Il detto numero stará al numero totale delle molecole che arrivano in A durante l' unitá di tempo, come l'angolo solido sotto cui $d\omega$ é visto da A', oppure anche da A, stá a 4π. La stessa regola si applica a qualunque superficie su cui si riflettano le molecole.

Nel caso nostro, in cui si ha un sistema cilindrico, giova considerare, non giá il numero delle molecole che giungono ad un punto, ma il numero di quelle che arrivano ad una retta. È chiaro che, supponendo infiniti il cilindro ed il piano delle fig. 2 e 3, il numero di molecole le quali, riflesse dalla striscia di zinco, possono colpire nell' unitá di tempo una data retta parallela al cilindro (p. es. uno dei dieci fili) stá al numero totale di molecole che nello stesso tempo arrivano a quella retta, come l' angolo diedro formato dai due piani passanti per la retta e per i limiti laterali della detta striscia di zinco, stá a 2π.

Sia dunque (vedi fig. 7 nella quale il piano di figura é perpendicolare all' asse del cilindro) O l' asse del cilindro, D la retta rispetto alla quale si vuol calcolare il precedente rapporto, MN la striscia di zinco che supporremo piana essendo assai piccola la sua larghezza. Si ponga $MN = 2a$, $AOC = \theta$, $MDN = \varphi$, $OA = R$, $OC = d$, $CD = z$. Il rapporto cercato ρ sará $\rho = \frac{\varphi}{2\pi}$. Per calcolarlo si abbassino le tre perpendicolari MP, AB, NQ,

---

[1] Clausius — Pogg. Ann. b. C, 1857, p. 353.

sulla CD, che rappresenta la lastra piana. Si avrà evidentemente:

$$\operatorname{tang} MDC = \frac{d - R\cos\theta - a\,\mathrm{sen}\,\theta}{z - R\,\mathrm{sen}\,\theta + a\cos\theta}, \quad \operatorname{tang} NDC = \frac{d - R\cos\theta + a\,\mathrm{sen}\,\theta}{z - R\,\mathrm{sen}\,\theta - a\cos\theta},$$

da cui, per essere $\varphi = NDC - MDC$, si ricava:

$$\operatorname{tang}\varphi = 2a\frac{z\,\mathrm{sen}\,\theta + d\cos\theta - R}{z^2 + R^2 + d^2 - a^2 - 2Rz\,\mathrm{sen}\,\theta - 2Rd\cos\theta}.$$

Il rapporto ρ sarà massimo quando è massimo φ. Si trova colle note regole, che pel massimo si ha:

$$z\,\mathrm{sen}\,\theta = R - d\cos\theta + \sqrt{(d - R\cos\theta)^2 - a^2\,\mathrm{sen}^2\theta}.$$

Tale è la formola che determina, per mezzo della sua distanza z da C, la posizione della lastra ove arriva il massimo numero di molecole partite da MN. Siccome poi a è assai piccola potremo trascurare l' ultimo termine sotto il radicale, con che si trova:

$$z = \frac{(R + d)(1 - \cos\theta)}{\mathrm{sen}\,\theta}.$$

Siccome identicamente $\frac{1 - \cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{1 + \cos\theta}$, si vede che quest' ultima formola è identica a quella che determina il luogo ove la linea di forza che parte da A va ad incontrare il piano CD [1].

Se dunque nelle esperienze descritte più sopra, al progredire della rarefazione, mentre la regione della lastra su cui arriva dell' elettricità si allarga, la massima carica giunge sempre allo stesso luogo (ben inteso se non si impiegano che potenziali deboli) ciò dipende dalla coincidenza ora rilevata (a).

11. Ho fatto esperienze simili a quelle descritte nel § 8, adoperando una lastra di zinco piana al posto del cilindro nell' apparecchio delle fig. 2 e 3. Se MN (fig. 8) è la lastra, il cui asse di figura O si trova al posto dell' asse del cilindro, e se si conservano le precedenti notazioni, la

---

[1] I. Memoria: *Sui fenomeni elettrici provocati dalle radiazioni*, § 25.

(a) Si è tacitamente supposto che la densità elettrica sia uniforme sulla striscia di zinco, il chè non è lontano dal vero, stante la sua piccola larghezza; senza di ciò le molecole riflesse nei vari punti non acquisterebbero cariche eguali.

regione lineare del piano CD ove è massimo il rapporto $\rho = \frac{\varphi}{2\pi}$, sarà determinata da:

$$z \operatorname{sen} \theta = \sqrt{d^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} - d \cos \theta ,$$

che si può ottenere direttamente, oppure facendo $R = 0$ nella formola analoga del § precedente (*a*).

Essendo nel mio apparecchio $d = 1{,}5$ c. e prendendo $a = 0{,}5$ c. (e precisamente una lastra rettangolare di zinco verniciata ovunque all' infuori di una striscia larga un centimetro nel mezzo) si trova:

$z = 0{,}5$ per $\theta = 40°\ 36'$,
» » 1 » » » 71 34,
» » 1,5 » » » 93 11,

e cioè dando all' angolo θ, che la lastra fa col piano portante i dieci fili isolati, i tre precedenti valori, il numero massimo di molecole riflesse dallo zinco giunge rispettivamente ai fili f_2, f_3, f_4.

Secondo la teoria ammessa agli stessi fili deve giungere rispettivamente nei tre casi la carica massima, se si sperimenta con debole potenziale della lastra e forte rarefazione.

Una serie di misure in tali condizioni diede i seguenti risultati.

Tabella V.

$P = 0{,}002$ mm., $V = -52{,}6$ Volta.

Numero d'ordine dei fili	Valore dato a θ.		
	40° 36′	71° 34′	93° 11′
1	0,87	0,87	0,19
2	1,03	1,27	0,87
3	0,95	1,35	1,05
4	0,92	1,29	1,19
5	0,57	1,03	0,81
6	0,32	0,68	0,57
7			0,46
8	0,24	0,57	0,32
9			
10	0,14	0,46	0,27

(*a*) Anche qui si ammette che la distribuzione dell' elettricità sulla parte scoperta della lastra di zinco sia uniforme.

Come nelle tabelle precedenti, i numeri inscritti nelle colonne di questa sono i potenziali (negativi) raggiunti da ciascuno dei dieci fili in 10 secondi di azione delle radiazioni sulla lastra di zinco. Si vede che il massimo di carica fu ricevuta nei tre casi precisamente dai fili f_2, f_3, f_4, come era previsto.

Colla stessa lastra di zinco posta perpendicolarmente al piano dei dieci fili (cioè $\theta = 90°$) si ebbero i risultati della tabella seguente, modificando grado a grado la pressione.

Tabella VI. $V = -410,5$ Volta.

Numero d'ordine dei fili	P = Pressione dell' aria in mm.					
	Ordinaria	9,7	0,81	0,125	0,020	0,002
1	0,00	0,43	10,20	0,95	0,92	0,68
2	0,05	0,54	16,88	6,71	5,70	3,73
3	0,51	2,22	20,75	8,79	7,44	5,30
4	0,68	2,16	41,75	13,55	11,36	7,44
5	0,19	1,51	11,44	12,53	11,36	8,17
6	0,16	1,05	8,14	12,58	11,09	8,74
7	0,14	0,83	5,41	10,01	9,85	8,87
8	0,08		3,71	8,47	9,20	9,09
9			3,33	7,85		9,47
10	0,05	0,51	2,57	5,55	8,77	9,06

È manifesto da questa, come pure dalla Tab. V, l'allargarsi della regione colpita da particelle elettrizzate, al diminuire della pressione dell' aria. Di più si vede il solito effetto dovuto alle velocità acquistate dalle molecole per opera delle forze elettriche. Infatti, in queste esperienze il potenziale al quale era mantenuta la lastra di zinco era alquanto elevato, ed alle maggiori rarefazioni si manifestò lo spostamento della posizione del massimo verso i fili più lontani dalla lastra di zinco.

Del resto, l' influenza del valore più o meno elevato del potenziale a cui è mantenuta la lastra di zinco illuminata risulta nettamente dalla seguente serie di misure, eseguite ancora colla stessa lastra di zinco.

Tabella VII. $P = 0{,}004$ mm., $\theta = 90°$.

Numero d'ordine dei fili	V = Potenziale della lastra di zinco in Volta.			
	— 54,7	— 136,8	— 272,7	— 410,5
1	0,32	0,44	0,59	1,30
2	0,73	1,30	1,67	3,80
3	0,86	1,79	1,89	4,36
4	1,19	2,43	2,16	4,88
5	0,79	2,71	2,35	5,25
6	0,62	2,49	2,62	5,14
7	0,62	2,30	2,43	5,68
8	0,51	2,16	1,98	6,38
9	0,50		1,98	6,46
10	0,51	1,97	2,03	6,38

Si vede appunto da questa tabella che mano a mano che si eleva il potenziale della lastra, la posizione del massimo va allontanandosi.

12. Era interessante lo studiare ancora un caso in cui non si verificasse la coincidenza dimostrata nel § 10, e cioè un caso così scelto, che la regione della lastra piana per la quale, quando l' aria è assai rarefatta, è massimo il numero di molecole che arrivano dal conduttore illuminato, non coincida colla regione ove vanno a terminare le linee di forza che si possono supporre tracciate a partire dal conduttore stesso. In un caso di questo genere, allorchè colla rarefazione dell'aria comincia a manifestarsi l' allargamento della regione colpita, dovrà manifestarsi altresì uno spostamento della regione del massimo, e cioè questa deve finire coll'occupare un luogo diverso dal luogo nel quale era trasportata tutta l' elettricità quando l' aria era alla pressione ordinaria.

A questo scopo operai semplicemente così. Posi entro l' apparecchio delle fig. 2 e 3 una nuova lastra metallica in comunicazione col suolo, parallela a quella dai dieci fili, e dalla parte opposta rispetto al cilindro. La striscia di zinco di questo fu rivolta verso la sorgente delle radiazioni, e cioè si fece $\theta = 90°$. Se la lastra aggiunta fosse stata alta quanto la *IL* (fig. 2) ed egualmente distante dal cilindro, le linee di forza che partono dalla striscia di zinco, per ragione di simmetria, sarebbero state rette parallele alle due lastre : ma invece la nuova lastra era meno alta e più lontana, e perciò le linee di forza erano curve che certamente andavano a terminare sulla lastra *IL*. Ecco i risultati ottenuti.

Tabella VIII.

$V = -60{,}6$ Volta; $\theta = 90°$.

Numero d'ordine dei fili	P = Pressione dell' aria.			
	Ordinaria	0,975 mm.	0,345	0,0036
1	0,00	0,03	0,00	0,03
2	0,00	0,07	0,24	0,15
3	0,00	0,17	0,38	0,22
4	0,00	0,17	0,44	0,27
5	0,00	0,14	0,30	0,22
6	0,02	0,10	0,17	0,20
7	0,02	0,07	0,15	0,20
8	0,01	0,03	0,13	0,20
9	0,00	0,03	0,07	0,15
10	0,00	0,00	0,03	0,15

Tabella IX.

$V = -363{,}8$ Volta; $\theta = 90°$.

Numero d'ordine dei fili	P = Pressione dell' aria.				
	Ordinaria	0,975 mm.	0,345	0,025	0,0036
1	0,00	2,19	8,13	0,20	0,07
2	0,00	7,00	9,32	0,89	0,07
3	0,00	14,41	10,24	3,00	0,36
4	0,00	15,74	17,11	6,04	1,16
5	0,02	14,17	18,68	6,73	1,64
6	0,05	8,98	17,69	7,41	2,00
7	0,06	6,62	15,81	6,90	2,15
8	0,02	4,34	15,13	7,03	2,39
9	0,00	2,83	11,13	6,83	2,08
10	0,00	2,15	8,40	5,98	1,81

Dalla Tab. VIII, che porge i risultati avuti con debole potenziale del cilindro si vede che, mentre alla pressione ordinaria l' elettricità era trasportata principalmente ai fili f_6 ed f_7, alle pressioni minori si ebbe il massimo al filo f_4. Nelle esperienze della Tab. IX il potenziale del cilindro fu più forte, e colle maggiori rarefazioni si manifestò anche il solito spostamento del massimo verso le parti della lastra più lontane dal cilindro.

Come si vede, si ha un accordo soddisfacente, in quanto all' andamento generale dei fenomeni, fra le misure eseguite, e quanto si può prevedere coll' ipotesi del trasporto elettrico operato dalle molecole gassose. Prima delle esperienze mi aspettavo di osservare lo spostamento della posizione del massimo, colle cariche forti e alle grandi rarefazioni; ma l' allargarsi della regione di lastra colpita dalle particelle cariche mi giunse impreveduto.

Cap. III. - **Misure del coefficiente di dispersione fotoelettrica. Suo confronto colla f. e. prodotta dalle radiazioni.**

13. Esaminando la Tab. I data nel § 8, la Tab. VI del § 11 e le Tab. VIII e IX del § 12, si nota una particolarità interessante, che non sarà certo sfuggita al Lettore quantunque su di essa non sia stata prima d'ora attirata la sua attenzione. Se si confrontano fra loro in complesso i numeri delle diverse colonne si riconosce che la quantità di elettricità dispersa per opera delle radiazioni cresce enormemente quando, a parità delle altre condizioni,

l'aria ambiente viene rarefatta a partire dalla pressione ordinaria sino alla pressione di circa mezzo millimetro di mercurio, e che, continuando la rarefazione, la quantità di elettricità suddetta diminuisce nuovamente.

Era interessante lo studiare in particolare questa influenza della pressione, e fu a questo scopo preparato l'apparecchio della fig. 5, nel quale Z è un disco di zinco ben pulito poco prima dell'esperienza e verniciato presso il contorno, in modo che l'azione della luce non si eserciti che ove la distribuzione dell'elettricità è sensibilmente uniforme, mentre D è una rete metallica verniciata, parallela al disco e comunicante col suolo, e sulla quale, dalla parte del disco, è teso diametralmente un sottilissimo filo isolato (simile ai dieci fili dell'apparecchio adoperato precedentemente) comunicante per la via di B coll'elettrometro.

Se Z è mantenuto ad un potenziale negativo costante, e se per un tempo determinato (10 secondi) si fanno agire le radiazioni, l'elettrometro devierà, ed il potenziale da esso raggiunto darà una misura relativa della quantità di elettricità dispersa.

Nell'esporre i risultati ottenuti, chiamerò *coefficiente di dispersione fotoelettrica* in un dato punto di un conduttore illuminato il rapporto fra la quantità di elettricità che in un secondo parte da un elemento superficiale del conduttore posto in quel punto e la quantità di elettricità che si trova nello stesso elemento. Nel caso d'un conduttore su cui la densità sia uniforme, si potrà definire il coefficiente di dispersione fotoelettrica del conduttore, come il rapporto fra la quantità d'elettricità che parte in un secondo dall'unità d'area, e la densità elettrica.

È chiaro che il potenziale assunto dall'elettrometro colla disposizione ora descritta, sarà generalmente proporzionale al coefficiente di dispersione fotoelettrica, la durata d'azione di 10 secondi essendo abbastanza breve perchè la carica che va acquistando il filo comunicante coll'elettrometro non modifichi quasi mai sensibilmente l'andamento del fenomeno. Evidentemente il coefficiente definito più sopra non solo varierà colla natura del metallo adoperato, collo stato di pulitura ecc., ma anche coll'intensità delle radiazioni attive; sarebbe desiderabile riportarlo all'unità d'intensità di queste, ma ciò non è per ora possibile a farsi.

Mantenendo costante nell'apparecchio della fig. 5 il metallo illuminato (disco di zinco) ho variato la pressione dell'aria, la distanza fra il disco e la rete comunicante col suolo (e della quale il filo isolato comunicante coll'elettrometro può considerarsi come una porzione isolata dal resto), ed infine il potenziale del disco. Darò nelle due tabelle seguenti i potenziali (negativi) assunti dall'elettrometro dopo 10 secondi d'azione della luce, espressi in Volta, potenziali che, come si è notato, sono proporzionali al coefficiente di dispersione fotoelettrica.

Indico con d la distanza fra disco e rete, e con V il potenziale del disco.

Tabella X.

Pressione dell' aria	$d = 1,5$ mm.		$d = 10$ mm.	
	$V = -60,8$	$V = -365$	$V = -60,8$	$V = -365$
Pr. ordinaria	1,08	2,52	0,51	1,54
0,718 mm.	3,75	12,02	3,64	51,62 (1)
0,280 »	1,50	5,65	1,59	17,98
0,006 »	1,01	1,13	1,43	1,92

Tabella XI.

Pressione dell' aria	$d = 3$ mm.				$d = 12$ mm.			
	$V = -4,2$	$V = -67$	$V = -168$	$V = -329$	$V = -4,2$	$V = -67$	$V = -168$	$V = -329$
Pr. ordinaria	.		0,26	0,44			0,15	0,19
0,692 mm.	0,44	0,73	0,92	1,24	0,51	0,90	2,63	14,44
0,469 »	0,24	0,47	0,84	1,08	0,29	0,58	1,70	6,49
0,007 »	0,07	0,13	0,28	0,41	0,19	0,45	0,73	0,92

Percorrendo verticalmente ogni colonna di queste tabelle si trova confermata l' esistenza d' un massimo ad una particolare pressione, per il coefficiente di dispersione fotoelettrica. La pressione alla quale ha luogo questo massimo ha oscillato, secondo varie misure che qui non riporto, fra 0,4 mm. e 0,8 mm. Talchè si può dire che: *il coefficiente di dispersione fotoelettrica è massimo ad una pressione che coincide sensibilmente con quella alla quale il gas presenta la minima resistenza ad una scarica.*

Le variazioni che subisce il coefficiente di dispersione fotoelettrica al variare della pressione sono sempre, come si vede, assai grandi. Tuttavia dall' esame delle Tab. X e XI si ricava che: *le variazioni che subisce il coefficiente di dispersione fotoelettrica, quando varia la pressione, sono tanto più grandi quanto più elevato è il potenziale negativo del disco illuminato;*

---

(1) Questo potenziale, come pure alcuni altri in queste due tabelle, sono forse troppo grandi perchè sia lecito ammettere che la convezione fotoelettrica non è modificata dalla carica acquistata dal filo isolato; ma se ben si riflette si riconosce che l' influenza di questa causa d' errore tende a diminuire anzichè esagerare le differenze che si vogliono porre in evidenza. In ogni caso bastava far durare meno di 10 secondi l'azione della luce, per togliere ogni dubbio; così facendo ottenni risultati concordanti con quelli esposti nel testo.

inoltre esse sono relativamente maggiori per distanze di 10 o 12 mm. fra disco e rete, che per distanze più piccole.

14. Se si confrontano fra loro i numeri delle diverse colonne delle due tabelle precedenti, corrispondenti ad una stessa pressione dell' aria, ad uno stesso potenziale del disco, ed a diverse distanze fra questo e la rete comunicante col suolo, si trova un risultato assai singolare ed inatteso (*a*). Per esempio, quando il disco era mantenuto al potenziale — 365 V., era distante dalla rete di 1,5 mm., e la pressione dell' aria 0,718 mm., la deviazione che si ottenne in 10 secondi fu di — 12,02 V.. Lasciando invariata la pressione dell' aria ed il potenziale del disco, questo venne allontanato dalla rete sino a 10 mm. La deviazione ottenuta a questa distanza maggiore non fu più piccola, come era da supporre, ma notevolmente più grande, e precisamente — 51,62 V.. Un analogo aumento della deviazione elettrometrica si trova anche in tutti gli altri casi, in cui l' aria essendo rarefatta, la distanza fra il disco e la rete viene aumentata sino ad un certo limite (*b*), per cui si può dire che : *il coefficiente di dispersione fotoelettrica nell' aria rarefatta cresce, a parità di altre condizioni, al crescere della distanza fra il conduttore illuminato ed il conduttore che raccoglie la carica dispersa.*

Alla pressione ordinaria questo andamento anormale della dispersione non si verifica, come apparisce anche dalle tab. X e XI. Si vede ancora che l' aumentare della dispersione fotoelettrica al crescere della distanza si manifesta in modo più spiccato a certe pressioni e con certi potenziali del disco. Anzi si può dire che : *l' aumento del coefficiente di dispersione fotoelettrica al crescere della distanza fra i due conduttori è più marcato coi più alti valori del potenziale negativo del conduttore illuminato ;* e si può aggiungere che : *il detto aumento è più marcato per le pressioni più vicine a quella alla quale il gas presenta la resistenza minima alle scariche ordinarie.*

Questi risultati naturalmente non li ho dedotti dalle sole misure riportate nelle Tab. X e XI, ma da molte altre, in alcune delle quali, invece di presentare al disco di zinco una rete, di cui una porzione soltanto (e cioè il filo teso presso la sua superficie) comunicava coll' elettrometro, adoperai una rete circolare isolata e comunicante coll' istrumento di misura.

Mentre il risultato del § precedente si spiega in modo naturalissimo coll' ipotesi ammessa, altrettanto non può dirsi dei risultati fatti emergere

---

(*a*) Bisogna fare il confronto fra numeri d' una stessa tabella, cioè d' una stessa serie di esperienze. I numeri trovati in diverse serie non sono in generale fra loro comparabili, per le condizioni presumibilmente diverse della superficie del disco, o per altre cause non ancora riconosciute.

(*b*) Nelle esperienze riferite questo limite non è raggiunto ; ma riconobbi con altre esperienze, che qui è inutile riportare, che aumentando ulteriormente di qualche millimetro la distanza fra i due metalli la deviazione elettrometrica nuovamente decresce.

in questo §. Infatti, col diminuire della pressione del gas, si favorisce dapprima il trasporto d' elettricità che compiono le sue molecole, in causa dell' aumento del loro medio cammino libero; ma se la rarefazione progredisce assai, il numero delle molecole che in un dato tempo toccano il conduttore diminuisce sempre più, e quindi il trasporto elettrico si fa di più in più scarso. Così si comprende come il coefficiente di dispersione fotoelettrica presenti un massimo per una data pressione dell' aria, inferiore alla pressione ordinaria. Invece, il risultato principale stabilito in questo §, e cioè che aumentando entro certi limiti la distanza fra i due conduttori, si favorisce il trasporto fotoelettrico dall' uno all' altro, non mi sembra facile a spiegarsi almeno per ora. Posso però subito far rilevare che un effetto simile ho ottenuto anche senza le radiazioni, e che le relative esperienze saranno descritte, insieme ad altre, nel capitolo seguente. Riconosciuta l' esistenza di questo fatto anomalo nel caso della dispersione ordinaria, diviene naturale che sussista anche nel caso della dispersione fotoelettrica, poichè per quanto si può dedurre dal complesso delle esperienze qui riferite, *la dispersione fotoelettrica sembra non differire dalla dispersione ordinaria che per effettuarsi anche con potenziali assai deboli.*

15. È utile richiamare ora, per chiarezza di ciò che seguirà, i risultati che ottenni con precedenti ricerche, relative alla misura della forza elettromotrice generata dalle radiazioni.

Se si fanno cadere le radiazioni sul disco di zinco dell' apparecchio adoperato per ultimo, mentre esso, invece di comunicare col polo negativo d' una pila, è posto in comunicazione coll' elettrometro, e mentre la rete metallica ad esso parallela è tenuta in comunicazione col suolo, il disco si carica grado a grado di elettricità positiva. Ho dimostrato che cessa di crescere, sotto l' azione delle radiazioni, il potenziale del disco, allorchè la densità elettrica su di esso ha assunto un valore determinato, diverso pei differenti metalli. La densità elettrica massima, di cui si riveste il corpo illuminato è dunque caratteristica per ogni metallo (a parità di temperatura, natura del gas ambiente, intensità delle radiazioni etc.); e siccome la forza elettrostatica presso la superficie è proporzionale alla densità, ed è essa verosimilmente che si oppone ad ogni ulteriore allontanamento dal conduttore di particelle cariche negativamente, così credei conveniente di prendere la detta forza elettrostatica come misura della forza elettromotrice delle radiazioni.

Nel caso d' una lastra illuminata parallela ad una rete comunicante col suolo formata da un metallo della stessa natura della lastra, il potenziale positivo massimo raggiunto da questa crescerà quindi sensibilmente in proporzione della distanza fra lastra e rete. Se invece la rete è formata con un metallo diverso da quello della lastra, il potenziale finale, accusato

dall' elettrometro con questa comunicante, sarà la somma algebrica di quello che si avrebbe se la rete fosse di egual natura della lastra, e della differenza di potenziale di contatto fra i due metalli ([1]).

Operando poi nell' aria di più in più rarefatta ottenni potenziali di più in più grandi, sempre notevolmente superiori a quelli avuti alla pressione ordinaria, e di più questi potenziali anzichè crescere per ogni pressione colla distanza fra disco e rete, diminuivano a partire da una distanza piccolissima sino ad una distanza (che fu sino di 9 o 10 millimetri), tanto maggiore quanto più spinta era la rarefazione dell' aria. Ne conclusi che la f. e. delle radiazioni aumentava assai al crescere della rarefazione, e che essa dipendeva anche dalla distanza fra i due metalli, diminuendo al crescere di questa entro certi limiti.

Fermiamoci dapprima al primo di questi risultati, e mettiamolo a confronto coll' altro esposto nel § 13, e cioè col fatto che la dispersione fotoelettrica non aumenta sempre colla rarefazione, ma presenta un massimo per una certa pressione. È chiaro che se realmente questi due risultati sussistono insieme, diviene difficile il considerare i due fenomeni, quello del disperdersi della carica negativa e quello del caricarsi positivamente di un conduttore, sotto l' azione delle radiazioni, come effetti di un' unica causa. Alla stessa conclusione si giunge ponendo a riscontro il fatto che a piccole pressioni, la f. e. delle radiazioni diminuisce al crescere della distanza fra il disco e la rete, coll' altro dimostrato nel § 14, dell' aumento che subisce in pari tempo il coefficiente di dispersione fotoelettrica.

Stante l' importanza che ha questa conclusione in rapporto colla teoria dei fenomeni fotoelettrici, giudicai necessario stabilirla nel modo il più sicuro, e perciò volli ripetere le misure relative alla f. e. prodotta dalle radiazioni collo stesso apparecchio adoperato per la ricerca attuale, impiegando inoltre lo stesso arco voltaico fra carboni, in posto della lampada a zinco adoperata altravolta.

Senza riportare valori numerici dirò che i fatti altravolta osservati vennero confermati pienamente, vale a dire che anche col nuovo apparecchio si manifestò un progressivo aumento in senso positivo della deviazione elettrometrica prodotta dalle radiazioni, al crescere della rarefazione sino al massimo limite per me possibile, e, per una data rarefazione, una diminuzione della deviazione stessa al crescere entro certi limiti della distanza fra i due metalli.

Resta adunque stabilito che *se la pressione dell' aria diminuisce a partire da circa mezzo millimetro, la f. e. prodotta dalle radiazioni seguita ad*

([1]) V. la III. Memoria sui fenomeni elettrici delle radiazioni § 17.

aumentare, (almeno sino alla più forte rarefazione raggiunta) mentre la dispersione fotoelettrica diminuisce d'intensità e che: *al crescere entro certi limiti della distanza fra i due conduttori, la f. e. diminuisce, mentre invece la dispersione fotoelettrica aumenta.*

16. Accennerò qui di volo ad un fatto che si connette con quelli dei quali qui si tratta. Nell'atto di ripetere, coll'apparecchio della fig. 5, le misure relative alla f. e. generata dalle radiazioni, ottenni un risultato singolare che merita di essere studiato in avvenire colla debita estensione.

Il disco di zinco Z della fig. 5 comunicava coll'elettrometro e la rete d'ottone verniciata D, parallela a Z e distante circa 2 mm., comunicava col suolo. Fatte agire le radiazioni sinchè la deviazione elettrometrica fosse divenuta stabile, ripetevo l'esperienza dopo avere accostata lateralmente una forte elettrocalamita. Ecco i risultati che ottenni. Coll'aria alla pressione ordinaria la deviazione fu la stessa nei due casi. Tale deviazione era negativa. Diminuita la pressione poco a poco sino a circa 4 millesimi di millimetro, la deviazione osservata senza l'elettrocalamita divenne grado a grado minore rimanendo negativa, poi si annullò, indi divenne positiva e crescente. Questo effetto era quello sempre osservato e si spiega così. La f. e. prodotta dalle radiazioni va via via aumentando, e finisce col produrre per conto proprio una deviazione positiva tale da superare quella (negativa) dovuta alla carica iniziale di contatto fra rete e disco. Ripetendo ogni volta la misura nel campo magnetico creato dalla elettrocalamita, la deviazione massima prodotta dalle radiazioni restò negativa anche con rarefazioni dell'aria per le quali era positiva nel primo caso, e qualche volta questa deviazione negativa fu press'a poco eguale a quella ottenuta alla pressione ordinaria.

Dunque: *nel campo magnetico la f. e. prodotta dalle radiazioni cresce assai meno dell'ordinario al crescere della rarefazione dell'aria ambiente, ed anzi entro certi limiti e nel caso d'intensità magnetica assai grande, resta quasi costante.*

Si direbbe quindi che *le particelle che trasportano l'elettricità negativa dal disco alla rete trovano un certo ostacolo a muoversi in un campo magnetico.*

Anche nelle esperienze sulla dispersione ordinaria, che saranno narrate nel seguente capitolo, troveremo un esempio di influenza del magnetismo sulla convezione elettrica.

Cap. IV. - **Fenomeni elettrici nell' aria rarefatta e senza l' intervento delle radiazioni.**

17. Il curioso risultato esposto nel § 14, m' indusse a ricercare se qualche analogo fenomeno si produceva anche senza l' azione delle radiazioni. A questo scopo, lasciando intatte le comunicazioni, e cioè tenendo il disco *Z* della fig. 5 ad un potenziale negativo per mezzo della pila, e mantenendo la rete *D* in comunicazione col suolo, ed il filo teso al di sopra di essa in comunicazione coll' elettromètro, osservavo la deviazione elettrometrica ottenuta, senza far agire le radiazioni, in un determinato tempo, contato dall' istante nel quale si sopprimeva la comunicazione dell' elettrometro col suolo.

Naturalmente, a parità di circostanze, le deviazioni così ottenute erano di gran lunga minori di quelle che si avevano facendo agire le radiazioni. Per misurarle nel modo migliore fra i possibili, ad onta della circostanza che l' ago dell' elettrometro devia con una certa velocità e che ad ogni istante non si trova nella posizione nella quale si fermerebbe se il potenziale da misurarsi cessasse di variare, mi attenni, in mancanza di meglio, al metodo della lettura di tre escursioni estreme, come è detto alla fine del cap. II.

Per avere deviazioni di grandezza conveniente feci durare ogni esperienza 30 secondi invece di 10, e caricai spesso con un maggior numero di coppie il disco di zinco.

Al crescere di questo numero cresce, non però proporzionalmente ma in modo sempre più rapido, la deviazione elettrometrica, di modo che si arriva al punto in cui l' aggiunta di una o due coppie e quelle che caricano il disco basta a far sì che da una deviazione elettrometrica di qualche centimetro si passi ad una così forte da far sparire la scala dal campo del cannocchiale. Con potenziali così elevati si osserva anche uno speciale andamento nel fenomeno, e cioè vedesi spesso la deviazione rimanere piccola per qualche secondo, poi d' un tratto aumentare, come se ciò fosse dovuto ad una scintilla che scoccasse dal disco al filo comunicante coll' elettrometro. Sembra dunque che con un potenziale abbastanza elevato si abbia un cambiamento nel fenomeno, e dalla dispersione lenta si passi ad una vera scarica. Questo passaggio che è brusco nell' aria alla pressione ordinaria, si manifesta qui dunque con una certa gradazione.

Orbene, misurando le deviazioni prodotte dall' elettricità che il filo teso sulla rete raccoglie in 30 secondi, mentre il disco di zinco è mantenuto a potenziali poco minori di quello pel quale avviene la descritta modificazione

nel processo della propagazione dell' elettricità, ho ottenuto risultati che, come mi aspettavo, corrispondono al fenomeno fotoelettrico del § 14. Posta, dopo di ciò, tutta la rete D in comunicazione coll' elettrometro, o sostituito a questa un disco pure comunicante coll' elettrometro, i risultati sono rimasti sostanzialmente i medesimi.

Perciò ho potuto far uso dell' apparecchio della fig. 6, assai più comodo, per la ragione che dopo avervi rarefatta l' aria esso può essere separato dalla pompa e maneggiato come occorre, e inoltre perchè la distanza fra i due conduttori L ed I si può variare a piacere senza dover ricorrere ad una elettrocalamita, come è necessaria per l' apparecchio della fig. 5.

Per dare idea dell' andamento del fenomeno riporterò alcune delle misure eseguite coll' apparecchio della fig. 6, e cioè riferirò i potenziali (negativi) raggiunti dall' elettrometro, comunicante col conduttore I, in 30 secondi, con distanze diverse fra i due conduttori. L' elettrodo I era una pallina, mentre L era una punta smussata, mantenuta al potenziale di — 376 Volta.

Tabella XII. $P = 0{,}368$ mm

Distanza fra i due elettrodi	Deviazione all' elettrometro. A	B
1 mm.	0,9	∞
2 »	1,2	∞
5 »	14	85
10 »	52	63
20 »	63	23
30 »	31	17

Tralasciando pel momento di considerare i numeri della colonna B, ai quali ci riferiremo nel § seguente, si vede che il trasporto dell' elettricità negativa dalla punta carica alla pallina comunicante coll' elettrometro cresce enormemente al crescere della distanza fra i due elettrodi sino a circa 2 centimetri, e poi di nuovo diminuisce. In altre esperienze nelle quali fu aumentato qualche poco il potenziale di L, si ebbe una deviazione di pochi Volta per una certa distanza fra i due elettrodi; ma aumentando quest' ultima di qualche millimetro la deviazione divenne tale da far sparire quasi istantaneamente la scala dal campo del cannocchiale.

Mettendo in L ed I due dischetti sottili paralleli di 18^{mm} di diametro, si ottengono risultati analoghi. Con due palline si hanno invece effetti incerti.

Se poi s' impiegano potenziali più piccoli, il fenomeno anomalo diviene meno marcato, od anche cessa di prodursi. Infine con rarefazioni molto maggiori dell' aria che circonda i due metalli, l' andamento delle deviazioni si conserva lo stesso, ma il fenomeno diviene meno marcato, giacchè le deviazioni hanno allora minor grandezza. Le pressioni prossime al mezzo millimetro sono qui pure le migliori ad impiegarsi.

Il fenomeno fotoelettrico descritto nel § 14 ha dunque il suo analogo nel trasporto elettrico che si compie in assenza delle radiazioni.

18. Ponendo l' apparecchio in un campo magnetico, si riconosce che il magnetismo influisce enormemente sulla convezione elettrica dal conduttore carico a quello che raccoglie parte della carica trasportata. Dalle poche prove eseguite finora sembra risultare che in un campo magnetico assai intenso cessa di prodursi il fenomeno anomalo, e che per conseguenza le deviazioni elettrometriche ottenute in tempi uguali nell' istrumento comunicante coll' elettrodo *I* posto di fronte al conduttore carico *L*, decrescono regolarmente al crescere della distanza fra i due metalli.

I numeri della colonna *B* della Tab. XII furono ottenuti appunto mentre un rocchetto (uno dei due che formano l' elettrocalamita di Ruhmkorff) percorso da una corrente di circa 9 Ampére, era collocato con uno de' suoi poli presso l' apparecchio della fig. 6, in direzione tale che le linee di forze magnetiche erano press' a poco perpendicolari all' asse comune dei due elettrodi. Il segno ∞ significa una deviazione tanto grande da non poter essere misurata anche riducendo a 20 il numero delle coppie di carica dell' elettrometro. Per esempio, messi gli elettrodi a 2 mm. di distanza, si ebbe in 30 secondi una deviazione di — 1,2 Volta. Chiuso il circuito dell' elettrocalamita e ripetuta l' esperienza, quasi subito sparì la scala dal campo del cannocchiale, benchè la sensibilità dell' elettrometro fosse piccola.

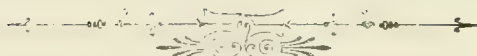
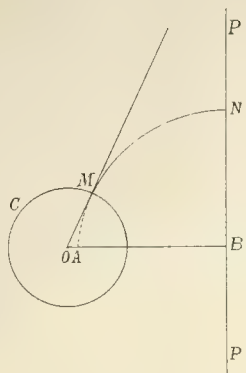
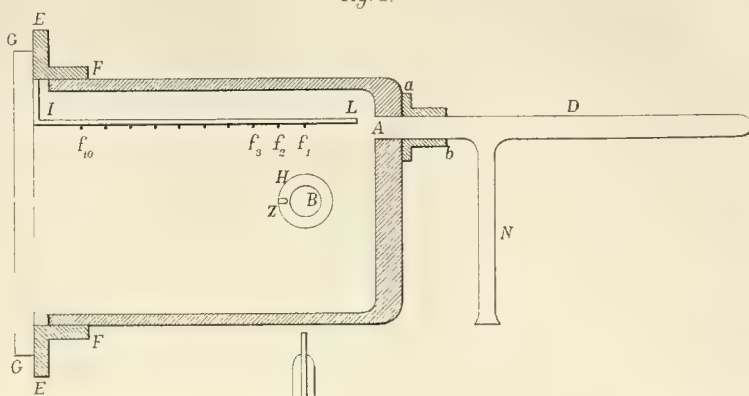
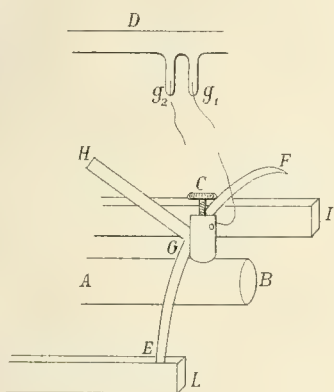
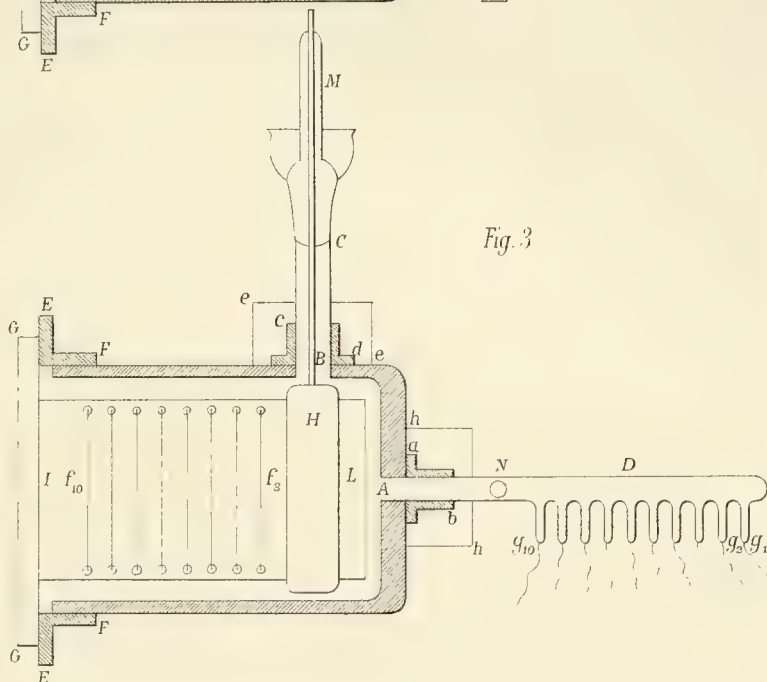
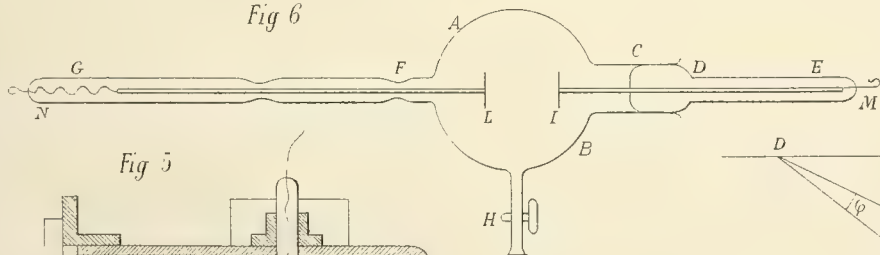
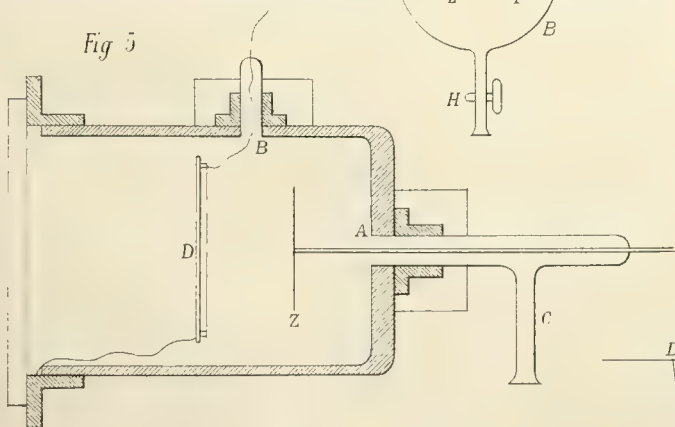
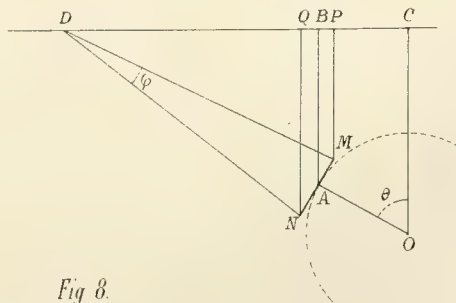
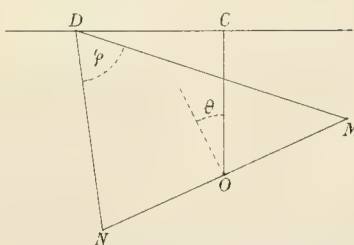
Anche qui se si aumenta un poco il potenziale del conduttore *L*, si hanno deviazioni troppo grandi per essere misurabili, con tutte le distanze fra *I* ed *L* che si possono ottenere nell' apparecchio; diminuendolo invece di più in più, l' effetto del magnetismo poco a poco sparisce.

Ponendo l' elettrocalamita in modo che le linee di forza magnetica sieno dirette secondo l' asse dei due elettrodi, si ha un effetto simile, ma che nel caso mio era assai debole non potendo per la forma dell' apparecchio, accostare questa volta abbastanza l' elettrocalamita. Ad ogni modo non ho avuto indizio che l' azione dipenda dalla direzione del campo magnetico.

Infine si ha un effetto abbastanza manifesto anche adoperando un campo magnetico più debole, per esempio quando il polo dell' elettrocalamita si pone a 30 o 40 cent. dall' apparecchio, o quando ad essa si sostituisce una semplice calamita d' acciaio.

Quantó è stato detto in questo capitolo deve considerarsi solo come

una notizia preliminare, su fenomeni che studierò forse in seguito in modo più completo. Tale notizia però doveva trovar posto in questo scritto, stante le relazioni che i fenomeni stessi presentano coi fenomeni fotoelettrici, alla descrizione dei quali questa Memoria era principalmente dedicata.

A. Righi dis. E. Contoli, inc. lit. G. Wenk e Figli — Bologna.

ANATOMIA DEL FRUTTO DELLE CASUARINEE

RICERCHE ANATOMICHE SULL' EMBRIONE

DEL

PROFESSOR FAUSTO MORINI

MEMORIA PRIMA

(Letta nella Seduta del 13 Aprile 1890)

(con tre Tavole)

Da molto tempo occupato nello studio anatomico del frutto delle *Casuarinee*, sarebbe stato mio desiderio presentare un' unica Memoria intorno a detto studio, la quale contenesse una completa esposizione della anatomia del frutto stesso. Siccome peró le mie osservazioni relative agli integumenti embrionali e specialmente quelle che si rapportano all' istogenesi dei tessuti costituenti gl' invogli anzidetti, non hanno ancora raggiunto quel grado di perfezione e di certezza che io mi era proposto; e poiché, d' altra parte, i limiti imposti nella estensione delle Memorie da stamparsi negli Atti di questa R. Accademia delle Scienze, non mi avrebbero consentita la pubblicazione dell'intero lavoro; cosí, ho creduto opportuno procedere ad una divisione di questo in due parti, la prima, che ora mi onoro di presentare a quest'Illustre Accademia, é dedicata a *Ricerche anatomiche sull' embrione delle Casuarinee*, la seconda lo sará alla *Anatomia* ed all'*Istogenesi* degl' integumenti embrionali.

Com'è noto, le Casuarinee costituiscono una famiglia importantissima, i cui individui presentano una curiosa analogia nell'aspetto esteriore cogli Equiseti; e colle Conifere riguardo alle fruttificazioni femminee. Dalla generalità dei Botanici con Eichler ed Endlicher sono collocate fra le Amentacee in vicinanza delle Miricacee. Non poche però sono le ragioni che rendono dubbio un simile avvicinamento, massime se si considerano 1° le rilevantissime trasformazioni nei fiori maschili e femminili, che conviene ammettere essere avvenute nelle Casuarine, onde potere collegare alla struttura florale delle Miricacee quella delle Casuarine e per conseguenza stabilire l'affinità di queste con quelle; 2° la formazione ovulare, la quale è ben diversa da quella delle Miricacee e più concorderebbe con quella delle Cupulifere.

La definitiva risoluzione di una tale oscura e grave questione, della vera affinità cioè delle Casuarinee, potrà essere più specialmente attesa dallo studio anatomo-morfologico di quegli apparecchi essenziali che sono i fiori maschili e femminili, inspirato eziandio (1) ai retti criteri della morfologia comparata; però, anche lo studio istologico (ed istogenetico) e morfologico del frutto, facendo esattamente conoscere una altra importante fase vitale delle Casuarinee, non potrà non riuscire molto utile, contribuendo ad assegnare a queste piante tanto singolari, il vero posto che naturalmente loro compete.

Relativamente al contenuto di questa prima parte del lavoro, l'ordine delle ricerche intraprese è stato il seguente: dopo un rapidissimo cenno biografico, si procede ad una succinta esposizione della morfologia del fiore femmineo delle Casuarine, alla quale segue quella del frutto: poscia si passa allo studio dei caratteri generali macroscopici dell'embrione, il che serve d'introduzione alla Istologia di questo. Terminata l'esposizione delle ricerche, segue una sommaria comparazione dei risultati ottenuti, coi fatti corrispondenti osservati in altre Amentacee.

Le specie studiate, sono state specialmente due, la *C. quadrivalvis Forst.*, e la *C. equisetifolia Labill.*

La struttura del frutto della Casuarine può dirsi pressochè sconosciuta. Quantunque nelle Angiosperme siano stati pubblicati in questi ultimi anni numerosi ed interessantissimi lavori sull'Anatomia del frutto e dei semi, dovuti specialmente al Targioni-Tozzetti (2), al Lohde (3), al Godfrin (4),

(1) La questione della natura morfologica dei fiori maschili monandri delle Casuarine, meriterebbe secondo noi uno studio approfondito; certamente con questo si potrebbe migliorare moltissimo la conoscenza delle affinità delle Casuarinee.

(2) Studi intorno al guscio dei semi (Mem. Accad. Scienze di Torino). — Serie II, Tomo XV. 1855.

(3) Ü. d. Entwickelungsgesch. und der Bau einiger Samenschale. — Naumburg a. S. 1874.

(4) Etude histologique sur les téguments séminaux des Angiospermes. — Nancy. 1880.

al Bachmann (1), al Pirotta (2) e ad altri, nessuno finora si addentra in un esame istologico particolareggiato del frutto di dette piante. A questo si aggiunga che le nozioni che si trovano nei Trattati o nelle Opere generali di sistematica sono scarse od insufficienti, per non dire talora errate.

I fiori femminei delle Casuarinee portano, come i maschili, lateralmente due profille, e ciascuno di essi consta di un ovario ignudo, frequentemente biloculare, con un corto stilo e due stigmi mediani; il loculo posteriore è piccolissimo ed in generale abortisce; quello anteriore è fertile e contiene due ovuli pendenti ed anatropi, dei quali solamente uno perviene alla maturità.

Avvenuta la fecondazione, le profille s'ingrossano e si lignificano, e formano due grosse valve le quali aprendosi mettono in libertà il frutto. Il frutto è una samara od achenio alato (Tav. I, fig. 1), il quale è compresso ed appiattito lateralmente in seguito a pressione delle profille; l'ala riscontrasi nella sua parte superiore; ed in esso osservasi solamente una parte integumentativa e l'embrione.

Praticando una sezione longitudinale assile, perpendicolare alla superficie larga del frutto, scorgonsi anzitutto gl'integumenti embrionali formati, procedendo dall'esterno all'interno, 1° da una stratificazione di particolari fibre cilindriche molto allungate, insieme unite mediante piccoli prolungamenti trasversi, situati a distanze pressochè regolari e prodotti da ingrossamenti della membrana, 2° da uno inviluppo cotonoso grigio formato da uno strato di vasi spirali, diretti secondo il grande asse del frutto ed il cui ingrossamento è formato da un doppio filo, 3° infine abbiamo un guscio durissimo, di consistenza ossea, costituito da fibre, la cui cavità è quasi del tutto occlusa, sì rilevante è l'inspessimento della parete. La fig. 2 della Tav. I, dimostra a sufficienza la disposizione ed i principali caratteri di questi integumenti, nonchè la nervatura media dell'ala.

L'embrione ha un colorito biancastro, è depresso o schiacciato nello stesso senso del frutto, ed è accuminato dalla parte della radichetta ed arrotondato dalla parte dei cotiledoni (Tav. I, fig. 3). I due cotiledoni sono laminari a bordi arrotondati, eccetto nella loro parte inferiore in cui sono alquanto taglienti. (Tav. I, fig. 7, 8, 9, 12) e, come si vedrà meglio in seguito, si prolungano in basso oltre al punto in cui si continuano nel nodo cotiledonare del fusticino, per cui discendono ai lati della radichetta (questa veduta nella sua faccia appiattita), per circa un terzo della lunghezza di questa (Tav. I, fig. 3, *a*), prima mantenendosi disgiunti, e poscia alla loro estremità concrescendo insieme; e così si costituisce ad ambo i lati

---

(1) Die Entwickelungsgeschite u. d. Bau der Samenschale der Scrophularineen (Nov. Act. Ak. Leop. Car., Band XLIII. — Halle, 1880).

(2) Struttura del seme delle Oleacee. (Annuario dell'Istit. Bot. di Roma, Vol. 1; 1884).

della radichetta una specie di angusta doccia formata da due labbra cotiledonari, il pavimento della quale ascende fino alla base del primo verticillo di emergenze fogliari della gemmetta (Tav. I, fig. 5). L'asse embrionale é leggermente ricurvo in corrispondenza alla porzione terminale della radichetta.

Le dimensioni dell'embrione oscillano nella *C. quadrivalvis* fra mm. 2,50 a 3 di lunghezza, e mm. 1,50 a 2 di larghezza; nella *C. equisetifolia* fra mm. 2,10 e 2,60 di lunghezza, e mm. 1,30 e 1,70 di larghezza. La sua consistenza é piuttosto molle e quasi carnosa; la sostanza cotiledonare presentasi molto friabile.

L'embrione é costantemente avvolto da un integumento, formato da un solo strato, il quale, come vedremo fornito, di speciali caratteri, contribuisce alla protezione dell'embrione stesso. Non possiamo peró omettere di accennare che in corrispondenza all'apice della radichetta, detto integumento, aumenta molto in ispessore, cangiasi in un corto complesso cellulare cilindroide, per cui ivi costituisce una specie di sospensore dell'embrione (Tav. I, fig. 4).

Ed ora passiamo allo studio della gemmetta.

Per riconoscere bene la struttura di questa, conviene praticare due specie di sezioni, e cioé parallelamente al piano mediano dei cotiledoni. (Tav. I, fig. 2, 4; Tav. II, fig. 8), e tangenzialmente alla superficie dei cotiledoni (sezione longitudinale assile dell'embrione, perpendicolare al piano mediano dei cotiledoni) (Tav. I, fig. 5).

La gemmetta presentasi coniforme, leggermente depressa tangenzialmente ai cotiledoni, ed in essa anzitutto rilevasi un cono vegetativo sviluppatissimo (Tav. II, fig. 8; Tav. I, fig. 4, 5; Tav. III, fig. 1), alla cui sommitá si riscontrano dapprima quattro piccole papille od emergenze fogliari, disposte l'una rispetto all'altra ad intervalli regolari, e tutte trovantesi sulla stessa sezione trasversa della gemmetta, per cui sono evidentemente verticillate. A questo verticillo, segue un altro pure tetramero, alquanto piú sviluppato del precedente ed a papille o primordi fogliari alternati con quelli del precedente.

Procedendo oltre, abbiamo un terzo verticillo non piú tetramero, ma bensí dimero, i cui primordi sono esattamente situati nella linea mediana di ambo i cotiledoni. Infine, evvi un quarto ed ultimo verticillo, il piú sviluppato di tutti e formato pure da un verticillo dimero, ma alterno col precedente. In questo modo, procedendo secondo l'ordine di formazione o di fondazione dei primordi fogliari, cioé dal basso all'alto, riscontrasi un primo verticillo dimero e laterale; un secondo verticillo pure dimero, ma mediano; un terzo verticillo tetramero diagonale; un quarto verticillo tetramero alterno col precedente, e per conseguenza medianolaterale.

Nella fig. 5 della Tavola I, potendosi osservare la gemmetta in rilievo per trasparenza sotto una sezione di uno dei cotiledoni, (tangenziale alla superficie di questo), si nota prima di tutto completamente il primo verticillo che è inferiore, poscia vedonsi due primordi fogliari del terzo verticillo ed altri due dello stesso verticillo, non bene visibili perchè parzialmente ricoperti dai precedenti, infine rilevansi le due papille laterali dell'ultimo verticillo. Questo interessante ordinamento acropeto dei primordi fogliari che, meno uno scarso numero di eccezioni, con tenui varianti, venne costantemente osservato, potè essere messo in una bella evidenza mediante sezioni trasversali e successive della gemmetta dall' origine dei cotiledoni all' apice della gemmetta; dalla fig. 12 alla 16 della Tav. I, e dalla fig. 1 alla 5 della Tav. II, si ha la dimostrazione dei fatti ora esposti; mentre la rappresentazione teorica, si ha nel diagramma delineato nella fig. 5 della Tav. II.

Riguardo alla struttura della gemmetta (Tav. II, fig. 8), questo devesi notare che il cono vegetativo è tutto formato da un tessuto meristematico a cellule poliedriche, più o meno regolari, vestito da un'epidermide a cellule cubiformi provviste di un esile straterello cuticulare. I primordi fogliari sono composti dello stesso meristema e della medesima epidermide ma più ci avviciniamo al centro della gemmetta ed alla parte inferiore di questa, nel punto in cui si fa transizione al nodo cotiledonare dell' asse embrionale, maggiori sono le modificazioni che subisce detto parenchima infatti, questo mostrasi costituito da cellule di dimensioni ben più rilevanti pur conservandosi sempre poliedriche e prive di meati intercellulari; notisi poi che a partire dal nodo cotiledonare, le cellule si fanno sempre più spiccatamente poliedriche ed allungate secondo l' asse longitudinale dell' ambrione (Tav. II, fig. 8, *pr.*).

Mentre l'epidermide che veste la base delle papille del primo verticillo, si continua in quella che cuopre la doccia cotiledonare (Tav. I, fig. 5), la epidermide dei primordi del secondo verticillo continuasi direttamente nell'epidermide della faccia interna o superiore dei cotiledoni.

Nei cotiledoni anzitutto dobbiamo considerare la nervatura. Praticando una sezione di essi, tangenziale alla loro superficie, ed esaminando al microscopio con un piccolo ingrandimento, scorgesi molto distintamente il sistema di nervazione. Tre nervi principali, che tutti partono dallo stesso punto dalla base od dal punto d'origine dei cotiledoni (Tav. II, fig. 7), ma dei quali però il medio è alquanto più grosso, si dirigono all'apice cotiledonare, mano mano costituendo numerose ramificazioni secondo il tipo monopodiale, le quali alla lor volta si ramificano nell' istesso modo, per dare origine ad una specie di trabecolato assai bene appariscente. Se si fa una sezione trasversa in corrispondenza al punto di origine dei cotiledoni, puossi osservare che per brevissimo tratto la nervatura cotiledonare

mantiensi indivisa (Tav. I, fig. 11), ma ben tosto si rileva una ramificazione del nervo primitivo medio (Tav. I, fig. 12), per la quale si costituiscono le tre nervature principali anzidette.

La fig. 1 della Tav. III mostra una sezione trasversa ad un notevole ingrandimento della gemmetta e dei cotiledoni all'altezza del primo verticillo (nella porzione libera dei suoi membri), e della porzione basale del secondo verticillo. Tutti i fatti dianzi accennati in rapporto alla struttura della gemmetta, si possono osservare riconfermati se si esamina attentamente tale figura; questo solo peró vogliamo notare, e cioè che mentre il tessuto parenchimatico del primo verticillo é bene sviluppato in causa dell'età più avanzata di questo, il parenchima delle emergenze del 2° verticillo é ancora allo stato di meristema evidentissimo, a cellule piccolissime, le quali peró nel mezzo fanno gradatamente transizione al parenchima centrale della gemmetta. — A questa fase, la gemmetta ha una figura ellittica: astrazion fatta dalla porzione libera delle emergenze del primo verticillo, la gemmetta mostrasi qui notevolmente schiacciata nel senso perpendicolare alla mediana dei cotiledoni ed ha una figura rettangolariforme, il che devesi attribuire alle condizioni speciali di pressione in cui ha avuto luogo lo sviluppo della gemmetta, dovute ai cotiledoni e (riferendoci alla fase in cui é stata delineata detta figura) alle papille del primo verticillo. Dai cotiledoni passando alla forma ed alla speciale struttura degli integumenti embrionali, e da questi ai caratteri peculiari sia di disposizione che di consistenza delle due profille nella fruttificazione, si risale al reciproco ordinamento di ogni coppia di profille, ossia all'organizzazione generale e fondamentale della fruttificazione, al che é essenzialmente dovuta la forma dianzi accennata della gemmetta.

Riguardo alla struttura dei cotiledoni, abbiamo anzitutto l'epidermide interna e quella esterna. La prima nella faccia appiattita de' cotiledoni, mostrasi composta di elementi cubiformi che mantengono una certa regolarità; in corrispondenza alla gemmetta, le cellule epidermiche diventano irregolari, aumentano in volume, e si fanno irregolarmente prismatiche o poliedriche (Tav. II, fig. 8). La seconda componesi di elementi cubiformi, peró alquanto depressi ed allungati nel senso del grande asse dei cotiledoni. Ambo le epidermidi si confondono nella porzione terminale dei cotiledoni, ove le singole cellule hanno maggiori dimensioni, sono cubiformi, ma la loro parete esterna é fortemente convessa (Tav. III, fig. 2). In corrispondenza alla pagina interna dei cotiledoni osservasi un palizzata composto di parecchie stratificazioni di cellule prismatiche a base penta-esagonale (Tavola II, fig. 8; Tav. III, fig. 1, 2), il quale in prossimità del punto di emersione della gemmetta si modifica moltissimo: i suoi elementi si impiccoliscono fino a costruire un parenchima di piccole cellule poliedriche

le quali si continuano col parenchima basale delle emergenze del secondo verticillo; lungo la faccia interna appiattita dei cotiledoni, gli strati del palizzata aumentano in numero fino ad aversi sul mezzo di essa circa 4, 5 piani cellulari. Nella faccia opposta, riscontrasi un tessuto formato di grandi elementi irregolarmente poliedrici (lo spugnoso), senza lacune intercellulari. I cotiledoni sono percorsi da cordoni o fasci di tessuto procambiale (Tavola II, fig. 8; Tav. III, fig. 1, 2), costituiti da cellule cilindrico-prismatiche, di variabile lunghezza; tali fasci sono circondati da un parenchima di elementi poliedrici irregolari, i quali verso la pagina interna dei cotiledoni si cangiano gradatamente nel palizzata, e nell' esterna nello spugnoso.

Nella porzione terminale dei cotiledoni, cessa ogni differenziazione del mesofillo in spugnoso ed in palizzata; perocché si ha un parenchima di piccole cellule poliedriche più o meno regolari (Tav. III, fig. 2).

Un fatto importante devesi notare nel palizzata dei cotiledoni, ed esso è che, in prospicienza alla gemmetta, il palizzata perde totalmente i suoi caratteri, fino a metamorfizzarsi in un tessuto di piccole cellule esagonali-poliedriche; certamente questa contingenza è dovuta alla pressione reciproca esercitata dalla gemmetta e dai cotiledoni, per cui in detto tratto le cellule del palizzata non si sono potuto estendere od allungare nel senso radiale (Tav. III, fig. 1).

Gli elementi del palizzata, quelli dello spugnoso e le cellule epidermiche dei cotiledoni, sono ripiene di granuli di aleurone, interessantissimi pei loro caratteri.

L'aleurone che osservasi nel mesofillo, diversifica moltissimo specialmnte rispetto ai caratteri fisici da quello delle cellule epidermiche. È costituito da granuli ialini, numerossimi e tanto da riempire l'intera cavità cellulare; hanno una struttura omogenea, perchè mancanti d' inclusi, la loro forma non si può ben definire, la maggior parte però sono esagonali-poliedrici per la reciproca pressione; altri sono irregolarmente prismatici (Tav. II, fig. 9, 10, 11); i contorni loro sono ben netti, presentano un colorito luteolo leggerissimo e sono molto rifrangenti la luce. Fra un corpuscolo e l'altro si riscontra un esilissimo straterello di plasma fondamentale quasi omogeneo, il quale rendesi bene evidente colla distruzione dei granuli mediante la potassa diluita. (Tav. II, fig. 12). Nelle cellule mesofilliche contenenti l'aleurone, manca il nucleo. Nei granuli poliedrici, le dimensioni oscillano da μ 5,1 a μ 6,8 di lunghezza; da μ 6,3 a 9,2 μ di lunghezza in quelli prismatici.

I corpuscoli aleuronici delle cellule epidermiche hanno forma globulosa e sono molto più piccoli dei precedenti (variano in diametro da μ 1,8 a μ 2,6); nel rimanente hanno press'a poco gli stessi caratteri di quelli del mesofillo. Il loro numero non essendo così rilevante come nei secondi,

hanno potuto conservare la figura globulosa, mentre in mezzo ad essi é intercalato un plasma piuttosto abbondante. L' osservazione microscopica delle sezioni fresche venne fatta sempre nella glicerina concentrata, o nell'olio di ulivo o di garofani.

Non poche volte accade di osservare che la sostanza del corpuscolo aleuronico non é continua, perché nel suo mezzo rilevasi una piccola vacuola circolare, più o meno grande, che accenna ad una incipiente dissoluzione della sostanza medesima, analogamente a quanto ripetutamente da altri e da noi é stato osservato nei plastidi. (1)

Premettendo che i granuli dell'epidermide sono ben più delicati e facilmente alterabili di quelli del mesofillo, noteremo come per la prolungata azione dell'acqua, i corpuscoli stessi sono corrosi ed infine vengono distrutti; l'acido acetico pure li distrugge, ma con maggiore rapidità. L'alcool li rende molto più densi e meno splendenti , senza peró alterarne la struttura. La glicerina diluita li discioglie solamente in parte corrodendone i contorni; invece quella concentrata non li altera sensibilmente, se si fa eccezione di una maggior facoltà di rifrazione della luce che essi acquistano. La potassa molto diluita discioglie completamente i granuli di aleurone del mesofillo, lasciando peró sussistere il trabecolato plasmatico fondamentale (Tav. II, fig. 12) perché più resistente; con un po' di pratica, si può riuscire a fare delle bellissime preparazioni, assai istruttive. Nelle cellule epidermiche, con detto reagente, l'aleurone si distrugge e si confonde col plasma fondamentale in una unica massa granulare, contenente qua e là piccole e dense aggregazioni granulari di forma irregolare. Coll'etere, la massa corpuscolare aleuronica di ogni cellula subisce una contrazione rilevante, avendo luogo l'eliminazione o la dissoluzione della maggior parte del plasma ad essa interposta; quindi può dirsi che i corpuscoli quasi si toccano insieme; inoltre ciascun granulo diventa più consistente ed a contorni più spiccati. Il reattivo di Millon colora i granuli di aleurone in un rosso mattone; questi poi fissano avidamente le sostanze coloranti, il carmino, l'eosina, i colori d'anilina, la tintura d'Alkanna ecc.; l'ematossilina iodata del Sanfelice, ci é stata molto utile, inducendo nelle sezioni finissime una doppia colorazione abbastanza bene manifesta e cioé azzurra o violacea (quasi mattone) nei granuli di aleurone, ed azzurrognola nel plasma fondamentale. La tintura di Iodio ed il Cloroioduro di Zinco, li colorano in un giallo intenso.

Da queste ricerche é lecito concludere che i granuli di aleurone sono composti nella quasi totalità di sostanza albuminoide; diciamo nella quasi

---

(1) F. Morini — Intorno ad una speciale degenerazione delle leuciti. (Mem. R. Accad. Scienze di Bologna. (S. IV. T. IX.), 1888.

totalità, perchè l' azione dell' etere e del cloroformio parrebbe accennare alla presenza di traccie di sostanza oleosa. Anche nel plasma intergranulare sembra lecito ammettere non piccole quantità di materie oleose, per l' azione spiegata da questi due reagenti; arrogi, che detto plasma dimostrasi ben povero di sostanze proteiche. — Nessun altra particolarità venne dato di scuoprire, quantunque facessimo uso delle migliori reazioni impiegate per lo studio delle diverse specie di plasmi, e cioè di svariate forme di sostanze coloranti raccomandate dai più reputati istologi, della soluzione alcoolica di sublimato corrosivo e l' alcool acidificato con traccie di acido solforico usati con vantaggio dal Pfeffer (1), dal Tangl (2) e dal Pirotta (3) nei loro importanti lavori.

Notisi poi che la parete esterna delle cellule epidermiche, è coperta da un esile strato di cuticola; e che la membrana degli elementi del mesofillo, dello spugnoso e del procambio, è cellulosica.

Per completare lo studio dell' embrione, necessita d' indagare la struttura della radichetta. Per lo studio di questa si sono praticati tre sistemi di sezioni: delle sezioni longitudinali assili parallele al piano mediano dei cotiledoni, delle sezioni longitudinali assili perpendicolari al piano mediano medesimo, e delle sezioni trasverse successive dall' apice della radichetta al nodo cotiledonare del fusticino. I metodi di rischiaramento usati furono gli stessi che per la gemmetta, e cioè la potassa e l' acido acetico, oppure l' acqua di Javelle.

Già ad un piccolo ingrandimento (Tav. I, fig. 4) scorgesi nella radichetta dalla sua base all' apice, una differenziazione in quattro specie di tessuti, di un parenchima midollare, di una fascia procambiale, di una corteccia primaria e della caliptra. Quest' ultima giunge circa al terzo inferiore della radichetta, cioè alla distanza di circa μ 34 dall' apice di questa; il pleroma ed il periblema sono già bene differenziati a circa μ 11 della sommità della radichetta; il tessuto midollare poi comincia ad essere differenziato alla metà circa della radichetta.

Le figure della Tav. I, fig. 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, le quali sono sezioni trasverse successive della radichetta, dimostrano la figura di questa, la disposizione ed il graduale accrescimento del periblema e del pleroma, il processo dell' entrata degli elementi procambiali nei cotiledoni, nonchè i rapporti della radichetta colle porzioni inferiori appendicolari de' cotiledoni, discendenti lungo i suoi margini laterali.

La forma della radichetta dapprima schiacciata tangenzialmente alle

---

(1) Untersuch. ü d. Proteinkörner (Jahrbüch f. wissensch. von Pringsheim 1872).
(2) Das protoplasma der Erbse (Sitzungsberich. K. K. Akad. Winssensch. Wien, 1877).
(3) R. Pirotta. — Op. cit., pag. 36, 37, 38.

faccie dei cotiledoni (fig. 6), tende lentamente a divenire cilindrica (fig. 7) più ci avviciniamo alla sua base. Mentre fino a quasi tutta la porzione nuda della radichetta, cioé al di sotto delle appendici cotiledonari il procambio costituisce un tessuto continuo, senza traccia di alcuna differenziazione nel suo interno, in corrispondenza a tali appendici o, come s' é detto press' a poco alla metà della lunghezza della radichetta, ha luogo la costituzione del parenchima midollare, il quale poi direttamente continuasi con quello della gemmetta.

In quella parte della radichetta che non é ricoperta dalla caliptra, e che dicesi asse ipocotileo dell' embrione, riscontrasi anzi tutto un' epidermide formata da cellule cilindrico-prismatiche (Tav. III, fig. 5, 6, 7) la cui parete esterna presentasi cuticularizzata; immediatamente sotto tale epidermide, la quale in alto continuasi con quella dei cotiledoni, bruscamente passando dalla forma accennata a quella cubiforme depressa con un volume molto maggiore, osservasi una stratificazione, composta di un unico piano cellulare bene differenziato dall' adiacente periblema, e costituito da tante cellule cubiformi o leggermente prismatiche (col grande asse perpendicolare alla superficie della radichetta), e disposte a paia o coppie, perché provenienti dalla scissione di una cellula madre primitiva (Tav. III, fig. 7).

Poscia, abbiamo il parenchima della corteccia primaria, il quale é disposto in serie cellulari benissimo differenziate e riconoscibili, sia nella direzione tangenziale che in quella radiale della radichetta. Le singole cellule hanno forma più o meno regolarmente prismatica a base esagonale, ma il maggior diametro del prisma é preferentemente diretto secondo il grande asse trasverso della radichetta, per cui in sezione longitudinale assile parallela al primo mediano di cotiledoni, (Tav. III, fig. 3) tali cellule appaiono esagonali, ed in sez. long. assile tangenziale appaiono per regola rettangolari allungate (Tav. III, fig. 7). Dette serie sono regolarissime, ed a partire dall' apice della radichetta, pervengono sino alla base, naturalmente aumentando di numero, tanto nel senso radiale che nel tangenziale (Tav. III, fig. 3).

Il processo con cui si costituiscono queste serie rendesi ben evidente in sezioni della radichetta, tangenziali e perpendicolari alla superficie dei cotiledoni (Tav. III, fig. 7). Dapprima, ciascuna cellula della corteccia primaria, la cui individualità conservasi mediante il residuo di piccoli meati intercellulari anche dopo avvenute le prime segmentazioni, si divide trasversalmente in due cellule, le quali poi si segmentano in direzione radiale, e così hanno origine le serie longitudinali radiali, le quali poi si moltiplicano nella direzione radiale mediante divisioni tangenziali delle singole cellule. Le più interne stratificazioni, cioé quelle che stanno in contiguità al pleroma, mostransi alquanto più piccole delle rimanenti e leggermente variate nella figura per cui formano una specie di stratificazione, la quale poi non é

che la guaina vascolare, corrispondente alla *Gefassbündelscheide* di parecchi Botanici, alla *couche protectrice* di Janczewski ed alla *Kernscheide* di Eriksson.

Il cilindro centrale è differenziato nella sua parte esterna in un esile straterello, sufficientemente visibile nella porzione superiore dell' asse ipocotileo, e composto di elementi prismatici notevolmente allungati secondo il grande asse longitudinale della radichetta, e molto più lunghi e ristretti delle cellule della corteccia primaria ed aventi pareti esilissime; tale straterello, composto di pochissimi piani cellulari, corrisponde al *pericambio* o *strato rizogenico* o *periciclo* il quale dalla base giunge fino quasi al punto in cui comincia a disegnarsi la caliptra. Subito all' indentro di questo strato, riscontriamo una fascia formata da molte stratificazioni cellulari costituite da elementi aventi l' istessa figura di quelli del pericambio, ma più lunghi ed angusti a membrana esilissima e strettamente insieme collegati; tale fascia è il *procambio*. Infine, avvolto da questa fascia abbiamo il midollo, il quale, mancante nella sola porzione inferiore dell' asse ipocotileo, risulta formato da un parenchima di cellule cubiformi-poliedriche, delle quali sono più grosse quelle che occupano il mezzo del midollo stesso; però, evvi sempre una netta demarcazione fra questo ed il procambio (Tav. III, fig. 6). Sebbene non così evidentemente come nella corteccia primaria, il procambio ed il pericambio, sono costituiti da tante serie degli anzidetti elementi, secondo il senso radiale ed il tangenziale.

L' apice vegetativo della radichetta non presenta importante differenza di struttura nella *C. quadrivalvis* di fronte alla *C. equisetifolia*. Abbiamo tre strati o meristemi (*Istogeni* di Reinke), composti 1° del *pleroma* o *cilindro centrale*, del *periblema*, o *corteccia primitiva* e del *dermocaliptrogeno* o *generatore comune della epidermide e della caliptra o cuffia*. Nonostante ripetute sezioni longitudinali assili, non abbiamo potuto rilevare fra detti meristemi una distintissima demarcazione: nel loro insieme però si distinguono benissimo l' uno dall' altro, perchè appunto ognuno mostra caratteri peculiari, ma nel tratto in cui sono a contatto i singoli complessi cellulari non presentano rilevanti differenze. Ad ogni modo però, eccone i caratteri differenziali (Tav. III, fig. 3, 4).

Il pleroma termina, restringendosi notevolmente, in un tessuto meristematico speciale: le sue cellule si accorciano piuttosto bruscamente e tendono a divenire isodiametriche, per cui infine si ha una massa cellulare compatta situata all' apice, e composta di piccole cellule poliedriche più o meno regolari (Tav. III, fig. 4, *pl*[i]). Queste cellule dividendosi nel senso trasversale al grande diametro della radichetta, aumentano il numero degli elementi di ogni singola serie pleromica; ha poi luogo la moltiplicazione delle filze cellulari, mediante divisioni tangenziali e radiali. Relativamente al pericambio,

questo come s' è detto, non si prolunga fino all' apice del pleroma, per cui devesi ritenere che esso proviene dalla segmentazione degli elementi esterni del procambio, che sovrastano al punto d' origine del pericambio medesimo; la stessa origine devesi attribuire al midollo relativamente agli elementi interni del procambio.

Le iniziali dell' altro istogeno, cioè del periblema che segue immediatamente il pleroma, consta di un tessuto nel quale la stratificazione secondo il senso trasversale è abbastanza evidente, di più i singoli elementi di ogni piano cellulare sono cubiformi alquanto depressi. Il numero di detti strati non è ben definito, varia da 5 a 6; nella *C. quadrivalvis* il meristema periblemico è molto grosso, meno sviluppato invece è nella *C. equisetifolia,* (Tav. III, fig. 4, pe^1). In seguito alle segmentazioni del periblema, si costituiscono le serie o filze cellulari già descritte parlando della corteccia primaria, ed il cui numero va rapidamente aumentando più ci allontaniamo dall' apice della radichetta. Le cellule delle serie periblemiche vicine al meristema apicale, sono quasi regolarmente esagonali, acquistano poi la forma dianzi accennata mano mano si giunge nella corteccia primaria.

Come ebbe a notare il Janczewski per lo sviluppo del periblema (1) nell' apice vegetativo delle radici di Helianthus, e confermarono Eriksson (2) e Flahault (3) come carattere predominante delle Dicotiledoni, ed ultimamente osservò il Pirotta (4) negli embrioni delle Oleacee, la genesi del periblema è chiaramente centripeta, poiché dapprima si differenzia la stratificazione più esterna che puossi denominare strato sottoepidemico, poscia la porzione media del periblema ed infine lo strato interno o guaina vascolare.

La Cuffia ed il dermatogeno traggono le loro prime fondamenta da un meristema comune o dermocaliptrogeno, *stratocaliptrogenico* del Janczewski. Abbiamo un' unica stratificazione trasversale, i cui caratteri rammentano quelli delle iniziali del periblema, e che mediante divisioni tangenziali dirette all' interno danno origine al dermatogeno, ed alla caliptra quelle dirette all' esterno; queste due specie di tessuti poi si differenziano mediante successive segmentazioni radiali.

Il dermatogeno è un' unica stratificazione cellulare benissimo differenziata ed appariscente fino al meristema che le dà origine; è ricoperto della ca-

---

(1) Recherches sur l' accroissement terminal des racines des Phanérogames. — Ann. Scien. nat. V. Série, T. XX.; 1874.

(2) Ueber d. Vegetationospunkt der Dicotylen-Wurzeln, (Botan. Zeitung, 1876).

Ueber das Urmeristem der Dicotylen-Wurzeln. (Juhrbüch. f. wissensch. Botan. von Pringsheim. B. XI, 1877).

(3) Recherches sur l' accroissement terminal de la racin des Phanérogames (Ann. Scien. nat. VI Série, T. VIII, 1878).

(4) L. cit. pag. 44.

liptra, e più i suoi elementi si allontanano dall' apice della radichetta più esso si avvicina alla superficie di questa, mentre il periblema s' ingrossa vie più, e va assotigliandosi la fascia caliptrale: infine, il dermatogeno rendesi all' esterno e costituisce quivi l' epidermide della radichetta (Tav. III, fig. 3, *g*).

La caliptra è cospicuamente sviluppata e la sua struttura è interessante; è grossissima all' apice della radichetta e va mano mano decrescendo in ispessore fino a circa tutto il terzo inferiore della radichetta, oltre il quale finisce per continuarsi nell' epidermide dell' asse ipocotileo. In contiguità alle iniziali che danno origine alla caliptra, il tessuto di questa conserva per breve tratto con sufficiente evidenza i caratteri di un parenchima meristematico, i quali però si perdono completamente già ad una certa distanza da dette iniziali; tale parenchima è formata di cellule a parete molto esile disposte con notevole regolarità in serie trasversali e in serie parallele all' asse longit. della radichetta. A poco a poco da cubiformi depresse, o tabulari le cellule acquistano forma poliedrica a sezione più o meno regolarmente esagonale; nel tempo stesso aumentano considerevolmente in volume, mentre la membrana s' ingrossa assai per cui infine si costituisce una specie di tessuto collenchimatico, con non rari meati intercellulari. La stratificazione esterna della cuffia, formata da cellule cubiformi molto grandi e colla parete esterna molto convessa in corrispondenza all' apice della radichetta, mano mano la caliptra si avanza su questa, subisce una lenta modificazione, perocchè le sue cellule s' impiccoliscono fino a mostrare un' uniformità di caratteri coll'epidermide dell'asse ipocotileo, colla quale si continuano. Sulla superficie laterale della radichetta la cuffia si assotiglia gradatamente fino a scomparire del tutto allorchè il dermatogeno diviene superficiale: infatti lungo detta regione, la caliptra è formata da serie cellulari radiali e parallele alla superficie della radichetta, le quali decrescono di numero fino a ridursi ad uno strato unico formato da una sola serie tangenziale, la quale da ultimo scompare.

Così descritta la radichetta, dobbiamo mettere in rilievo il fatto importante, e cioè che mentre i fitoistologi sono divisi in due pareri, ammettendo gli uni un gruppo unico di iniziali comune sì al pericambio che al resto del pleroma e gli altri ritenendo due specie di iniziali per queste due forme di tessuto, nelle Casuarinee riscontrasi che la differenziazione del pericambio ha luogo lungi dall' apice del pleroma, e mediante segmentazioni di una zona circolare di cellule procambiali esterne.

Nella descrizione istologica della radichetta, abbiamo fatto uso dei termini di pleroma, periblema, dermatogeno e dermocaliptrogeno, intendendo con queste denominazioni di esclusivamente designare la fase d' incipiente differenziamento dei tessuti fondamentali del corpo della radice e del caule

e cioè il cilindro assile, la scorza e l'epidermide; e ripudiando in gran parte le conclusioni che scaturiscono dall'omai abbandonata teoria di Hanstein intorno all'attività formativa dei tessuti *primari* del meristema terminale delle radici, specialmente poi quelle che si riferiscono ai rapporti del pleroma e del periblema nella fondazione delle gemme o degli assi di 2° ordine e dei fillomi. Così definite e ristrette nel loro significato le espressioni dell'Hanstein, sembraci che queste possano benissimo essere adoperate con utilità, servendo esse a denotare, come s'è detto, i primordi della differenziazione dei tessuti fondamentali, ovvero differenti regioni del cono vegetativo.

Per tale maniera di interpretare la formazione *iniziale* dei tessuti fondamentali, corroborata del resto da fatti innumerevoli, noi sentiamo di non potere interamente ammettere l'opinione di uno dei più valorosi avversari della teoria di Hanstein, il Prof. Delpino, il quale nel fare la critica del lavoro di Eriksson sul punto vegetativo delle radici delle Dicotiledoni, indotto da considerazioni di omologia dell'accrescimento apicale delle crittogame superiori, recisamente afferma essere fondamentalmente uno il tipo di evoluzione delle radici in tutto il regno vegetale, con due modificazioni, una valida per le crittogame superiori, l'altra per le fanerogame; in seguito a ciò Egli ritiene che nell'apice vegetativo delle radici (o degli assi) delle Fanerogame esiste un meristema pluricellulare (*poliarchico*) il quale con prolificazioni cellulari rivolte all'esterno genera la caliptra, e con prolificazioni volte all'interno genera ed allunga il corpo della radice (1); questo meristema apicale (il quale del resto *senza veruna alterazione nel tipo*, nelle diverse specie presenterebbe diversi caratteri) rappresenterebbe una specie di nucleo meristematico o complesso cellulare generatore, non differenziato nelle regioni del pleroma, del periblema, ecc.

Riassumendo adunque, rispetto alla struttura della radichetta, le due Casuarine qui esaminate appartengono al *tipo comune* delle Dicotiledoni dell'Holle (2), il quale pel primo restrinse la troppo lata generalizzazione del Reinke, che volle ridurre tutte le Angiosperme ad un tipo solo all'*eliantino* e, più specificatamente, al 1° tipo dell'Eriksson, od al 3° del Janczewski; in tutti questi tipi è naturalmente inclusa la struttura dell'apice radicale del *Helianthui* studiato dal Reinke e dal Janczewski. Detto tipo di struttura di cui si hanno tanti esempi nelle Labbiate, Ombrellifere, Composte, Oleacee ecc., è caratterizzato dalla presenza nella sommità vegetativa delle

(1) Annuario scientifico ed industriale; anno 1876; Rivista Botanica del Prof. Delpino, pag. 458, 459.

(2) Ueber den Vegetationspunkt der Angiospermenwurzeln, insbesondere die Haubenbildung. (Botan. Zeitung, 1876).

radici dei tre gruppi meristematici dianzi studiati, del *pleroma,* del *periblema* e del *dermocaliptrogeno* (che corrisponde al *dermatogeno* di Hanstein ed alla *couche calyptrogene* di Janczewski). — In quanto alle serie iniziali del periblema, osservate nelle Casuarine, le specie da noi studiate si devono riferire a quel piccolo gruppo di Dicotiledoni, in cui il periblema proviene da più serie trasversali di cellule (Oleacee) (1).

Passando ora ad un raffronto della struttura della radichetta, (che è quella che più direttamente c' interessa) delle Casuarine con quella di altre Amentacee, ha una speciale importanza l' osservazione che nei gen. *Castanea, Betula, Carpinus, Quercus* (2) il piano generale di struttura della radichetta è il medesimo di quello ora studiato. Quindi crediamo di non andar molto lungi dal vero, esprimendo per considerazioni di omologia la congettura che il 1° tipo dell' Eriksson si riscontra in molte altre Amentacee ancora, per cui probabilmente potrassi ricondurre ad una unica forma fondamentale la caratteristica istologica ed istogenica della radichetta embrionale di dette piante. Invece, nella gemmetta si riscontrano rilevanti differenze, così ad es. nella *Castanea vesca,* il cono vegetativo del fusticino ha la forma di una tozza papilla emiglobosa, molto depressa; ma queste differenze hanno una secondaria importanza essendo esse evidentemente prodotte da ragioni biologiche, correlate a cause esteriori, ad es. alla pressione marcatissima che in tutte le direzioni subisce la gemmetta della C. vesca, anche pel speciale sviluppo dei cotiledoni; da questa ragione forse dipenderà anche la mancanza di primordi fogliari che ivi si osserva. Notisi poi che nella C. vesca, la fascia procambiale che entra nei cotiledoni ha subito una maggiore evoluzione in confronto di quella degli embrioni delle Casuarine, perchè nella sua parte centrale è già differenziata in fasci di tracheidi.

Per completare lo studio dell' embrione, necessita occuparci della distribuzione dei granuli di aleurone nei diversi tessuti di quello, nonchè della descrizione del semplice strato che avvolge tutto l' embrione.

Eccezion fatta dall'epidermide, la gemmetta contiene dei granuli di aleurone in tutte le sue cellule, le quali anzi ne sono completamente ripiene: piccolissimi negli strati sottoepidermici, i corpuscoli vanno mano mano ingrossandosi nell' interno e nel basso della gemmetta, ove le cellule aumentano di volume. L' intero parenchima del nodo cotiledonare è ripieno di aleurone, il quale esiste altresì riccamente in tutte le cellule della corteccia primaria, fino in vicinanza del meristema iniziale periblemico e nel parenchima midollare della radice; sotto forma di piccoli corpuscoli globosi, l' aleurone

---

(1) R. Pirotta. — L. c. pag. 44.

(2) F. Morini — Contribuzione all' Anatomia microscopica dell' embrione delle Cupulifere. Rendiconti della R. Accad. delle Scienze di Bologna, 1888).

trovasi depositato nell' epidermide dell' asse ipocotileo. L' aleurone manca nei tre meristemi della radice, in tutta la caliptra, nel cilindro centrale od assile, e nei fasci di procambio dei cotiledoni. Tanta ricchezza di aleurone, d' altronde spiegata per la completa mancanza del perisperma e dell' albume, dimostra come l' embrione della Casuarine abbia in sè raccolto un' abbondante riserva di sostanze alimentari, le quali poi verranno utilizzate durante la germinazione.

L' embrione della C. quadrivalvis e della C. equisetifolia è costantemente rivestito in tutti i suoi punti da un integumento protettore (Tav. I, fig. 4, 5, 7, 8, 9; Tav. III, fig. 6), formato da un solo piano cellulare. I singoli elementi che compongono questo, hanno rilevanti dimensioni e molto maggiori di quelle degli elementi epidermici dei cotiledoni, ed hanno forma in generale irregolarmente prismatica molto allungata, secondo il grande asse dell' embrione; in corrispondenza all' apice della radichetta, conservando essi l' istessa direzione si ha che in tale punto, l' involucro acquista maggiore spessore, per cui è aumentata la protezione della sommità vegetativa della radichetta; sono liberi da qualsiasi aderenza colla sottostante epidermide, le loro membrane sono gialle e molto grosse; la parete esterna poi mostrasi grossissima, è colorata in un giallo intenso ed è stratificata in tante esilissime lamelle aventi decorso leggermente flessuoso od ondulato. Detta parete esterna, insolubile anche nell' acido cloridrico concentrato, mostrasi cuticularizzata, ad eccezione di un sottile strato interno in diretto rapporto col contenuto, il quale conservasi cellulosico. Il plasma di queste cellule consta di minuti granuli globulari, i quali sono di natura proteica; inoltre osservasi un nucleo globuloso omogeneo, molto rifrangente la luce.

Riassumiamo ora in brevi proposizioni generali i risultati delle nostre ricerche sulla *C. quadrivalvis* ed *equisetifolia*.

1. Il frutto è una samara od achenio alato, appiattito in seguito a pressioni delle due profille, nel senso perpendicolare alla mediana di queste. — L' invoglio embrionale è nettamente differenziato in quattro stratificazioni.

2. Consecutivamente a tal forma del frutto, l' embrione è pure schiacciato, e lo è perpendicolarmente alla mediana dei cotiledoni; la radichetta è sempre in corrispondenza dell' ala.

3. La gemmetta è molto sviluppata e presenta un cono vegetativo molto grosso. I primordi meristematici fogliari vi sono per regola ordinati in 4 verticilli, i primi due composti di due membri, gli altri di quattro membri, tutti fra loro alternati. La disposizione verticillata delle foglie delle Casuarine adulte, trovasi adunque già concretata nello stato embrionale, secondo uno sviluppo progressivamente ascendente, perchè i verticilli più giovani

sono costituiti da 4 membri; quindi il numero dei membri dei verticilli successivi, trovasi già avviato ad un progressivo aumento.

4. I Cotiledoni sono laminari, presentano tre principali nervature, che alla base di essi peró si confondono insieme in un unico ramo; e sono costituiti da un palizzata e da uno spugnoso, separati da fasci di procambio. Nella loro porzione terminale cessa ogni differenziazione di queste due specie di tessuti.

5. Riscontrandosi tre meristemi distinti, il *pleroma*, il *periblema* ed il *dermocaliptrogeno,* all' apice della radichetta, la struttura di questa é riferibile al *tipo eliantino* del Reinke, al tipo comune delle Dicotiledoni dell' Holle, al 3° tipo del Janczewski, od al 1° dell' Eriksson. — Nella parte superiore dell' asse ipocotileo osservasi l' *epidermide,* la *corteccia primaria,* la *guaina vascolare,* il *pericambio o strato rizogenico,* il *procambio* ed il *parenchima midollare.*

6. Fatta eccezione del procambio e del pericambio, della caliptra, delle cellule iniziali dei 3 meristemi suddetti e dell' epidermide della gemmetta, in tutto il resto dell' embrione osservasi che le cellule sono sempre completamente o quasi ripiene di speciali granuli di aleurone, senza inclusi.

7. Il piano generale di struttura della radichetta é essenzialmente lo stesso che quello delle altre Amentacee finora studiate.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

TAVOLA I.

Fig. 1.ª — Frutto di *Casuarina quadrivalvis* veduto di faccia.
a, Ala del frutto.
n, Nervatura di questa.
f, Frutto propriamente detto. × 2.

Fig. 2.ª — Sezione longitudinale assile del frutto di *C. quadrivalvis,* parallela alla cresta mediana delle 2 profille.
ie, Invoglio esterno del frutto formato da fibre particolari.
im, Invoglio mediano formato da una stratificazione di vari spirali.
ii, Strato interno durissimo e formato da fibre sclerotizzate.
em, Embrione.
n, Nervatura dell' ala. × 7.

Fig. 3.ª — Embrione di *C. quadrivalvis* veduto dalla superficie appiattita dei cotiledoni.
r, Radichetta.
c, Massa cotiledonare che discende alquanto ai lati della porzione superiore della radichetta, cioè nel punto *a.* × 4.

Fig. 4.ª — Sezione longitudinale assile dell' embrione di *C. quadrivalvis,* parallela al piano mediano dei cotiledoni, ovvero perpendicolare alle superficie di questi.
c, Cotiledoni.
r, Radichetta.
g, Gemmetta.
d, Epidermide.
p, Periblema della radichetta.
pl, Pleroma, che alla metà circa della radichetta si differenzia in mi-

dollo ed in procambio in corrispondenza alla base della gemmetta il procambio penetra nei cotiledoni.

m, Midollo.

e, Commessura cotiledonare.

i, involucro dell' embrione, il quale alla punta della radichetta forma una specie di sospensore *s.* × 30.

Fig. 5.ª — *C. quadrivalvis.* Porzione inferiore di una sezione dell' embrione, tangenziale alla superficie dei cotiledoni. Sotto lo straterello cotiledonare, scorgesi per trasparenza la gemmetta *g* in rilievo. Le piccole papille, che dovrebbero apparire più grandi secondo l' ordine cronologico di loro formazione, si vedono in tale dimensione perchè non si trovano nell' *ortostica* delle *grandi,* le quali sono bene visibili perché si trovano ai margini laterali della gemmetta. Scorgesi poi anche il contorno della base della gemmetta, contorno che continuasi fra i due cotiledoni, nel fondo della commessura delle porzioni basali di questi, insieme saldate × 30.

Fig. 6.ª — Sezione trasversa della radichetta della *C. quadrivalvis* subito sopra la differenziazione delle iniziali del pleroma nel cilindro centrale.

p, Periblema.

pl, Pleroma. × 60.

Fig. 7.ª — Sezione trasversa *idem.*, praticata alquanto più in alto della precedente. Nel mezzo del pleroma *pl* scorgesi il midollo *m* già differenziato. Le porzioni basali dei cotiledoni, che discendono ai lati della radichetta sempre più concrescendo insieme, si mostrano ancora per buon tratto saldate fra loro.

i, Invoglio embrionale. × 60.

Fig. 8.ª — Il tratto cotiledonare saldato, è minore e quasi si ha separazione completa. × 60.

Fig. 9.ª — Sezione trasversale, *idem.,* leggermente obliqua rapporto al grande asse trasverso dell' embrione e quindl dimostrante la particolare disposizione dei cotiledoni. Pel fatto dell' obliquità della sezione, nel tratto in cui il taglio é stato fatto più in basso, scorgesi il contorno della parte superiore della radichetta *r;* nella parte opposta scorgesi la sezione trasversa del cotiledone già completamente differenziato. Il procambio ed il midollo appaiono ovoidali. × 60.

Fig. 10.ª — Principio della scissione della fascia procambiale della radichetta; *m* midollo. Le linee tratteggiate indicano le diverse direzioni degli elementi del procambio. × 60.

Fig. 11.ª — Bipartizione bene accentuata della fascia di procambio.
m, Midollo. × 60.

Fig. 12.ª — Differenziazione ed entrata nella base dei cotiledoni dei 3 cordoni di procambio. Questa figura mostra il primo accenno della gemmetta, perchè lascia vedere il tratto inferiore del primo verticillo di emergenze fogliari *f*. × 60.

Fig. 13.ª — Contorni del 1.° verticillo, bene manifesti; la linea punteggiata segna il contorno della gemmetta, non ancora separata dai cotiledoni.
c, Commessura dei cotiledoni. × 60.

Fig. 14.ª — 1.° e 2.° verticillo fogliare 1, 1 e 2, 2. In questa sezione vedesi che la gemmetta è già completamente disgiunta ed indipendente dai cotiledoni. × 60.

Fig. 15.ª — Le emergenze fogliari del 1.° verticillo sonosi già liberate dalla gemmetta; quelle del 2.° sono benissimo differenziate. × 60.

Fig. 16.ª — 3.° Verticillo di emergenze fogliari. × 60.

TAVOLA II.

Fig. 1.ª — 3.° Verticillo bene sviluppato. × 60.

Fig. 2.ª — 4.° Verticillo; le emergenze costituenti questo sono alterne con quelle del verticillo precedente. × 60.

Fig. 3.ª — 4.° Verticillo veduto in una sezione più vicina alla sommità della gemmetta. In esso scorgesi un notevole impiccolimento. × 60.

Fig. 4.ª e 5.ª — Apice arrotondato della gemmetta; nella fig. 5.ª è ovoidale tangenzialmente ai cotiledoni. × 60.

Fig. 6.ª — Diagramma dell'ordinamento delle papille fogliari. — 1.° 2.° 3.° 4.° verticillo fogliare.

Fig. 7.ª — Un cotiledone in sezione tangenziale. alla sua superficie. Si vedono le nervature. × 34.
a, Punto pel quale entrano i fasci procambiali nel cotiledone.

Fig. 8.ª — Sezione longitudinale assile (parallela al piano mediano dei cotiledoni) della gemmetta di C. quadrivalvis. 2, 2, 2.° verticillo della gemmetta (il *mediano*); 3, 3, 3.° ventricotlo; 4, 4, 4.° verticillo della gemmetta.

ep, Epidermide della pagina interna o superiore dei cotiledoni, la quale si continua sulla gemmetta.

pa, Palizzata dei cotiledoni; fasci procambiali che entrano nei cotiledoni.

pr, Parenchima a cellule più grandi costituenti il principio del midollo. × 340.

Fig. 9.ª — Sezione dei cotiledoni di *C. quadrivalvis,* perpendicolare al piano mediano di questi, in corrispondenza allo spugnoso. La sezione è osservata nella glicerina.

ep, Cellule epidermiche.

sp, Cellule dello spugnoso.

ae, Granuli di aleurone delle cellule epidermiche.

as, Aleurone dello spugnoso.

c, Cuticola. × 850.

Fig. 10.ª — Sezione trasversale dei cotiledoni in corrispondenza allo spugnoso. Si è disegnata una cellula sola. Lungo soggiorno in glicerina. × 850.

Fig. 11.ª — Granuli di aleurone isolati. × 850. Nella glicerina.

Fig. 12.ª — Sezione longitudinale dei cotiledoni in corrispondenza al palizzata; nella potassa allungata. I granuli di aleurone delle cellule epidermiche si sono disciolti in un plasma granuloso; quelli del palizzata si sono disciolti completamente e non resta che una specie di reticolato formato dal plasma intergranulare. × 850.

TAVOLA III.

Fig. 1.ª — Sezione trasversale della gemmetta e dei cotiledoni della *C. equisetifolia* allo stesso livello della fig. 15.ª tav. I. Nella gemmetta si rileva il 1.° ed il 2.° verticillo; nel 1.° verticillo le emergenze fogliari sono state tagliate in corrispondenza al punto in cui si liberano dall' asse della gemmetta.

ep, Epidermide delle papille fogliari sotto la quale si riscontra il tessuto meristematico di queste.

es, Epidermide della faccia interna o superiore dei cotiledoni.

ei, Epidermide della faccia esterna inferiore.

p, Tessuto a palizzata.

sp, Spugnoso. — Il mesofillo della parte mediana della faccia superiore, ha perduto i caratteri del palizzata.

pr, Fasci procambiali, alcuni dei quali sezionati trasversalmente, in altri gli elementi si vedono pel lungo. × 230.

Fig. 2.ª — Sezione longitudinale della porzione apicale dei cotiledoni della *C. quadrivalvis,* parallela al piano mediano di questi.

ep, Epidermide.

p, Tessuto a palizzata.

sp, Spugnoso.

pr, fascio procambiale. — × 200.

Fig. 3.ª — Sezione longitudinale assile della radichetta della *C. quadrivalvis,* parallela ai piano mediano dei cotiledoni.

a, porzione inferiore dell' asse ipocotileo della radichetta. La porzione terminale della radichetta è rivestita della cuffia *d.*

g, Punto di origine della caliptra.

d, Dermatogeno.

pe, Periblema.

pl, Pleroma.

ts, Tessuto meristematico nel quale si riscontrano le iniziali del pleroma, periblema, dermatogeno e della caliptra. × 410. Di fronte alla *C. equisetifolia,* il meristema del periblema della *C. quadrivalvis* è molto piú sviluppato, come si puó arguire dalla figura.

Fig. 4.ª — *C. equisetifolia.* Sezione della radichetta, interessante la porzione terminale di questa nel principio della differenziazione degli *istogeni.*

cl, Caliptra.

d, Dermatogeno.

pe, Periblema.

pl, Pleroma.

l^1, Iniziali della cuffia e del Dermatogeno.

pe^1, Iniziali delle serie cellulari periblemiche.

pl^1, Iniziali del pleroma. × 690.

Fig. 5.ª — Sezione trasversale della radichetta della *C. quadrivalvis,* nel punto in cui il pleroma è sufficientemente differenziato.

ep, Epidermide.

pe, Parenchima periblemico.

pl, pleroma. × 90.

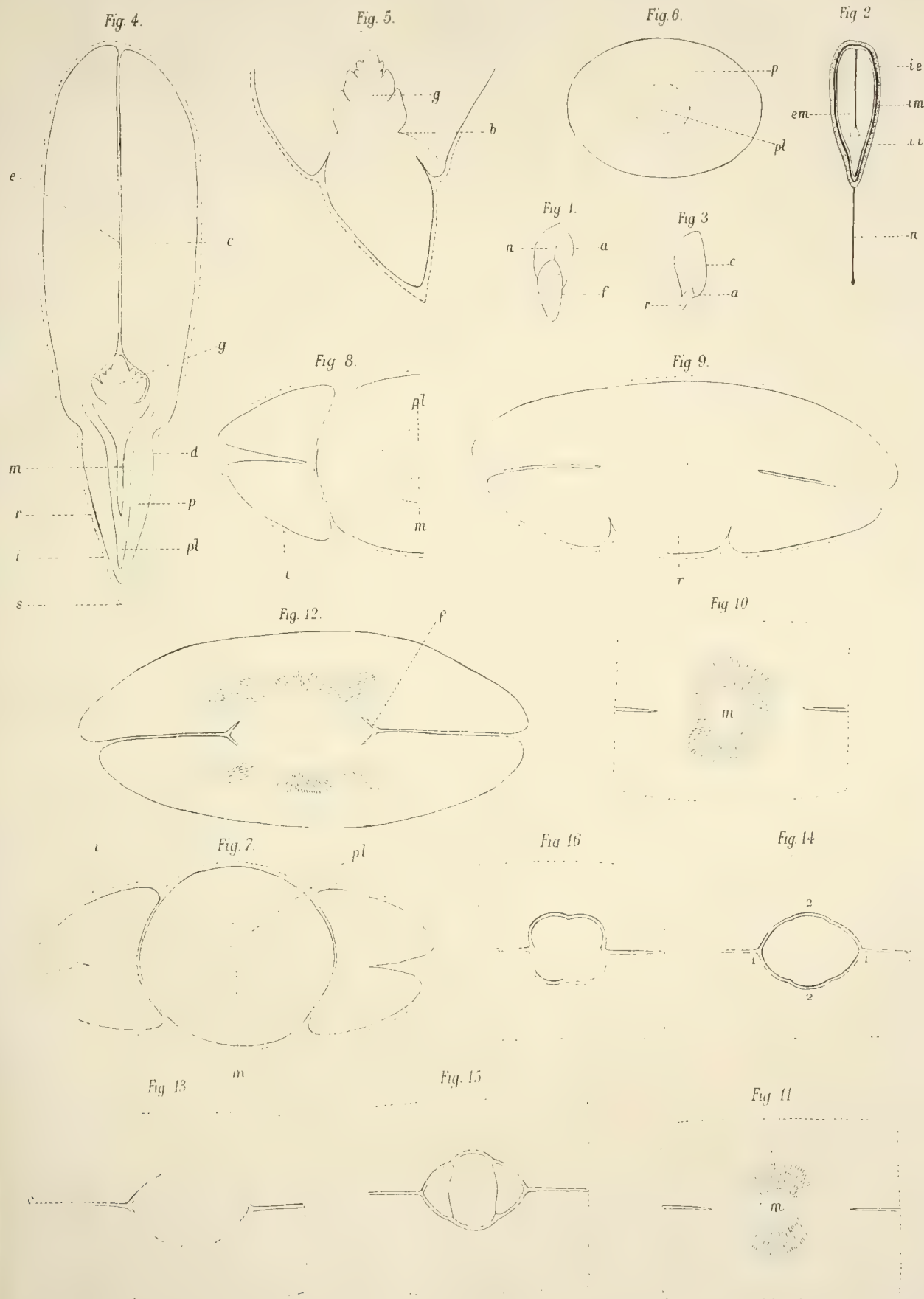
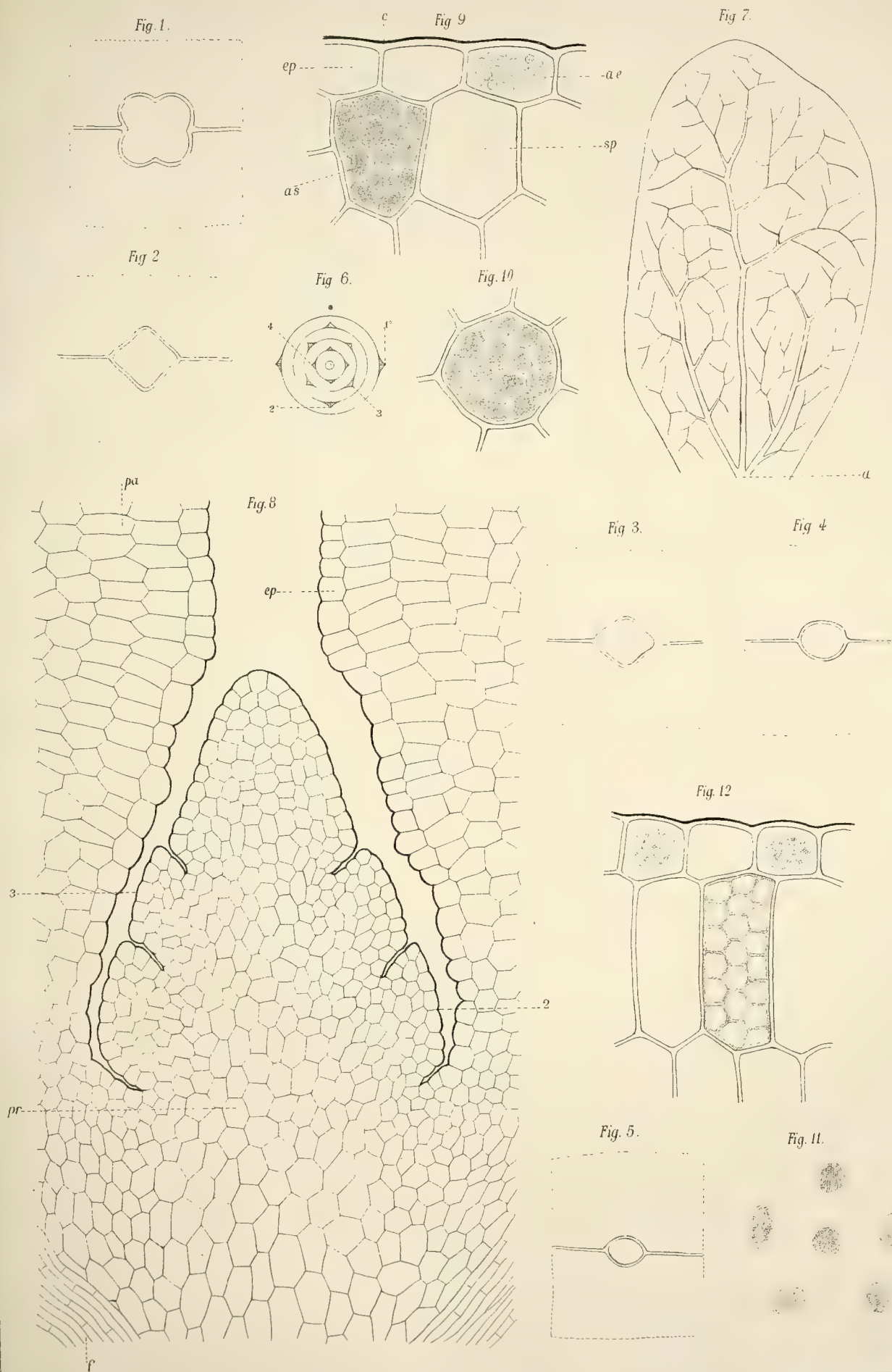
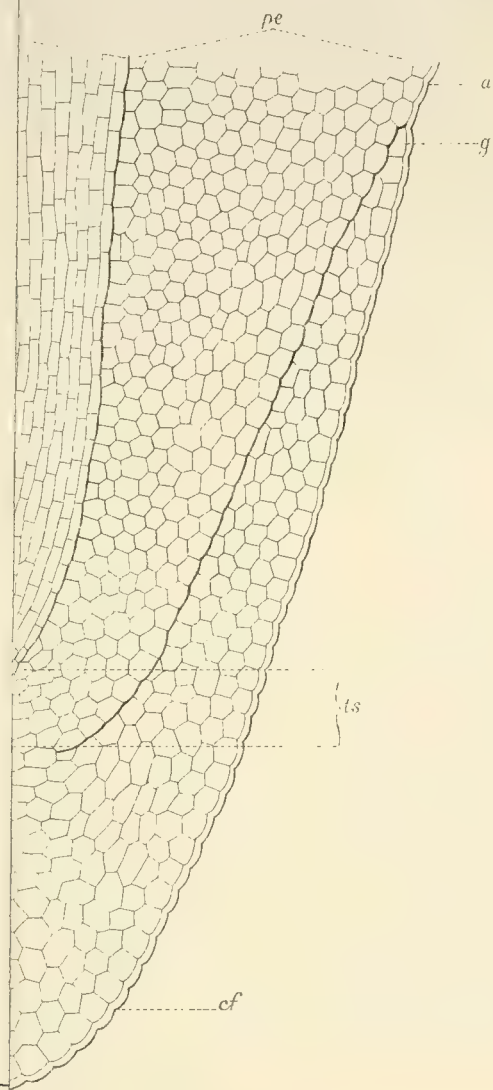
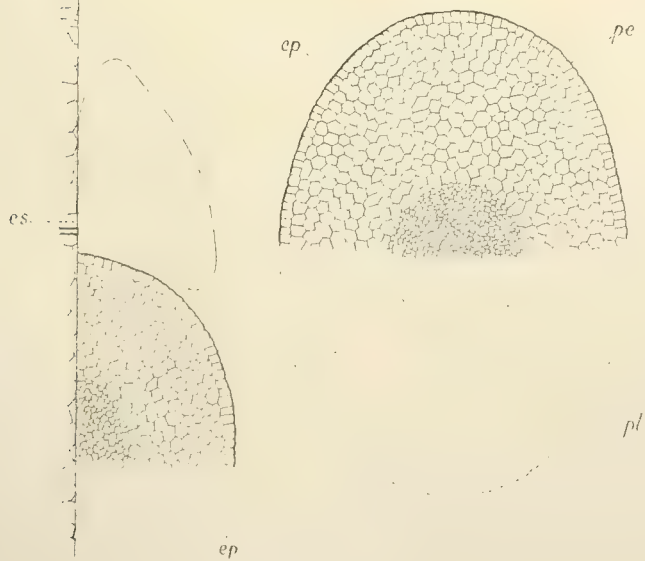
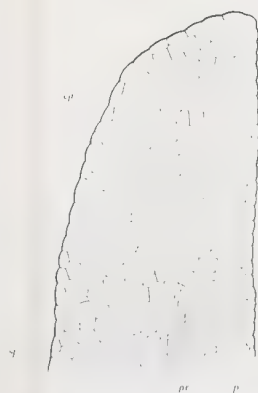
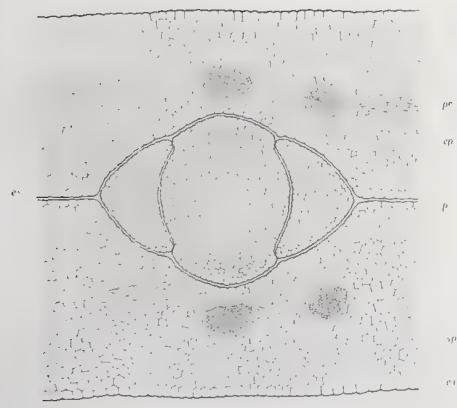
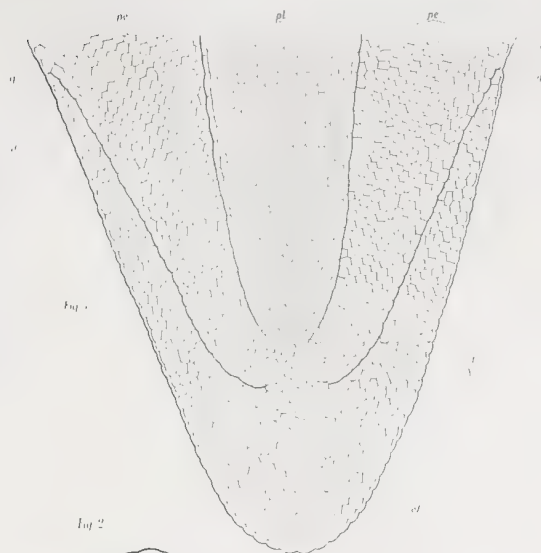
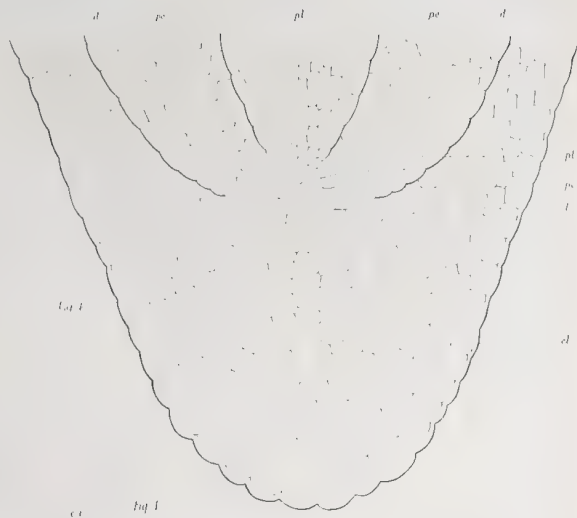
Fig. 6.ª — Sezione, idem., nel punto in cui il parenchima midollare è già bene appariscente.

c, Cotiledoni ancora parzialmente insieme connati.

ie, Invoglio dell' embrione formato da un unico strato cellulare a parete esterna fortemente cuticularizzata e striata; le cellule sono molto

F. Morini, dis. dal vero. E. Contoli, inc. lit. G. Wenk e Figli – Bologna.

F. Morini, dis. dal vero — E. Contoli, inc. — lit. G. Wenk e Figli - Bologna.

Anatomia dell'embrione delle Casuarinee. Tav. III.

voluminose e sono, può dirsi, indipendenti dalle cellule sottostanti.

ep, Epidermide della radichetta.

pe, Parenchima periblemico.

pl, Pleroma, nel cui mezzo è già differenziato il parenchima midollare *m.* × 90.

Questa figura è la figura 7.ª della Tav. 1.ª maggiormente ingrandita.

Fig. 7.ª Sezione della radichetta tangenzialmente ai cotiledoni (*C. equisetifolia*), nella parte superiore di quella, poco lungi dall' origine dei cotiledoni.

ep, Epidermide.

pe, Strato esterno periblemico differenziato in uno strato sottoepidermico; la rimanente parte di tessuto è periblema propriamente detta. Questa figura dimostra il processo di segmentazione delle cellule periblemiche, trasversale prima e poi tangenziale, per cui si formano in generale delle *coppie* e poscia delle tetradi cellulari, per solito ben distinte l' una dall' altra, specialmente mediante lacune o meati intercellulari. — In un punto si nota la formazione di una tetrade cellulare. × 300.

SULLE FORZE ELEMENTARI
ELETTROMAGNETICHE ED ELETTRODINAMICHE

II. MEMORIA

DEL

PROFESSOR AUGUSTO RIGHI

(Letta nella Sessione del 9 Novembre 1890).

Introduzione

1. In una precedente Memoria avente questo stesso titolo (¹) ho esposto i risultati di una ricerca istituita allo scopo di riconoscere quali sono le leggi di azione ponderomotrice fra due elementi di corrente e fra un elemento di corrente ed un polo magnetico, le quali soddisfino alla condizione di completa identità di azione fra un elemento magnetico ed un piccolo circuito, tracciato intorno al suo centro e giacente in un piano ad esso perpendicolare, ed ho trovato che onde la condizione suddetta d'identità sia soddisfatta bisogna ammettere la formola d'Ampère per esprimere l'azione fra due elementi di corrente, e quella di Laplace per esprimere quella fra un elemento di corrente ed un polo, supponendo poi in questo caso che la forza sia sempre applicata all'elemento di corrente.

Per identità completa d'azione fra l'elemento magnetico ed il piccolo circuito chiuso devesi intendere l'equivalenza, non solo per l'azione che l'uno e l'altro esercitano sopra un elemento di corrente, ma anche per ogni altro caso, e particolarmente per l'azione che l'elemento di corrente esercita su quelli.

Credo che nessuno si rifiuterebbe ad ammettere questa completa equivalenza, poiché si è d'accordo nel ritenere che l'identità d'azione spiegata da un sistema magnetico e da un corrispondente determinato sistema di

(¹) Mem. della R. Acc. di Bologna, serie IV, tomo X, pag. 217.

correnti chiuse, provenga da identità d'origine e di causa dei fenomeni magnetici ed elettrodinamici.

In altre parole, si ritiene che sostanzialmente in nulla diversifichi un elemento magnetico da una piccola corrente elettrica chiusa.

In quella Memoria ho ammesso che l'azione ponderomotrice di un elemento di corrente sopra un altro si riduca ad una forza applicata al secondo elemento, e perciò ho assunto la formola di Stefan per rappresentare quell'azione. D'altra parte ho assunto la formola più generale possibile per esprimere l'azione ponderomotrice fra un elemento di corrente ed un polo, supponendo qui ancora che questa azione si riduca ad una forza unica.

Però, durante la stampa di quella mia Memoria, mi accinsi ad una ricerca più generale, e cioè trovare le condizioni dell'identità più sopra definita, ammettendo che nelle azioni elementari esistano anche delle coppie. Perciò, invece della formola di Stefan presi quella di Korteweg, e così per esprimere l'azione fra un elemento di corrente ed un polo, presi formole più generali ancora di quelle prime adoperate. Il risultato principale della nuova ricerca fu da me esposto in una Aggiunta alla detta Memoria, fattavi dopo averne corrette le bozze.

Nella presente Memoria, la cui pubblicazione è stata ritardata sino alle nuove vacanze in causa di diverse ricerche sperimentali e dei doveri di insegnamento, espongo appunto la ricerca generale che mi ha condotto ai risultati enunciati nella detta Aggiunta. Benchè il nuovo lavoro, pel suo titolo, mostri d'essere quasi una continuazione di quello che lo ha preceduto, pure esso può perfettamente stare a sè, perchè i risultati della prima Memoria sono per la maggior parte casi particolari di quelli della presente.

2. L' attuale ricerca ha dunque per obbiettivo il rispondere a questa domanda: *quali sono le leggi d'azione ponderomotrice fra due elementi di corrente e fra un elemento di corrente ed un polo magnetico, le più generali possibili, compatibilmente col principio d'identità completa di azione, o equivalenza, fra un elemento magnetico ed un piccolo circuito chiuso ad esso perpendicolare?*

I risultati finali, che porgono la risposta a questo quesito, sono esposti nel quinto ed ultimo capitolo della presente Memoria. Nel primo stabilisco le formole generali date da Korteweg. È necessario che qui renda conto dei motivi pei quali ho creduto di dovere esporre il calcolo di queste formole.

Quando, un anno fa, mi accinsi alla ricerca generale, non conoscevo il lavoro del signor Korteweg che per un breve sunto inserito nei Beiblätter, nel quale non si davano che i principî dai quali il detto autore aveva preso le mosse. Dovetti dunque eseguire io stesso il calcolo delle formole

di Korteweg. Ma quando potei procurarmi in esteso il suo lavoro (¹), mentre trovai che le mie formole coincidevano sostanzialmente colle sue, mi parve altresì che il metodo da me adoperato (che d'altronde rassomiglia a quello adoperato dallo Stefan (²) per stabilire la sua formola) fosse più diretto ed assai più breve del suo. Parvemi che esistessero gli stessi vantaggi in favore del metodo da me impiegato nella ricerca delle condizioni necessarie per l'esistenza di un potenziale elettrodinamico elementare. Ho creduto quindi far bene ad esporre nel Cap. I. il calcolo da me eseguito, offrendo inoltre in tal modo al lettore il vantaggio di non essere costretto a consultare il lavoro originale.

Però le sette funzioni che entrano nelle formole di Korteweg sono da me indicate con lettere differenti; ed anzi le funzioni da me designate con

$$A,\ B,\ C,\ D,\ N,\ P,\ Q$$

corrispondono ordinatamente a quelli che il Korteweg designa con

$$B, -C,\ G,\ E,\ F, -H,\ D.$$

La ragione di questo cambiamento è che le funzioni A, B, C, D, erano già state indicate con queste lettere dallo Stefan, e poscia da me nella mia prima Memoria.

Nel Cap. II. stabilisco le formole le più generali per esprimere l'azione fra un elemento di corrente ed un polo. Queste formole contengono dieci nuove funzioni incognite.

Nel Cap. III. trovo le relazioni che devono esistere fra le funzioni che entrano nelle formole generali onde si verifichi l' identità d' azione sopra un elemento di corrente, fra l' elemento magnetico ed il piccolo circuito chiuso.

Nel Cap. IV. stabilisco le relazioni volute dall'identità delle azioni esercitate da un elemento di corrente sopra l'elemento magnetico e sul piccolo circuito.

Infine, nel Cap. V. ed ultimo, oltre che stabilire le condizioni di completa equivalenza fra l'elemento magnetico ed il piccolo circuito chiuso, espongo le conclusioni finali.

(¹) Crelle's Journ. 90, p. 49, 1880.
(²) Wien. Ber. 59. 29 April 1869.

CAPITOLO I.

Azione più generale fra due elementi di corrente.

3. Per stabilire la legge d'azione ponderomotrice fra due elementi di corrente, i diversi autori da Ampère in poi partirono da certe ipotesi fondamentali considerate a ragione come le più verosimili. Seguendo il sig. Korteweg ammetteremo solo quelle che sono comuni a tutti questi autori, e cioè supporremo:

1.° che le azioni ponderomotrici fra due elementi di corrente ds e ds', percorsi da correnti d'intensità i, i', sieno proporzionali ad $ii'ds\, ds'$, e ad una funzione della loro distanza;

2.° che queste azioni dipendano solo dalla posizione relativa degli elementi nello spazio;

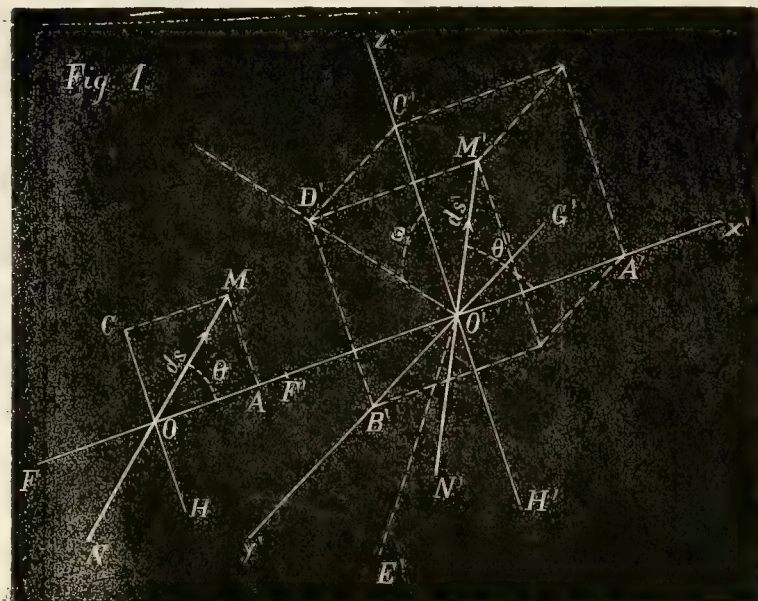
3.° che a queste azioni si possano sostituire quelle che si esercitano fra le componenti dei due elementi prese secondo tre assi ortogonali.

A queste tre ipotesi fondamentali il sig. Korteweg ne aggiunge una quarta nel corso della sua ricerca, e cioè: che le azioni fra due elementi si annullino quando la loro distanza diviene infinita.

Nella prima ipotesi s'intende compresa questa, e cioè che se in uno degli elementi si suppone invertita la corrente, le azioni che fra essi si esercitano non facciano che invertirsi. Nella seconda resta poi naturalmente compresa la ragione di simmetria, secondo la quale una forza od una coppia non può avere componente secondo una data direzione, se questa direzione in nulla si distingue dalle altre per quella data reciproca posizione che hanno i due elementi di corrente considerati. Si può dare poi una forma particolare a questa considerazione della simmetria. Se invece dei due elementi considerati, se ne prendono due altri così collocati l'uno rispetto all'altro da essere le immagini dei due primi fornite da uno specchio piano (e cioè da essere simmetrici ai due primi per rapporto ad un piano), il moto che tendono ad assumere i nuovi elementi sarà pure simmetrico, rispetto allo stesso piano, a quello che i due primi elementi tendono ad acquistare. Non è però indispensabile il ricorrere a questa maniera di ragionamento.

Colle ipotesi ammesse è facile lo stabilire l'azione d'un elemento ds sopra un altro ds', introducendo delle funzioni incognite della distanza fra i due elementi, funzioni che si deve poi cercar dopo di determinare, per quanto sia possibile.

Sieno $MN = ds$ ed $M'N' = ds'$ i due elementi di corrente (Fig. 1) ed O, O'

i loro punti di mezzo, la cui distanza indicheremo con r. Per calcolare le azioni (forza e coppia) esercitate da ds su ds' scomponiamo i due elementi secondo tre assi opportunamente scelti, ortogonali fra loro e passanti per O'. E precisamente si assuma per asse delle ascisse la direzione $O'x'$ della retta OO', per asse $O'z'$ la perpendicolare ad $O'x'$ nel piano formato da ds con r, e per asse $O'y'$ la perpendicolare a questo piano. Lo elemento ds darà luogo a due componenti $AF = du$, $CH = dw$, rispettivamente secondo le direzioni di $O'x'$ e di $O'z'$, mentre l'elemento ds' darà tre componenti $A'F' = du'$, $B'G' = dv'$, $G'H' = dw'$, secondo i tre assi. L'azione di ds su ds' si potrà quindi considerare come la risultante delle azioni che du e dw esercitano su du', dv', dw'. La considerazione di due elementi ds e ds' posti in una qualunque posizione reciproca, viene così sostituita da quella di due elementi posti in una delle cinque seguenti posizioni relative principali (a).

1.ª Due elementi *longitudinali,* cioè diretti secondo la retta che li congiunge. Tale è il caso dell'azione di du su du'.

2.ª Elementi paralleli fra loro e *trasversali,* cioè perpendicolari alla loro congiungente. Per esempio dw su dw'.

3.ª L'elemento agente è trasversale, e quello che ne subisce l'azione è longitudinale. P. es. azione di dw su du'.

4.ª L'elemento agente è longitudinale e l'altro trasversale. Tale è il caso per l'azione di du su dv', come pure di du su dw'

5.ª Elementi entrambi trasversali ed aventi direzioni fra loro perpendicolari. Azione di dw su dv'.

(a) Il signor Korteweg non considera che quattro posizioni principali, riguardando come tutt'una la 3.ª e la 4.ª. Ciò dipende dalla circostanza che egli tien conto sempre in pari tempo dell'azione di ds su ds' e di quella di ds' su ds. Siccome per maggior chiarezza si considera sempre qui solo l'azione di ds su ds', così è necessario distinguere l'una dall'altra le posizioni fondamentali 3.ª e 4.ª.

4. Esaminiamo qual'è in ciascuno di questi casi la forza e la coppia che costituiscono l'azione del primo elemento sul secondo, supponendo la forza applicata al punto di mezzo del secondo elemento, il che naturalmente non diminuisce la generalità, dal momento che si ammette anche l'esistenza di una coppia. Supponiamo sempre tanto la forza che la coppia risolte nelle loro componenti dirette secondo i tre assi, e vediamo quali di queste componenti sono necessariamente nulle in virtù della seconda ipotesi fondamentale.

Nella prima posizione principale (du, du') nessuna delle tre componenti della coppia può esistere, e di quelle della forza solo può esistere quella secondo $O'x'$, di guisa che in questo caso l'azione si riduce ad una forza che ha la stessa direzione degli elementi. L'azione di du su du' sarà dunque, indicando con A una funzione di r:

$$A\, i\, i'\, du\, du'.$$

Che le componenti secondo $O'y'$ ed $O'z'$ della forza e della coppia debbano essere nulle, si può riconoscere così. Supponiamo che una di esse esista, per esempio una forza secondo $O'z'$. Facendo girare il sistema dei due elementi du e du' intorno ad r di 180°, la forza assumerà una direzione opposta a prima; ma intanto la posizione relativa dei due elementi non ha mutato affatto e neppure deve avere mutato l'azione dell'uno sull'altro. Perciò quella forza deve essere nulla. Che poi sia nulla la componente della coppia secondo $O'x'$, ciò è evidente perchè non v'è ragione onde du' debba ruotare su sè stesso in un senso piuttosto che nell'altro.

Considerazioni di questo genere permettono di escludere alcune componenti della forza e della coppia nelle altre quattro posizioni principali degli elementi, e ciascuno potrà facilmente farle da sè, per cui mi limiterò in quel che immediatamente segue ad enumerare le componenti delle quali non si ha ragione di negare a priori l'esistenza.

Nel caso della seconda posizione principale $(dw\, dw')$ si riconosce che è possibile soltanto una forza diretta come la precedente secondo $O'x'$. Indicando con B un'altra funzione di r, l'azione di dw su dw' si ridurrà alla forza:

$$B\, i\, i'\, dw\, dw'.$$

Per la terza posizione principale $(dw\, du')$ possono esistere, una forza:

$$C\, i\, i'\, dw\, du'$$

diretta come l'elemento agente, cioè secondo $O'z'$, ed una coppia:

$$-P\, i\, i'\, dw\, du',$$

il cui asse è diretto perpendicolarmente al piano dei due elementi, cioè secondo $O'y'$. Questa coppia per P positivo tende a far girare du' in senso tale che dopo una rotazione di 90° esso divenga parallelo all' elemento agente e diretto nello stesso verso. Il segno — dipende dall'assumere come senso positivo delle rotazioni quello degli aghi d'un orologio. C e P sono funzioni di r.

Nel caso della quarta posizione principale si riconosce che possono esistere solo una forza diretta come il secondo elemento, ed una coppia che tende a ridurlo nella stessa direzione dell'elemento agente. In questa quarta posizione si trovano tanto gli elementi du e dv' come gli elementi du e dw'. Ora, torna comodo considerare le due azioni insieme, e cioè sostituire ai due elementi dv' dw' l'elemento dt' diretto secondo $O'D'$, che risulta componendo insieme dv' e dw', giacchè anche i due elementi du e dt' sono nella quarta posizione principale. Dicendo D ed N due nuove funzioni di r, l'azione di du su dt' consisterà in una forza:

$$D\, i\, i'\, du\, dt',$$

diretta secondo la retta $O'D'$, ed in una coppia:

$$N\, i\, i'\, du\, dt',$$

il cui asse è diretto secondo $O'E'$, perpendicolare al piano $D'O'A'$ formato dall'elemente ds' e dalla retta r.

Finalmente, nel caso della quinta posizione principale non può esistere che una coppia il cui asse sia diretto secondo la retta che unisce i due elementi, e che tenda a ridurli paralleli e diretti nello stesso verso. Perciò se Q è un'altra funzione di r, l'azione di dw su dv' sarà una coppia:

$$Q\, i\, i'\, dw\, dv',$$

il cui asse è diretto secondo $O'x'$.

L'azione di ds su ds' è ridotta in tal modo a quattro forze ed a tre coppie, espresse colle sette funzioni A, B, C, D, N, P, Q, e colle componenti dei due elementi. Ma se indichiamo con θ e θ' gli angoli che le direzioni delle correnti nei due elementi fanno colla retta che va da O ad O', e con ω l' angolo $C'O'D'$ che i piani rispettivamente formati da ds e ds' con r fanno tra loro, si ha:

$$du = ds \cos\theta, \qquad dw = ds \operatorname{sen}\theta,$$

$$du' = ds' \cos\theta', \quad dv' = ds' \operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\omega, \quad dw' = ds' \operatorname{sen}\theta' \cos\omega, \quad dt' = ds' \operatorname{sen}\theta'.$$

Per cui le azioni di ds su ds' constano di tre forze dirette secondo $O'x'$, $O'D'$, $O'z'$, il valore delle quali è ordinatamente:

$$ii'ds\,ds'(A\cos\theta\cos\theta' + B\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos\omega),$$
$$ii'ds\,ds'D\cos\theta\operatorname{sen}\theta',$$
$$ii'ds\,ds'C\operatorname{sen}\theta\cos\theta',$$

e di tre coppie, cogli assi diretti secondo $O'x'$, $O'y'$, $O'E'$, il valore delle quali è ordinatamente:

$$ii'ds\,ds'Q\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\omega,$$
$$-ii'ds\,ds'P\operatorname{sen}\theta\cos\theta',$$
$$ii'ds\,ds'N\cos\theta\operatorname{sen}\theta'.$$

5. È necessario trovare ora le componenti della forza (che è applicata al centro dell'elemento ds') e della coppia, risultanti dalla composizione di queste sei componenti, secondo una terna qualunque di assi ortogonali. Sieno x, y, z, le coordinate di O rispetto ai nuovi assi, ed x', y', z', quelle di O'; sieno inoltre α, β, γ, gli angoli di ds coi nuovi assi, α', β', γ', quelli di ds'. Si avrà evidentemente:

$$(1)\qquad \begin{cases} r^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2, \\ r\cos\theta = (x'-x)\cos\alpha + (y'-y)\cos\beta + (z'-z)\cos\gamma, \\ r\cos\theta' = (x'-x)\cos\alpha' + (y'-y)\cos\beta' + (z'-z)\cos\gamma'. \end{cases}$$

Per raggiungere lo scopo indicato basta trovare i coseni degli angoli che le cinque rette $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$, $O'D'$, $O'E'$, secondo cui sono dirette le forze e coppie calcolate, fanno coi nuovi assi delle x, delle y e delle z.

I coseni degli angoli $O'x'$, coi nuovi assi sono evidentemente:

$$(2)\qquad \frac{x'-x}{r},\quad \frac{y'-y}{r},\quad \frac{z'-z}{r},$$

Quelli relativi ad $O'z'$ sono i seguenti. Il coseno dell'angolo di $O'z'$ coll'asse delle x è:

$$(3)\qquad \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\left(\cos\alpha - \frac{x'-x}{r}\cos\theta\right);$$

gli altri due si deducono sostituendo ad α, x ed x' prima β, y ed y', poi γ, z e z' (a).

(a) S'immaginino condotte (vedi Stefan l. c. p. 710) da un punto o (Fig. 2) quattro rette oz',

Il coseno dell'angolo di $O'D'$ coll'asse delle x è:

$$(4) \qquad \frac{1}{\operatorname{sen}\theta'}\left(\cos\alpha' - \frac{x'-x}{r}\cos\theta'\right);$$

i due altri coseni si deducono da questo colle permutazioni.

Per trovare i coseni degli angoli che $O'y'$ fa coi nuovi assi, basta osservare che questa retta è perpendicolare alle due $O'x'$, $O'z'$, delle quali i coseni sono già noti. Si ha quindi, in virtù d'una nota formula:

$$(5) \qquad \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\left(\frac{z'-z}{r}\cos\beta - \frac{y'-y}{r}\cos\gamma\right)$$

pel coseno dell'angolo di $O'y'$ coll'asse delle x, e due espressioni analoghe per quelli degli angoli fatti cogli altri due assi, che si deducono da questa colla permutazione circolare delle lettere $x\,y\,z$; $x'\,y'\,z'$; $\alpha\,\beta\,\gamma$ (a).

Infine, per trovare i coseni degli angoli che la retta $O'E'$ fa coi nuovi assi, basta notare che essa è perpendicolare alle due $O'x'$, $O'D'$, di cui sono già noti i coseni di direzione. Per cui si ha, pel primo coseno:

$$(6) \qquad \frac{1}{\operatorname{sen}\theta'}\left(\frac{z'-z}{r}\cos\beta' - \frac{y'-y}{r}\cos\gamma'\right),$$

---

oM, ox', ox, rispettivamente parallele alle rette $O'z'$, $O'M$, $O'x'$ della fig. 1, ed al nuovo asse delle x. I punti z', M, x', x in cui incontrano una sfera di centro o sono vertici di triangoli sferici $z'xx'$, Mxx', dal primo dei quali si ricava:

$$\cos(z'x) = \cos(z'x')\cos(xx') + \operatorname{sen}(z'x')\operatorname{sen}(xx')\cos(z'x'x),$$

e siccome $z'x' = 90°$:

$$\cos(z'x) = \operatorname{sen}(xx')\cos(z'x'x).$$

Dal secondo poi si ha:

$$\cos(Mx) = \cos(Mx')\cos(xx') + \operatorname{sen}(Mx')\operatorname{sen}(xx')\cos(z'x'x),$$

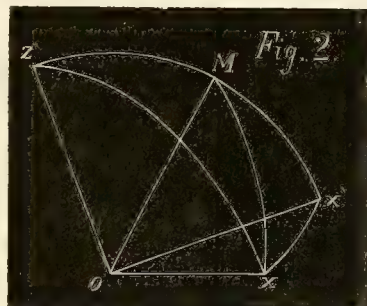
e quindi:

$$\cos(Mx) = \cos(Mx')\cos(xx') + \operatorname{sen}(Mx')\cos(z'x),$$

ossia:

$$\cos\alpha = \cos\theta\frac{x'-x}{r} + \operatorname{sen}\theta\cos(z'x).$$

Di qui si ricava il valore di $\cos(z'x)$ dato nel testo. I coseni degli angoli di $O'D'$ si trovano in modo simile.

(a) Resta in tal modo incerto il segno da darsi ai coseni; ma lo si determina osservando che qualora si supponga $x = -r$, $y = z = x' = y' = z' = 0$, $\gamma = 90° - \theta$, i nuovi assi coincidono cogli assi $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$, della Fig. 1, e quindi il coseno dell'angolo che $O'y'$ fa coll'asse delle y deve divenire eguale all'unità.

e per gli altri due, espressioni che si possono dedurre da questa colla permutazione circolare. Coll'aiuto dei coseni così calcolati si possono scrivere subito le componenti ξ, η, ζ della forza e quelle $(\xi), (\eta), (\zeta)$ della coppia secondo i nuovi assi. Scrivendo solo le componenti secondo l'asse delle x, poichè le altre possono dedursene colla permutazione, si ha:

$$\xi = ii'dsds' \Big\{ (A \cos\theta \cos\theta' + B \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' \cos\omega) \frac{x'-x}{r}$$
$$+ D\cos\theta\left(\cos\alpha' - \frac{x'-x}{r}\cos\theta'\right) + C\cos\theta'\left(\cos\alpha - \frac{x'-x}{r}\cos\theta\right)\Big\},$$

$$(\xi) = ii'dsds' \Big\{ Q \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\omega \frac{x'-x}{r} - P\cos\theta'\left(\frac{z'-z}{r}\cos\beta - \frac{y'-y}{r}\cos\gamma\right)$$
$$+ N\cos\theta\left(\frac{z'-z}{r}\cos\beta' - \frac{y'-y}{r}\cos\gamma'\right)\Big\}.$$

Giova però introdurre, in posto di ω, l'angolo ε che fanno fra loro nello spazio le direzioni dei due elementi ds, ds', oppure gli angoli $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$. Per la prima di queste due formole, nella quale entra solo il coseno di ω, vale all'uopo la nota relazione:

$$\cos\varepsilon = \cos\theta \cos\theta' + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' \cos\omega,$$

(7) oppure:

$$\cos\varepsilon = \cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma'.$$

Per la seconda, in cui entra invece il seno di ω, si può operare così. Si calcoli il coseno dell'angolo $D'O'y'$ (Fig. 1), che è evidentemente eguale a sen ω, notando che già si conoscono per mezzo delle (4) e (5) i coseni degli angoli che le due rette $O'D'$, $O'y'$ fanno cogli assi, e si avrà:

$$\operatorname{sen}\omega = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta'} \Big\{ \left(\frac{z'-z}{r}\cos\beta - \frac{y'-y}{r}\cos\gamma\right)\left(\cos\alpha' - \frac{x'-x}{r}\cos\theta'\right) + \cdots \Big\},$$

ossia

$$\operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' = \frac{x'-x}{r}(\cos\gamma \cos\beta' - \cos\beta \cos\gamma') + \cdots\cdots$$

I puntini nel secondo membro delle due equazioni stanno ad indicare

due altre espressioni simili a quella scritta, e che se ne deducono con permutazione circolare.

All' ultima equazione si puó dare, come é facile verificare tenendo conto della seconda e terza delle (1), la forma seguente, sotto la quale viene poi adoperata per togliere ω dalla espressione di (ξ):

$$(8)\quad \frac{x'-x}{r}\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta' = \cos\theta\left(\frac{y'-y}{r}\cos\gamma' - \frac{z'-z}{r}\cos\beta'\right)$$

$$+\cos\theta'\left(\frac{z'-z}{r}\cos\beta - \frac{y'-y}{r}\cos\gamma\right) + \cos\gamma\cos\beta' - \cos\beta\cos\gamma'.$$

Introducendo nelle espressioni di ξ e (ξ) i valori trovati di $\cos\omega$ e di $\operatorname{sen}\omega$, si ottiene infine:

$$(\mathrm{I})\qquad \xi = ii'dsds'\Big\{(A-B-C-D)\cos\theta\cos\theta'\frac{x'-x}{r}$$

$$+B\cos\varepsilon\frac{x'-x}{r} + C\cos\theta'\cos\alpha + D\cos\theta\cos\alpha'\Big\},$$

$$(\mathrm{II})\quad (\xi) = ii'dsds'\Big\{(N-Q)\left(\frac{z'-z}{r}\cos\beta' - \frac{y'-y}{r}\cos\gamma'\right)\cos\theta$$

$$+(Q-P)\left(\frac{z'-z}{r}\cos\beta - \frac{y'-y}{r}\cos\gamma\right)\cos\theta' + Q(\cos\gamma\cos\beta' - \cos\beta\cos\gamma')\Big\}.$$

Si puó dare a queste formole un altro aspetto. Assumendo come variabili indipendenti s ed s' si ha:

$$\cos\alpha = \frac{\partial x}{\partial s},\quad \cos\beta = \frac{\partial y}{\partial s},\quad \cos\gamma = \frac{\partial z}{\partial s},\quad \cos\alpha' = \frac{\partial x'}{\partial s'},\quad \cos\beta' = \frac{\partial y'}{\partial s'},\quad \cos\gamma' = \frac{\partial z'}{\partial s'};$$

e con derivazioni rispetto ad s ed s' della prima delle (1):

$$\cos\theta = -\frac{\partial r}{\partial s},\quad \cos\theta' = \frac{\partial r}{\partial s'},\quad \cos\varepsilon = -r\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'} - \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}.$$

Sostituendo nelle (I) e (II) si ha quindi:

$$(\mathrm{I}')\quad \xi = ii'dsds' \left\{ -(A-C-D)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{x'-x}{r} - B(x'-x)\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} + C\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - D\frac{\partial x'}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial s} \right\},$$

$$(\mathrm{II}')\quad (\xi) = ii'dsds' \left\{ -(N-Q)\left(\frac{z'-z}{r}\frac{\partial y'}{\partial s'} - \frac{y'-y}{r}\frac{\partial z'}{\partial s'}\right)\frac{\partial r}{\partial s} + (Q-P)\left(\frac{z'-z}{r}\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{y'-y}{r}\frac{\partial z}{\partial s}\right)\frac{\partial r}{\partial s'} + Q\left(\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial y'}{\partial s'} - \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial z'}{\partial s'}\right) \right\}.$$

6. Introducendo in queste formole generali delle particolari ipotesi sulle funzioni A, B, C, D, N, P, Q, se ne traggono tutte le leggi elementari ponderomotrici conosciute.

Così supponendo $A = \frac{c}{r^2}$, $B = -\frac{2c}{r^2}$ (c essendo una costante che diventa eguale all'unità quando si addotti l'unità assoluta elettromagnetica per la misura delle correnti), $C = D = N = P = Q = 0$, si ottiene la formola elementare di Ampère.

Supponendo invece $A = D = N = P = Q = 0$, $B = -\frac{c}{r^2}$, $C = \frac{c}{r^2}$, si trova la formola di Grassmann (a).

(a) Con questi valori attribuiti alle sette funzioni, delle sei componenti scritte alla fine del § 4 non rimane che una forza $-ii'dsds'\frac{c}{r^2}\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' \cos\omega$ diretta secondo x', ed una forza $ii'dsds'\frac{c}{r^2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta'$ diretta secondo z'. Queste due forze si compongono in una forza unica:

$$ii'dsds'\frac{c}{r^2}\operatorname{sen}\theta\sqrt{\cos^2\theta' + \operatorname{sen}^2\theta'\cos^2\omega},$$

giacente nel piano formato da r con ds. Essa fa con OO' un angolo il cui coseno è:

$$\frac{-\operatorname{sen}\theta'\cos\omega}{\sqrt{\cos^2\theta' + \operatorname{sen}^2\theta'\cos^2\omega}}.$$

D'altra parte la componente di ds' nel piano suddetto è $\sqrt{du'^2 + dw'^2}$, ossia

$$ds'\sqrt{\cos^2\theta' + \operatorname{sen}^2\theta'\cos^2\omega},$$

e fa con OO' un angolo il cui coseno è:

$$\frac{\cos\theta'}{\sqrt{\cos^2\theta' + \operatorname{sen}^2\theta'\cos^2\omega}}.$$

La forza di Grassmann, oltre che giacere nel piano formato da r con ds, è dunque perpendicolare alla proiezione di ds' sopra questo piano.

Supponendo solo $N = P = Q = 0$, si ha la formola più generale nella ipotesi che l'azione d'un elemento di corrente sopra un altro si riduca ad una forza unica applicata al secondo elemento. E se inoltre si suppone $A = \frac{a}{r^2}$, $B = \frac{b}{r^2}$, $C = \frac{c}{r^2}$, $D = \frac{d}{r^2}$, ove a, b, c, d, sono quattro costanti, si giunge alla formola di Stefan, la quale si trasforma in quella di Ampère, o in quella di Grassmann, o in altre, dando opportuni valori alle costanti stesse.

Stabilendo poi certe relazioni, in numero di cinque, fra le sette funzioni incognite, l'azione dell'elemento ds sull'elemento ds' diviene tale che esiste un potenziale, cioè una funzione dalla quale possono dedursi colla derivazione le componenti della forza e della coppia in ogni direzione.

Per trovare queste relazioni supponiamo che l'elemento ds' (Fig. 1) si sposti parallelamente a sè stesso sino all'infinito nella direzione della retta r, che ne congiunge il punto di mezzo con quello dell'elemento ds. Siccome a determinare questo spostamento ha azione soltanto la componente della forza secondo r, che è

$$ii'dsds'(A\cos\theta\cos\theta' + B\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\theta'\cos\omega),$$

ossia per la (7):

$$ii'dsds'\left\{(A - B)\cos\theta\cos\theta' + B\cos\varepsilon\right\},$$

così il lavoro eseguito sarà:

$$ii'dsds'\left\{\cos\theta\cos\theta'\int_r^\infty (A - B)dr + \cos\varepsilon\int_r^\infty Bdr\right\};$$

il lavoro, eguale e di segno contrario, da effettuarsi per portare parallelamente a sè stesso e nella direzione di r dall'infinito alla posizione attuale l'elemento ds', sarà il potenziale cercato. Dicendolo V si avrà:

$$V = ii'dsds'(S\cos\theta\cos\theta' + T\cos\varepsilon),$$

ponendo:

$$S = -\int_r^\infty (A - B)dr, \quad T = -\int_r^\infty Bdr.$$

Le componenti della forza e della coppia secondo tre assi qualunque dovranno potersi dedurre derivando V, ed anzi dovrà essere $\xi = -\frac{\partial V}{\partial x'}$, $(\xi) = -\frac{\partial V}{\partial \sigma}$, indicando con σ l'angolo del piano $M'O'x$ (Fig. 3) formato da ds' coll'asse delle x, col piano xy.

Scriviamo questi valori di ξ e (ξ), e rendiamo ad essi identici, i valori (I) e (II).

Cominciando da ξ ed osservando che ε non varia con x', si avrà:

$$\xi = -\frac{\partial V}{\partial x'} = -ii'dsds' \left\{ \frac{\partial S}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x'} \cos\theta \cos\theta' - S \cos\theta \operatorname{sen}\theta' \frac{\partial \theta'}{\partial x'} \right.$$
$$\left. - S \cos\theta' \operatorname{sen}\theta \frac{\partial \theta}{\partial x'} + \frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x'} \cos\varepsilon \right\};$$

ma derivando rispetto ad x' le formole (1) si trova facilmente:

$$\frac{\partial r}{\partial x'} = \frac{x'-x}{r},$$

$$\operatorname{sen}\theta \frac{\partial \theta}{\partial x'} = \frac{1}{r}\left(\frac{x'-x}{r}\cos\theta - \cos\alpha\right), \quad \operatorname{sen}\theta' \frac{\partial \theta'}{\partial x'} = \frac{1}{r}\left(\frac{x'-x}{r}\cos\theta' - \cos\alpha'\right),$$

quindi:

$$\xi = ii'dsds' \left\{ \left(2\frac{S}{r} - \frac{\partial S}{\partial r}\right) \cos\theta \cos\theta' \frac{x'-x}{r} - \frac{S}{r}\cos\theta \cos\alpha' \right.$$
$$\left. - \frac{S}{r}\cos\theta' \cos\alpha - \frac{\partial T}{\partial r}\cos\varepsilon \frac{x'-x}{r} \right\},$$

Paragonando questa equazione alla (I) si vede che deve essere

$$A - B - C - D = 2\frac{S}{r} - \frac{\partial S}{\partial r}, \quad C = D = -\frac{S}{r}, \quad B = -\frac{\partial T}{\partial r},$$

ossia:

$$A - B = -\frac{\partial S}{\partial r}, \quad B = -\frac{\partial T}{\partial r}, \quad Cr = Dr = -S.$$

Similmente (osservando che θ non varia al variare di σ, e neppure

S e T giacché r è ora costante):

$$(\xi) = -\frac{\partial V}{\partial \sigma} = -ii'dsds'\left(-S\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta'\frac{\partial\theta'}{\partial\sigma} - T\,\mathrm{sen}\,\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma}\right).$$

Ora si ha:

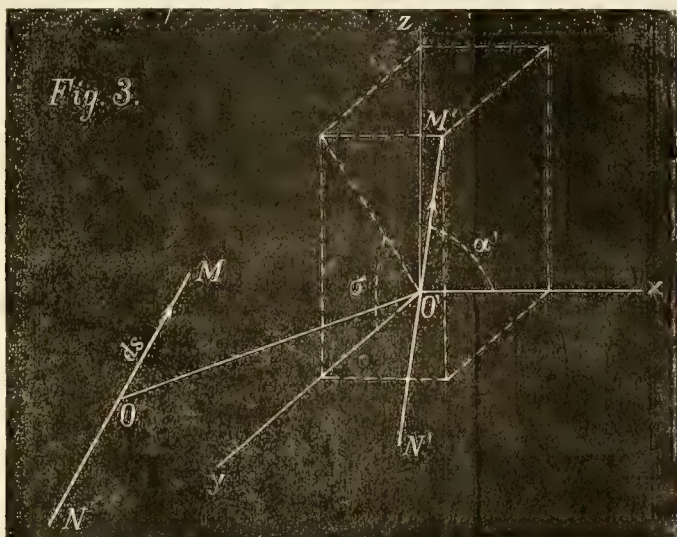
$$\cos\beta' = \mathrm{sen}\,\alpha'\cos\sigma,$$

giacché la proiezione di ds' sull'asse delle y (Fig. 3) si può scrivere, tanto $ds'\cos\beta'$, quanto $ds'\,\mathrm{sen}\,\alpha'$ $\mathrm{sen}\,\sigma$; e così pure si ha:

$$\cos\gamma' = \mathrm{sen}\,\alpha'\,\mathrm{sen}\,\sigma.$$

Quindi la 3ª delle (1) e la 2ª delle (7) divengono:

$$r\cos\theta' = (x'-x)\cos\alpha' + (y'-y)\,\mathrm{sen}\,\alpha'\cos\sigma + (z'-z)\,\mathrm{sen}\,\alpha'\,\mathrm{sen}\,\sigma,$$

$$\cos\varepsilon = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\,\mathrm{sen}\,\alpha'\cos\sigma + \cos\gamma\,\mathrm{sen}\,\alpha'\,\mathrm{sen}\,\sigma,$$

dalle quali mediante derivazione rispetto a σ si ricava:

$$\mathrm{sen}\,\theta'\frac{\partial\theta'}{\partial\sigma} = \left(\frac{y'-y}{r}\cos\gamma' - \frac{z'-z}{r}\cos\beta'\right),$$

$$\mathrm{sen}\,\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma} = \cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta'.$$

Sostituendo nel valore di (ξ), esso diviene:

$$(\xi) = ii'dsds'\left\{-S\left(\frac{z'-z}{r}\cos\beta' - \frac{y'-y}{r}\cos\gamma'\right)\cos\theta - T(\cos\gamma\cos\beta' - \cos\beta\cos\gamma')\right\}.$$

Dal confronto colla (II) si ricava:

$$Q - N = S,\quad Q - P = 0,\quad T = -Q.$$

Eliminando S e T fra queste tre relazioni e la quattro trovate col calcolo fatto per ξ, si trovano le cinque seguenti:

$$(9) \qquad A=\frac{\partial N}{\partial r}, \quad B=\frac{\partial Q}{\partial r}, \quad C=D=\frac{N-Q}{r}, \quad P=Q.$$

Se dunque si ammette che fra le sette funzioni esistano queste cinque relazioni, l'azione elettrodinamica ha un potenziale, che puó scriversi:

$$V=ii'dsds'\{(Q-N)\cos\theta\cos\theta'-Q\cos\varepsilon\}.$$

Deve esistere una sesta relazione fra le sette funzioni onde questo potenziale sia tale che conduca a quello di Neumann pel caso di circuiti chiusi. Infatti il potenziale elementare più generale che soddisfi a questa condizione é, come ha mostrato Helmholtz [1]:

$$-ii'dsds'\frac{c}{r}\cos\varepsilon+\frac{\partial^2\Phi}{\partial s\partial s'},$$

ove c è una costante e Φ una funzione di r. Ora si ha

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial s\partial s'}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial s'}\right)=\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}+\frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'}$$
$$=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right)\cos\theta\cos\theta'-\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\cos\varepsilon,$$

e quindi perchè il potenziale trovato conduca a quello di Neumann, bisogna che si abbia

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}=ii'dsds'(Q-N), \quad \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+ii'dsds'\frac{c}{r}=ii'dsds'Q.$$

Eliminando Φ resta:

$$N=Q+r\frac{\partial Q}{\partial r}+\frac{c}{r}.$$

---

[1] *N. Cimento*, gennaio 1872, dal *Crelle's Journal* b. 72,

Riunendo questa relazione alle cinque precedenti si ha:

$$A = r\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} + 2\frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{c}{r^2}, \quad B = \frac{\partial Q}{\partial r}, \quad C = D = \frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{c}{r^2},$$

(10)

$$N = Q + r\frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{c}{r}, \quad P = Q.$$

Soddisfatte queste sei relazioni, le formole (I) e (II) daranno la legge d'azione più generale, che ammetta un potenziale, e che conduca per circuiti chiusi al potenziale di Neumann.

Se si pone $Q = \frac{1+k}{2}\frac{c}{r}$, ove k è un'altra costante, si trova

$$Q - N = -\frac{1-k}{2}\frac{c}{r},$$

ed il potenziale V diviene quello di Helmholtz, cioè:

$$V = - ii'dsds'\frac{c}{r}\{(1-k)\cos\theta\cos\theta' + (1+k)\cos\varepsilon\}.$$

In conclusione, la legge d'azione fra elementi di corrente espressa dalle formole (I) e (II) ammette come casi speciali, e cioè per una opportuna scelta delle sette fuzioni, tutte le leggi elementari proposte.

7. Fra queste leggi elementari tutte meno una obbediscono al principio della eguaglianza fra l'azione e la reazione. Solo quella di Grassmann non è d'accordo con questo principio. È facile del resto stabilire quali relazioni devono esistere fra le sette funzioni onde si verifichi il suddetto principio. Chiamando sempre ξ, η, ζ le componenti parallele ai tre assi della forza esercitata da ds su ds', ed applicata al punto di mezzo di ds', e (ξ), (η), (ζ) le componenti della coppia, indichiamo con ξ', η', ζ', le componenti della forza che ds' esercita su ds ed applicata al punto di mezzo di ds, prese secondo direzioni parallele agli stessi assi, e con (ξ'), (η'), (ζ') le tre componenti, secondo le medesime direzioni, della coppia prodotta da ds' su di ds. Evidentemente, onde il principio dell'eguaglianza fra l'azione e la reazione sia soddisfatio, si deve avere:

$$\xi + \xi' = 0, \quad (\xi) + (\xi') + \zeta y' + \zeta' y - \eta z' - \eta' z = 0, \quad \text{etc.}$$

Ora, si possono scrivere facilmente i valori di $\xi'\ldots$, $(\xi')\ldots$, giacchè

basta cambiare nei valori di $\xi \ldots$, $(\xi) \ldots$, $x\, y\, z\, \alpha\, \beta\, \gamma$, in $x'\, y'\, z'\, \alpha'\, \beta'\, \gamma'$ e viceversa, come pure cambiare θ in $\pi - \theta'$, e θ' in $\pi - \theta$. Così facendo si trova:

$$\xi + \xi' = ii'dsds'(C - D)(\cos\theta' \cos\alpha - \cos\theta \cos\alpha'),$$

$$(\xi) + (\xi') + \zeta y' + \zeta' y - \eta z' - \eta' z =$$

$$ii'dsds' \frac{1}{r} \Big\{ (rC - N + P)[\cos\theta'(y' \cos\gamma - z' \cos\beta) - \cos\theta\,(y \cos\gamma' - z \cos\beta')]$$

$$- (rD - N + P)[\cos\theta'(y \cos\gamma - z \cos\beta) - \cos\theta\,(y' \cos\gamma' - z' \cos\beta')] \Big\}.$$

Si deve avere dunque:

$$N - P = rC = rD \tag{11}$$

onde il principio dell'eguaglianza fra l'azione e la reazione sia soddisfatto.

Qualora questo principio si volesse ammettere a priori, fra le sette funzioni sussisterebbero le due relazioni scritte or ora, e così a cinque si ridurrebbe il numero delle funzioni indeterminate. Ma allora verrebbe ad escludersi subito la formola di Grassmann, che pure ha un'importanza, in quanto ché certe teorie sui fenomeni elettrodinamici (come quelle di Reynard e di Clausius) conducono appunto a quella formola come espressione della forza ponderomotrice fra due elementi di corrente.

Si potrebbe d'altra parte ammettere a priori che l'elemento ds' non abbia a ruotare intorno a sè stesso come asse. In tal caso l'asse della coppia le cui componenti sono (ξ), (η), (ζ), dovrebbe essere perpendicolare a ds', e quindi la sua componente secondo ds' dovrebbe essere nulla. Ora questa componente è:

$$(\xi) \cos\alpha' + (\eta) \cos\beta' + (\zeta) \cos\gamma' =$$

$$ii'dsds'(Q - P) \cos\theta' \Big\{ \frac{x' - x}{r} (\cos\gamma \cos\beta' - \cos\beta \cos\gamma') + \cdots \Big\}.$$

Onde sia nulla, deve essere soddisfatta la condizione

$$P = Q. \tag{12}$$

In quel che segue non terremo conto nè di questa relazione, nè delle (11) volute dal principio d'eguaglianza fra l'azione e la reazione. Queste relazioni risulteranno stabilite, insieme ad altre, per via diversa.

CAPITOLO II.

Azione più generale ammissibile fra un elemento di corrente ed un polo magnetico.

8. Per stabilire la legge d'azione ponderomotrice fra un elemento di corrente ed un polo magnetico, partiremo dalle quattro ipotesi fondamentali seguenti, le tre prime delle quali sono analoghe a quelle ammesse nel caso dell'azione fra due elementi di corrente:

1.° Le azioni fra un polo d'intensità m ed un elemento di corrente ds percorso da una corrente i sono proporzionali ad $mids$ e ad una funzione della distanza; esse quindi si invertono se s'inverte la direzione della corrente o il magnetismo del polo.

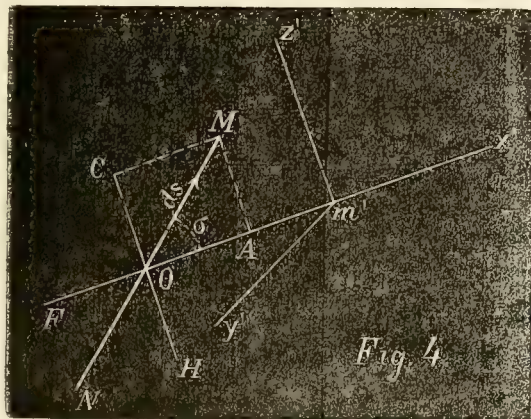
2.° Queste azioni dipendono solo dalla posizione relativa nello spazio dell'elemento di corrente e del polo.

3.° All'elemento di corrente possono sostituirsi le sue componenti.

4.° Le azioni suddette si annullano quando la distanza fra polo ed elemento di corrente diviene infinita.

In base ai primi tre di questi principi troviamo dapprima l'azione dell'elemento di corrente sul polo.

Sia MN l'elemento di corrente ds (Fig. 4), O il suo punto di mezzo, m' il polo magnetico, r la sua distanza da O, σ l'angolo che la direzione della corrente i che percorre ds fà con Om'.

Ammettiamo, per la massima generalità, che l'azione di ds su m' consti, di una forza applicata ad m' e di una coppia, ossia delle tre componenti dell'una e dell'altra secondo i tre assi x' y' z' passanti per m'. Come asse delle x' prenderemo la stessa retta Om', e come asse delle z' la perpendicolare ad $m'x'$ nel piano MOm'.

All'elemento ds potremo sostituire le sue componenti $du = AF$ e $dw = CH$, parallele agli assi $m'x'$ ed $m'z'$, ed in tal modo l'azione di ds su m' risulterà da quelle di du e dw, cioè delle azioni d'un elemento di corrente posto rispetto al polo in una delle due posizioni principali, nelle quali l'elemento é o longitudinale (du) o trasversale (dw),

È chiaro che nel caso dell'elemento longitudinale non può aver luogo

che una forza diretta secondo $m'x'$, e che rappresenteremo con

$$Em'idu\,,$$

essendo E una funzione di r. Infatti, per ragioni di simmetria, non può esistere una coppia avente l'asse secondo $m'x'$, in nulla essendo diverso un senso di rotazione dal senso opposto. Secondo $m'y'$, ed $m'z'$ non possono poi esistere nè forze nè coppie, giacchè se p. es. una forza esistesse secondo $m'z'$, questa s'invertirebbe facendo girare il sistema formato da du e da m' intorno ad r, mentre ad onta di questa rotazione la posizione relativa di du ed m' non resterebbe mutata.

Nella seconda posizione principale, e cioè nel caso dell'azione dell'elemento trasversale dw sul polo m', non possono esistere nè una componente della forza nè una della coppia secondo $m'x'$. Infatti, non può esistere la componente della forza, giacchè facendo girare di 180° il sistema formato da dw e da m' intorno ad r, l'elemento di corrente resterebbe invertito ma non la forza; e non può esistere la componente della coppia per ragione di simmetria. Ma non vi sono motivi validi per escludere le forze e le coppie dirette secondo $m'y'$ ed $m'z'$. Chiamando F, G, I, L quattro nuove funzioni di r, ammetteremo dunque che l'azione di dw su m' consti:

di una	forza	$-Fm'idw$	secondo	y',
»	»	$Gm'idw$	»	z',
»	coppia	$-Im'idw$	»	y',
»	»	$Lm'idw$	»	z'.

Non deve recar sorpresa se si ammettono delle coppie nell'azione sul polo. Escludendole a priori resterebbe pure escluso che l'azione di ds su m' si riduca ad una forza applicata a ds. Infatti, se agisce solo una forza applicata a ds, volendo supporla applicata ad m', si fa nascere col trasporto una coppia.

L'azione più generale di ds su m' consta adunque:

di una	forza	$Em'ids\cos\sigma$	diretta	secondo	x',
»	»	$-Fm'ids\,\mathrm{sen}\,\sigma$	»	»	y',
»	»	$Gm'ids\,\mathrm{sen}\,\sigma$	»	»	z',
»	coppia	$-Im'ids\,\mathrm{sen}\,\sigma$	coll'asse	»	y',
»	»	$Lm'ids\,\mathrm{sen}\,\sigma$	»	»	z'.

Giova ora trovare le componenti della forza risultante e della coppia risultante secondo tre assi ortogonali qualunque, rispetto ai quali chiameremo $x\ y\ z$ le coordinate di O, $x'\ y'\ z'$ quelle di m', $\alpha\ \beta\ \gamma$ gli angoli di ds cogli assi.

Si avrà evidentemente:

$$(13)\qquad \begin{cases} r^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2, \\ r\cos\sigma = (x'-x)\cos\alpha + (y'-y)\cos\beta + (z'-z)\cos\gamma. \end{cases}$$

I coseni degli angoli che gli assi $x'\ y'\ z'$ passanti per m' fanno coi nuovi assi, si trovano in modo simile che per quelli del cap. precedente. E precisamente, quelli relativi ad $m'x'$ sóno:

$$(14)\qquad \frac{x'-x}{r}, \quad \frac{y'-y}{r}, \quad \frac{z'-z}{r};$$

quelli relativi ad $m'y'$ (che é perpendicolare al piano di ds con r) sono:

$$(15)\qquad \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\left(\frac{z'-z}{r}\cos\beta - \frac{y'-y}{r}\cos\gamma\right),$$

ed altri due che si deducono da questo con permutazioni circolari; e quelli infine relativi ad $m'z'$ (che si possono anche trovare considerando che questa retta é perpendicolare al piano delle due $m'x'$ ed $m'y'$) sono:

$$(16)\qquad \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\left(\cos\alpha - \frac{x'-x}{r}\cos\sigma\right),$$

ed altri due deducibili colla permutazione delle lettere.

Le componenti ξ, η, ζ secondo direzioni parallele ai nuovi assi della forza applicata ad m' saranno dunque:

$$(\text{III})\quad \xi = m'ids\left\{(E-G)\cos\sigma\frac{x'-x}{r} + F\left(\frac{y'-y}{r}\cos\gamma - \frac{z'-z}{r}\cos\beta\right) + G\cos\alpha\right\}.$$

Le altre due η e ζ si dedurranno facilmente permutando.

Similmente, le componenti (ξ), (η), (ζ) della coppia secondo i tre nuovi assi saranno:

$$(\text{IV})\quad (\xi) = m'ids\left\{-L\cos\sigma\frac{x'-x}{r} + I\left(\frac{y'-y}{r}\cos\gamma - \frac{z'-z}{r}\cos\beta\right) + L\cos\alpha\right\};$$

le altre due si deducono da questa nel solito modo.

A queste formole può darsi la forma seguente:

$$(\mathrm{III}')\qquad \xi = m'ids \left\{ -(E-G)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{x'-x}{r} + F\left(\frac{y'-y}{r}\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{z'-z}{r}\frac{\partial y}{\partial s}\right) + G\frac{\partial x}{\partial s} \right\}.$$

$$(\mathrm{IV}')\qquad (\xi) = m'ids \left\{ L\frac{\partial r}{\partial s}\frac{x'-x}{r} + I\left(\frac{y'-y}{r}\frac{\partial z}{\partial s} - \frac{z'-z}{r}\frac{\partial y}{\partial s}\right) + L\frac{\partial x}{\partial s} \right\}.$$

Se con queste formole si calcolasse l'azione d'un elemento di corrente sopra un elemento magnetico, e poi si osservasse quali forze e quali coppie debbono in tal caso, per ragione di simmetria, essere nulle, si giungerebbe alla conclusione che E, G ed I sono zero. Ma i ragionamenti necessari per giungere a tale conclusione potrebbero apparire non abbastanza rigorosi, e d'altra parte non è necessario annullare fin d'ora queste tre funzioni. Un'analoga osservazione vale anche pel caso seguente dell'azione d'un polo sopra un elemento di corrente,

9. Si prendano anche in questo caso tre assi $x'\,y'\,z'$ (Fig. 5) ortogonali, l'uno $O'x'$ diretto secondo la retta mO', che và dal polo magnetico m al centro O' dell'elemento di corrente $M'N' = ds'$ che ne subisce l'azione, l'altro $O'z'$ nel piano formato da ds' con $mO' = r$, ed il terzo $O'y'$ perpendicolare ai due primi. All'elemento ds' si potranno qui pure sostituire le componenti $A'F' = du'$, $C'H' = dw'$ nelle due posizioni principali rispetto al polo m. Ragionando in tutto come nel § precedente, si arriva e formole simili alle (III) e (IV), e cioè:

$$(\mathrm{V})\qquad \xi = mi'ds' \left\{ (E'-G')\cos\sigma' \frac{x'-x}{r} + F'\left(\frac{y'-y}{r}\cos\gamma' - \frac{z'-z}{r}\cos\beta'\right) + G'\cos\alpha' \right\}.$$

$$(\mathrm{VI})\qquad (\xi) = mi'ds' \left\{ -L'\cos\sigma' \frac{x'-x}{r} + I'\left(\frac{y'-y}{r}\cos\gamma' - \frac{z'-z}{r}\cos\beta'\right) + L'\cos\alpha' \right\},$$

ed altre analoghe, per esprimere le componenti ξ, η, ζ, secondo assi qua-

lunque della forza applicata in O' e dovuta all'azione di m su ds', e quelle (ξ), (η), (ζ) delle coppia, dovuta all'azione stessa e secondo le medesime direzioni. In queste fermole E' F' G' I' L' sono funzioni di r, σ' è l'angolo di ds' con r, $x\,y\,z$ le coordinate di m, $x'\,y'\,z'$ quelle di O', $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ gli angoli di ds' cogli assi.

Alle formole (V) e (VI) si puó dare naturalmente una forma simile a quella delle (III') e (IV'), ma che non scriveró, non avendo qui occasione di farne uso diretto. Dovendo peró designare in seguito queste formole equivalenti alle (V) e (VI) le indicheró con (V') e (VI').

10. Le formole (III), (IV), (V) e (VI) danno come caso particolare la formola di Laplace. Se infatti si suppone che nelle (III) e (IV) si abbia (c essendo una costante):

$$E = G = I = 0, \quad F = \frac{c}{r^2}, \quad L = \frac{c}{r},$$

tutto si riduce ad una forza $\frac{c}{r^2} m' i ds$ applicata ad m e perpendicolare al piano formato da r con ds, e ad una coppia $\frac{c}{r} m' i ds$ avente l'asse nel detto piano perpendicolarmente ad r. È facile poi vedere, tenendo conto delle direzioni della forza e della coppia, che esse possono comporsi in un'unica forza $\frac{c}{r^2} m' i ds$ applicata all'elemento di corrente, e che altro non è che la forza di Laplace. Del pari, se nelle (V) e (VI) si suppone:

$$E' = G' = I' = L' = 0, \quad F' = \frac{c}{r^2},$$

si cade evidentemente ancora nella formola di Laplace.

Vediamo piú generalmente quali relazioni devono esistere fra le dieci funzioni di r introdotte in questo capitolo affinché si verifichi il principio dell'azione e reazione.

Consideriamo un elemento di corrente ds (Fig. 4) ed un polo magnetico m'. Le componenti $\xi\;\eta\;\zeta$ della forza applicata in m' e dovuta a ds saranno date dalla (III) e analoghe; quelle della coppia dovuta ancora all'azione di ds su m', e cioè (ξ), (η), (ζ) saranno date dalla (IV). Chiamiamo ora ξ', η', ζ', (ξ'), (η'), (ζ') le componenti della forza (applicata in O) e quelle della coppia, dovute all'azione di m' su ds. Per iscrivere i valori di queste sei componenti basterà prendere le (V) e (VI) e cambiare in esse: m in m', ds' in ds, i' in i, $x\,y\,z$ in $x'\,y'\,z'$ e viceversa, σ' in $180° - \sigma$ ed infine $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ in $\alpha\;\beta$ e γ.

Si potranno così calcolare le somme $\xi + \xi'$, $\eta + \eta' \ldots\ldots$, le quali devono essere nulle onde sia verificato il suddetto principio. Del pari devono essere nulli i momenti totali rispetto ai tre assi, cioè

$$(\xi) + (\xi') + \zeta y' + \zeta' y - \eta z' - \eta' z \,, \text{ etc.}$$

Ora, si trova facilmente:

$$\xi + \xi' = m' i ds \Big\{ (E + E' - G - G') \cos\sigma \frac{x' - x}{r} + (F - F')\left(\frac{y' - y}{r} \cos\gamma - \frac{z' - z}{r} \cos\beta\right) + (G + G') \cos\alpha \Big\}.$$

Perchè sia $\xi + \xi' = 0$ deve essere dunque intanto:

$$E + E' = G + G' = 0 \,, \quad F = F'.$$

Tenendo conto di queste tre prime relazioni si trova:

$$(\xi) + (\xi') + \zeta y' + \zeta' y - \eta z' - \eta' z = m' i ds \Big\{ (L + L' - rF)\left(\cos\alpha - \cos\sigma \frac{x' - x}{r}\right) + (I - I' + rG)\left(\frac{y' - y}{r} \cos\gamma - \frac{z' - z}{r} \cos\beta\right) \Big\},$$

e onde anche il momento sia zero, devono essere zero le quantità $L + L' - rF$ ed $I - I' + rG$. Le condizioni onde sia verificato il principio dell'eguaglianza fra l'azione e la reazione sono dunque le seguenti:

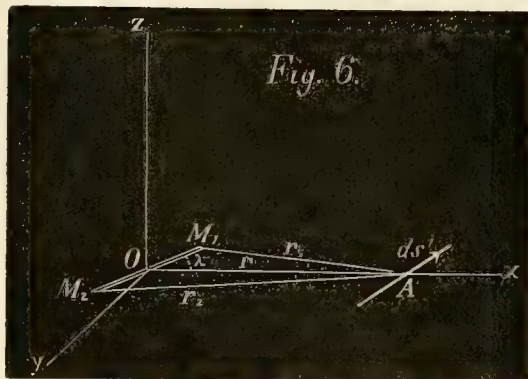
$$(17) \qquad F = F', \quad E + E' = G' + G' = 0, \quad L + L' = rF, \quad I' - I = rG.$$

Esse sono evidentemente verificate da quei valori delle funzioni che conducono alla formola di Laplace, che sono:

$$F' = F' = \frac{c}{r^2}, \quad L = \frac{c}{r}, \quad E = G = I = E' = G' = I' = L' = 0.$$

CAPITOLO III.

Azione d'un elemento magnetico e di un piccolo circuito chiuso sopra un elemento di corrente.

11. Dobbiamo ora calcolare queste azioni per mezzo delle formole (I), (II), (V), (VI). Cominciamo dal calcolo dell'azione prodotta da un elemento magnetico, e cioè dal sistema di due poli M_1 ed M_2 (Fig. 6) d'intensità $+m$ e $-m$, sopra un elemento ds' percorso da una corrente i'. Sia A il centro di questo, O quello dell'elemento magnetico, e si ponga $M_2O = OM_1 = l$, in modo che il momento magnetico di M_1M_2 sarà $\mu = 2ml$. Chiamiamo r la distanza OA, r_1 ed r_2 le M_1A ed M_2A, λ l'angolo M_1OA, e riferiamo il sistema a tre assi ortogonali coll'origine in O, e dei quali quello delle x non sia altro che la retta OA, ed il piano xOz sia il piano M_1OA. Sieno infine α' β' γ' gli angoli di ds' con questi assi.

L'azione dell'elemento magnetico sull'elemento di corrente ds' si comporrà dell'azione del polo m posto in M_1 e di quella del polo $-m$ posto in M_2.

Sieno ξ_1 η_1 ζ_1 le componenti della forza applicata in A, e (ξ_1), (η_1), (ζ_1), quelle della coppia, dovute all'azione di M_1 su ds'; e sieno ξ_2, η_2, ζ_2, (ξ_2), (η_2), (ζ_2) le analoghe componenti dell'azione di M_2 su ds'.

Si otterranno le prime sei componenti dalle formole (V) e (VI) ponendovi:

$l \cos\lambda$	al posto di		x
0	»	»	y
$l \operatorname{sen}\lambda$	»	»	z
r	»	»	x'
0	»	»	y'
0	»	»	z'
$\frac{1}{r_1}[(r - l\cos\lambda)\cos\alpha' - l\operatorname{sen}\lambda\cos\gamma']$	»	»	$\cos\sigma'$
$r_1^2 = r^2 + l^2 - 2rl\cos\lambda$	»	»	r^2
E_1', F_1'..... L_1'	»	»	E', F'..... L'.

Le funzioni E_1', F_1'..... non sono altro che ciò che divengono E', F'..... quando in queste si pone r_1 al posto di r.

Fatte queste sostituzioni si dovrà tener conto della circostanza che l è piccolissimo di fronte ad r, ragione per cui si potrà scrivere (a):

$$E_1' = E' - l \cos\lambda \frac{\partial E'}{\partial r}, \quad F_1' = F' - l \cos\lambda \frac{\partial F'}{\partial r}, \ \ldots.. \ \frac{1}{r_1^n} = \frac{1}{r^n} + \frac{nl\cos\lambda}{r^{(n+1)}},$$

e si potranno trascurare i termini contenenti potenze di $\frac{l}{r}$ superiori alla prima.

Una volta ottenute le sei componenti relative ad M_1, se ne dedurranno quelle relative ad M_2 semplicemente col cambiar segno ad l ed m.

Chiamando allora φ_x, φ_y, φ_z le componenti, prese secondo direzioni parallele agli assi, della forza applicata ad A, e ψ_x, ψ_y, ψ_z le componenti della coppia, dovute l'una e l'altra all'azione dell'intero elemento magnetico sull'elemento di corrente, si avrà $\varphi_x = \xi_1 + \xi_2$, $\varphi_y = \eta_1 + \eta_2$, $\varphi_z = \zeta_1 + \zeta_2$, $\psi_x = (\xi_1) + (\xi_2)$, $\psi_y = (\eta_1) + (\eta_2)$, $\psi_z = (\zeta_1) + (\zeta_2)$. A calcoli fatti si trova:

$$(\mathrm{VII}) \left\{ \begin{aligned} \varphi_x &= \frac{\mu i' ds'}{r} \left\{ -r \frac{\partial E'}{\partial r} \cos\alpha' \cos\lambda + F' \cos\beta' \operatorname{sen}\lambda - (E' - G') \cos\gamma' \operatorname{sen}\lambda \right\}, \\ \varphi_y &= \frac{\mu i' ds'}{r} \left\{ -F' \cos\alpha' \operatorname{sen}\lambda - r \frac{\partial G'}{\partial r} \cos\beta' \cos\lambda + r \frac{\partial F'}{\partial r} \cos\gamma' \cos\lambda \right\}, \\ \varphi_z &= \frac{\mu i' ds'}{r} \left\{ -(E' - G') \cos\alpha' \operatorname{sen}\lambda - r \frac{\partial F'}{\partial r} \cos\beta' \cos\lambda - r \frac{\partial G'}{\partial r} \cos\gamma' \cos\lambda \right\}, \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{VIII}) \left\{ \begin{aligned} \psi_x &= \frac{\mu i' ds'}{r} \left\{ I' \cos\beta' \operatorname{sen}\lambda + L' \cos\gamma' \operatorname{sen}\lambda \right\}, \\ \psi_y &= \frac{\mu i' ds'}{r} \left\{ -I' \cos\alpha' \cos\lambda - r \frac{\partial L'}{\partial r} \cos\beta' \cos\lambda + r \frac{\partial I'}{\partial r} \cos\gamma' \cos\lambda \right\}, \\ \psi_z &= \frac{\mu i' ds'}{r} \left\{ L' \cos\alpha' \operatorname{sen}\lambda - r \frac{\partial I'}{\partial r} \cos\beta' \cos\lambda - r \frac{\partial L'}{\partial r} \cos\gamma' \cos\lambda \right\}. \end{aligned} \right.$$

(a) E_1' è funzione di l in quanto che r_1 è funzione di questa quantità. Ponendo quindi:

$$E_1' = (E_1')_{l=0} + l \left(\frac{\partial E_1'}{\partial l} \right)_{l=0}, \quad \text{si ha } (E_1')_{l=0} = E', \quad \frac{\partial E_1'}{\partial l} = \frac{\partial E_1'}{\partial r} \frac{\partial r_1}{\partial l} = \frac{\partial E'}{\partial r} \frac{l - r\cos\lambda}{r_1},$$

e perciò:

$$\left(\frac{\partial E_1'}{\partial l} \right)_{l=0} = - \frac{\partial E'}{\partial r} \cos\lambda.$$

Per cui si ha:

$$E_1' = E' - l \cos\lambda \frac{\partial E'}{\partial r}.$$

Realmente basta calcolare le componenti della forza, giacchè quelle della coppia possono dedursi da esse nello stesso modo che la (VI) può dedursi dalla (V), vale a dire facendo $E'=0$, e cambiando F' in I', e G' in L'.

12. Le componenti così calcolate sono riferite ad assi speciali, ma bastano per lo scopo che si ha in vista. Tuttavia, se si volessero avere le componenti secondo una terna d'assi qualunque, si potrebbe operare nel modo seguente.

Serviamoci della Fig. 1, nella quale supponiamo adesso che MN rappresenti l'elemento magnetico, e adottiamo le stesse notazioni adoperate già colla Fig. 1 per gli angoli e le cordinate, e cioè chiamiamo ora θ e θ' gli angoli dell'elemento magnetico e dell'elemento di corrente colla retta r, ε l'angolo che essi formano nello spazio, etc. Avremo $\alpha'=\theta'$, $\lambda=\theta$, $\cos\beta'=\operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\omega$, $\cos\gamma'=\operatorname{sen}\theta'\cos\omega$. Introducendo questi nuovi angoli al posto di α' β' γ' λ nei valori delle tre componenti della forza, apparirà immediatamente, che al posto di esse si possono considerare le cinque forze seguenti:

$$\Phi_x'=\frac{\mu i'ds'}{r}\left\{-(E'-G')\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos\omega-r\frac{\partial E'}{\partial r}\cos\theta\cos\theta'\right.$$
$$\left.+F'\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\omega\right\}\ \text{diretta secondo } O'x',$$

$$\Phi_y'=\frac{\mu i'ds'}{r}\left\{-F'\operatorname{sen}\theta\cos\theta'\right\}\ \ldots\ldots\ \text{»}\quad\text{»}\quad O'y',$$

$$\Phi_z'=\frac{\mu i'ds'}{r}\left\{-(E'-G')\operatorname{sen}\theta\cos\theta'\right\}\ \ldots\ldots\ \text{»}\quad\text{»}\quad O'z',$$

$$\Phi_d'=\frac{\mu i'ds'}{r}\left\{-r\frac{\partial G'}{\partial r}\cos\theta\operatorname{sen}\theta'\right\}\ \ldots\ldots\ \text{»}\quad\text{»}\quad O'D',$$

$$\Phi_e'=\frac{\mu i'ds'}{r}\left\{r\frac{\partial F'}{\partial r}\cos\theta\operatorname{sen}\theta'\right\}\ \ldots\ldots\ \text{»}\quad\text{»}\quad O'E';$$

ma i coseni degli angoli che queste cinque direzioni fanno con una terna qualunque di assi ortogonali sono già noti, poichè sono quelli segnati (2), (3), (4), (5) e (6), qualora anche qui si indichino con $x\,y\,z$, $x'\,y'\,z'$, le coordinate di O ed O', e con $\alpha\,\beta\,\gamma$, $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$, gli angoli di MN ed $M'N'$ cogli assi. Chiamando quindi $\Phi_x\,\Phi_y\,\Phi_z$ le componenti, secondo questi nuovi assi, della forza applicata in O' e dovuta all'azione dell'elemento magne-

tico MN sull'elemento di corrente $M'N'$, si avrà:

$$\Phi_x = \frac{\mu i' ds'}{r} \Big\{ \Phi_x' \frac{x'-x}{r} + \Phi_y' \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\Big(\frac{z'-z}{r}\cos\beta - \frac{y'-y}{r}\cos\gamma\Big)$$

$$+ \Phi_z' \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\Big(\cos\alpha - \frac{x'-x}{r}\cos\theta\Big) + \Phi_d' \frac{1}{\operatorname{sen}\theta'}\Big(\cos\alpha' - \frac{x'-x}{r}\cos\theta'\Big)$$

$$+ \Phi_e' \frac{1}{\operatorname{sen}\theta'}\Big(\frac{z'-z}{r}\cos\beta' - \frac{y'-y}{r}\cos\gamma'\Big)\Big\}.$$

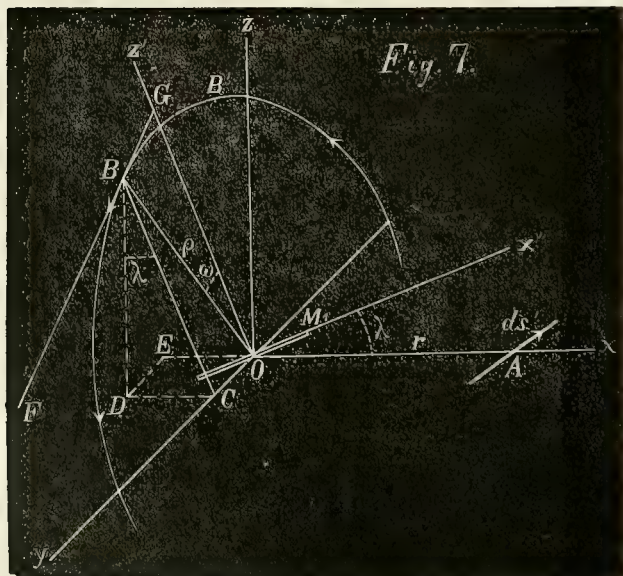
Eseguendo le sostituzioni e riducendo si trova:

$$\Phi_x = \frac{\mu i' ds'}{r} \Big\{ \Big[2(E'-G') - r\frac{\partial(E'-G')}{\partial r}\Big]\cos\theta\cos\theta'\frac{x'-x}{r}$$

$$\text{(VII')} \qquad -(E'-G')\cos\varepsilon\frac{x'-x}{r} + F'(\cos\gamma\cos\beta' - \cos\beta\cos\gamma')$$

$$-\Big(F' - r\frac{\partial F'}{\partial r}\Big)\Big(\frac{z'-z}{r}\cos\beta' - \frac{y'-y}{r}\cos\gamma'\Big)\cos\theta$$

$$-(E'-G')\cos\theta'\cos\alpha - r\frac{\partial G'}{\partial r}\cos\theta\cos\alpha'\Big\}.$$

Le componenti Φ_x, Φ_y, si dedurranno da questa colla permutazione. Quelle poi della coppia, che diremo ancora ψ_x, ψ_y, ψ_z, secondo i nuovi assi, si dedurranno da quelle della forza, facendovi $E' = 0$ e cambiando F', G', in I' ed L'; cosichè l' espressione di ψ_x, che dovrebbe segnarsi con (VIII') ma che non trascrivo, si otterrà dalla (VII') nel modo ora detto.

13. Immaginiamo ora condotto per O (Fig. 6) un piano perpendicolare all'asse dell'elemento magnetico M_1M_2, ed in questo piano tracciato un piccolo circuito chiuso, cui daremo la forma d' una circonferenza di raggio ρ piccolissimo e col centro in O (Fig. 7), e che supporremo percorso da una corrente d' intensità i nel senso delle freccie. Sia B un punto di

questa circonferenza, ω l'angolo che OB fa con Oz', intersezione del piano xz col piano della corrente circolare, e consideriamo l'elemento di corrente $ds = \rho d\omega$ posto in B. È nostro scopo attuale il calcolare colle formole generali (I) e (II) l'azione del circuito circolare sull'elemento ds' posto in A, e perciò si dovranno calcolare prima le componenti della forza e della coppia dovute all'azione dell'elemento ds sull'elemento ds'. Tutte queste componenti saranno prese secondo direzioni parallele agli assi Ox, Oy, Oz, che sono quelli già adoperati nel § 11.

Siccome le coordinate di B sono:

$$x = OE = -\rho \cos\omega \operatorname{sen}\lambda, \quad y = OC = \rho \operatorname{sen}\omega, \quad z = DB = \rho \cos\omega \cos\lambda,$$

come si deduce facilmente dalla figura, e siccome i coseni degli angoli $\alpha\ \beta\ \gamma$ che ds fa coi tre assi sono dati da:

$$\cos\alpha = \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\lambda, \quad \cos\beta = \cos\omega, \quad \cos\lambda = -\operatorname{sen}\omega \cos\lambda,$$

(che si possono trovare p. es. considerando che essi sono i coseni degli angoli cogli assi della retta che passa pel punto B e pel punto di coordinate $0, \frac{\rho}{\operatorname{sen}\omega}, 0$, in cui l'elemento prolungato incontra Oy); così, mantenendo le notazioni adottate, si potranno scrivere le componenti $\xi, \eta, \zeta, (\xi), (\eta), (\zeta)$ della forza e della coppia dovute all'azione di ds su ds', mettendo nelle (I) e (II):

$-\rho \cos\omega \operatorname{sen}\lambda$	al posto di	x,
$\rho \operatorname{sen}\omega$	» »	y,
$\rho \cos\omega \cos\lambda$	» »	z,
r	» »	x',
0	» »	y',
0	» »	z',
$\operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\lambda$	» »	$\cos\alpha$,
$\cos\omega$	» »	$\cos\beta$,
$-\operatorname{sen}\omega \cos\lambda$	» »	$\cos\gamma$,
$A_1, B_1, \ldots. Q_1$,	» »	$A, B \ldots. Q$,

$A_1, B_1 \ldots.$ essendo ciò che divengono $A, B, \ldots.$ quando si pone in queste funzioni $r_1 = BA$ al posto di r.

Inoltre invece di r si dovrà scrivere r_1, essendo poi

$$r_1^2 = r^2 + \rho^2 + 2r\rho \cos\omega \operatorname{sen}\lambda,$$

e per $\theta, \theta', \varepsilon$ si sostituiranno i loro attuali valori dati da:

$$\begin{aligned} r_1 \cos\theta &= (x' - x)\cos\alpha + \cdots\cdots = r \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\lambda, \\ r_1 \cos\theta' &= (x' - x)\cos\alpha' + \cdots\cdots = r\cos\alpha' - \rho\cos\beta' \operatorname{sen}\omega + \rho q \cos\omega, \\ \cos\varepsilon &= \cos\alpha\cos\alpha' \quad + \cdots\cdots = \cos\beta'\cos\omega + q \operatorname{sen}\omega, \end{aligned}$$

in cui per brevità si è posto $q = \cos\alpha' \operatorname{sen}\lambda - \cos\gamma' \cos\lambda$.

Fatte tali sostituzioni si terrà conto dell'essere ρ piccolissimo di fronte ad r, per cui si può scrivere:

$$A_1 = A + \rho \cos\omega \operatorname{sen}\lambda \frac{\partial A}{\partial r}, \ldots\ldots\ (a) \qquad \frac{1}{r_1^n} = \frac{1}{r^n} - \frac{n\rho\cos\omega \operatorname{sen}\lambda}{r^{(n+1)}},$$

e di più possono trascurarsi entro le grandi parentesi le potenze di $\frac{\rho}{r}$ superiori alla prima. Una grande semplificazione si avrà poi sommando all'azione dell'elemento posto in B quella dell'elemento posto nel punto B', simmetrico a B rispetto al piano xz, e che quindi corrisponde ad un angolo $-\omega$. Chiamando ξ', η', ζ', (ξ'), (η'), (ζ') le componenti dell'azione dovuta all'elemento pósto in B', si trova, dopo un calcolo che non presenta difficoltà alcuna:

$$\xi + \xi' = 2ii'dsds' \left\{ -(A - B - D)\frac{\rho}{r}\cos\beta' \operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}^2\omega + B\cos\beta'\cos\omega \right.$$
$$\left. + \frac{\partial B}{\partial r}\rho\cos\beta' \operatorname{sen}\lambda \cos^2\omega \right\}.$$

Notando ora che $ds = \rho d\omega$, ed integrando rispetto ad ω da 0 a π, si avrà la componente φ_x della forza prodotta su ds' dall'intero circuito, e cioè:

$$\varphi_x = 2ii\rho ds' \left\{ -(A - B - D)\frac{\rho}{r}\cos\beta' \operatorname{sen}\lambda \int_0^\pi \operatorname{sen}^2\omega d\omega + B\cos\beta' \int_0^\pi \cos\omega d\omega \right.$$
$$\left. + \frac{\partial B}{\partial r}\rho\cos\beta' \operatorname{sen}\lambda \int_0^\pi \cos^2\omega d\omega \right\}.$$

Non resta che ad eseguire queste facili integrazioni per avere φ_x. Le altre due componenti φ_y, φ_z della forza, e le tre ψ_x, ψ_y, ψ_z della coppia,

(a) Analogamente alla nota annessa al § 11.

si trovano in modo simile. Ecco riuniti i risultati ai quali si giunge:

$$
\text{(IX)} \begin{cases}
\varphi_x = \dfrac{\pi\rho^2 i i' ds'}{r}\left(-A+B+r\dfrac{\partial B}{\partial r}+D\right)\cos\beta'\,\mathrm{sen}\,\lambda\,, \\
\varphi_y = \dfrac{\pi\rho^2 i i' ds'}{r}\left\{\left(-A+C+r\dfrac{\partial C}{\partial r}+D\right)\cos\alpha'\,\mathrm{sen}\,\lambda+(B-C)\cos\gamma'\cos\lambda\right\}, \\
\varphi_z = \dfrac{\pi\rho^2 i i' ds'}{r}(C-B)\cos\beta'\cos\lambda\,,
\end{cases}
$$

$$
\text{(X)} \begin{cases}
\psi_x = \dfrac{\pi\rho^2 i i' ds'}{r}\left\{2(P-Q)\cos\alpha'\cos\lambda+\left(N-Q-r\dfrac{\partial Q}{\partial r}\right)\cos\gamma'\,\mathrm{sen}\,\lambda\right\} \\
\psi_y = \dfrac{\pi\rho^2 i i' ds'}{r}(Q-P)\cos\beta'\cos\lambda\,, \\
\psi_z = \dfrac{\pi\rho^2 i i' ds'}{r}\left\{\left(P-N+r\dfrac{\partial P}{\partial r}\right)\cos\alpha'\,\mathrm{sen}\,\lambda-(P-Q)\cos\gamma'\cos\lambda\right\}.
\end{cases}
$$

14. Se si volessero trovare le componenti della forza (sempre supposta applicata in A) e della coppia, secondo tre direzioni ortogonali qualunque, si procederebbe in modo analogo a quello indicato nel § 12. Ritenendo le analoghe denominazioni per gli angoli e le coordinate, e cioè chiamando qui θ l'angolo che l'asse del piccolo circuito fa con r, θ' quello di ds' col prolungamento di r, $\alpha\ \beta\ \gamma$ gli angoli dell'asse del circuito coi tre assi di riferimento etc., si troverebbe, dicendo φ_x, ψ_x le componenti secondo il nuovo asse delle x della forza e della coppia:

$$
\begin{aligned}
\varphi_x = \frac{\pi\rho^2 i i' ds'}{r}\Bigg\{&\left(A-r\frac{\partial B}{\partial r}-C-D\right)\left(\frac{z'-z}{r}\cos\beta'-\frac{y'-y}{r}\cos\gamma'\right)\cos\theta \\
&+\left(-2A+B+r\frac{\partial B}{\partial r}+C+r\frac{\partial C}{\partial r}+2D\right)\left(\frac{z'-z}{r}\cos\beta-\frac{y'-y}{r}\cos\gamma\right)\cos\theta' \qquad \text{(IX}'\text{)} \\
&-\left(A-B-r\frac{\partial B}{\partial r}-D\right)(\cos\gamma\cos\beta'-\cos\beta\cos\gamma')\Bigg\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi_x = \frac{\pi\rho^2 i i' ds'}{r}\Bigg\{&\left(2P-2Q-r\frac{\partial P}{\partial r}+r\frac{\partial Q}{\partial r}\right)\cos\theta\cos\theta'\frac{x'-x}{r} \\
&+\left(N-Q-r\frac{\partial Q}{\partial r}\right)\cos\varepsilon\frac{x'-x}{r}+\left(P-N+r\frac{\partial P}{\partial r}\right)\cos\theta'\cos\alpha \qquad \text{(X}'\text{)} \\
&-(P-Q)\cos\theta\cos\alpha'\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

15. Stabilite così le formole che danno le componenti della forza e della coppia agenti sull'elemento di corrente ds', tanto per opera dell'elemento magnetico, quanto per opera del piccolo circuito circolare concentrico all'elemento magnetico e giacente in un piano ad esso perpendicolare, vediamo a quali condizioni devono soddisfare le sette funzioni A, $B \dots Q$, e le cinque funzioni $E', F', \dots L'$, affinchè risultino in ogni caso identiche le azioni dell'elemento magnetico e del piccolo circuito.

Onde si verifichi tale identità in ogni caso, converrà che le formole (VII) e (VIII) diano per le componenti gli stessi valori dati dalle formole (IX) e (X), qualunque sieno i valori attribuiti agli angoli che entrano nelle stesse formole. Quindi, oltre ad essere:

$$\pi \rho^2 i = \mu,$$

necessiterà sieno eguali i coefficienti dei prodotti di seni e coseni che si corrispondono nei due valori d'una stessa componente. Si avrà quindi:

$$E' - G' = 0, \qquad N - Q - r\frac{\partial Q}{\partial r} = L',$$

$$\frac{\partial E'}{\partial r} = 0, \qquad I' = 0,$$

$$A - B - r\frac{\partial B}{\partial r} - D = - F', \qquad P - Q = 0,$$

$$A - C - r\frac{\partial C}{\partial r} - D = F' \qquad P - Q = r\frac{\partial L'}{\partial r},$$

$$B - C = r\frac{\partial F'}{\partial r}, \qquad P - N + r\frac{\partial P}{\partial r} = L'.$$

$$\frac{\partial G'}{\partial r} = 0,$$

Relazioni equivalenti a queste si otterrebbero adoperando le formole (VII'), (VIII'), (IX'), (X'), invece delle (VII), (VIII), (IX), (X).

Queste relazioni non sono tutte distinte fra loro, e possonsi ridurre ad un numero minore, e precisamente a nove, ed in pari tempo dar loro forma più parlante, nel modo seguente.

Dalla seconda si deduce $E' = \text{cost.}$; ma le funzioni $E', F' \dots$ si annullano per $r = \infty$, dunque $E' = 0$. La prima e la sesta danno allora $G' = 0$. La nona e decima porgono $\frac{\partial L'}{\partial r} = 0$ e quindi $L' = 0$.

Prendiamo ora la terza, quarta e quinta, che fino ad ora non sono

state adoperate. Sottraendo la terza dalla quarta si ha:

$$B - C + r\frac{\partial(B - C)}{\partial r} = 2F',$$

e mettendovi il valore di $B - C$ dato dalla quinta:

$$2r\frac{\partial F'}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 F'}{\partial r^2} = 2F'.$$

L'integrale di questa equazione è:

$$F' = \frac{c'}{r^2} + c''r;$$

essendo c', c'', delle costanti. Ma deve aversi $F' = 0$ per $r = \infty$, dunque $F' = \frac{c'}{r^2}$.

Le relazioni trovate si riducono dunque alle seguenti:

$$(18)\qquad E' = 0, \quad F' = \frac{c'}{r^2}, \quad G' = 0, \quad I' = 0, \quad L' = 0;$$

$$(19)\quad A - C - r\frac{\partial C}{\partial r} - D = \frac{c'}{r^2}, \quad B - C = -2\frac{c'}{r^2}, \quad P = Q, \quad N - Q - r\frac{\partial Q}{\partial r} = 0.$$

Le funzioni relative all'azione del polo sull'elemento di corrente restano in tal modo tutte determinate completamente, e precisamente secondo lo vuole la formola di Laplace. Invece, fra le sette funzioni relative all'azione fra due elementi di corrente, si trovano solo quattro relazioni.

È facile verificare che dando alle sette funzioni quelle espressioni o quei valori con cui le formole generali dell'azione fra due elementi di corrente si trasformano o nella formola di Ampère o in quella di Grassmann, le dette quattro relazioni (19) restano soddisfatte. Così pure si può far vedere che le relazioni stesse sono incompatibili colle (9). Infatti mettendo nelle due prime delle (19) i valori di A, B, C, D, dati dalle (9) si ha:

$$\frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{N}{r} + \frac{Q}{r} = \frac{c'}{r^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{N}{r} + \frac{Q}{r} = -2\frac{c'}{r^2},$$

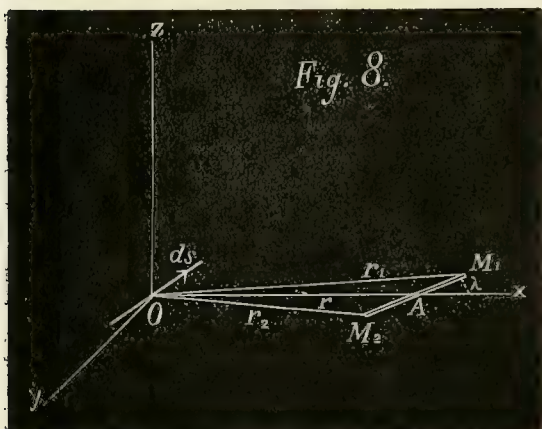
che evidentemente non possono esistere insieme finchè c' non è zero.

Dunque, il supporre l'esistenza di un potenziale per gli elementi di corrente conduce alla conseguenza, che le azioni dell'elemento magnetico e del piccolo circuito chiuso sono diverse sopra un medesimo elemento di corrente.

CAPITOLO IV.

Azione d'un elemento di corrente sopra un elemento magnetico e sopra un piccolo circuito chiuso.

16. Dovendo calcolare queste azioni s'impiegheranno le formole (I), (II), (III) e (IV). Cominciamo dal caso dell'elemento magnetico.

Sia ds l'elemento di corrente (Fig. 8) percorso dalla corrente i, O il suo punto di mezzo, M_1 ed M_2 i poli magnetici $+m'$ e $-m'$ costituenti l'elemento magnetico, $2l$ la loro distanza, A il punto di mezzo di M_1M_2, $\mu' = 2m'l$ il suo momento magnetico, λ l'angolo di M_1M_2 col prolungamento di OA, e poniamo $OM_1 = r_1$, $OA = r$, $OM_2 = r_2$.

L'azione di ds sull'elemento magnetico M_1M_2 si comporrà dell'azione su M_1 e di quella su M_2. Assunto come asse delle x la OA, e come asse delle z la perpendicolare in O ad OA nel piano OAM_1, sieno $\alpha\ \beta\ \gamma$ gli angoli di ds cogli assi, $\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$ le componenti della forza e (ξ_1), (η_1), (ζ_1) quelle della coppia, prodotte da ds su M_1, ξ_2, η_2, ζ_2, (ξ_2), (η_2), (ζ_2) le analoghe componenti dell'azione di ds su M_2. Per iscrivere i valori di $\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$ basterà nella (III) mettere $\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$ al posto di $\xi\ \eta\ \zeta$, e di più porre

0	. . . . in posto di	x,
0	. . . . » »	y,
0	. . . . » »	z,
$r + l\cos\lambda$	. . . . » »	x',
0	. . . . » »	y',
$l\,\mathrm{sen}\,\lambda$	. . . . » »	z',

$r_1^2 = r^2 + l^2 + 2rl\cos\lambda$ . . . . . in posto di r^2,

$\frac{1}{r_1}[(r + l\cos\lambda)\cos\alpha + l\,\mathrm{sen}\lambda\cos\gamma]$. » » $\cos\sigma$,

$E_1, F_1 \ldots\ldots L_1$. . . . . » » $E, F \ldots\ldots L$.

Le funzioni $E_1, F_1 \ldots$ sono ció che divengono $E, F \ldots$ quando vi si pone r_1 al posto di r.

Una volta scritti i valori di $\xi_1\ \eta_1\ \xi_1$ bisognerá tener conto della circostanza che l é piccolo in confronto di r, per cui si puó scrivere:

$$E_1 = E + l\cos\lambda \frac{\partial E}{\partial r} \text{ etc.}, \qquad \frac{1}{r_1^{\,n}} = \frac{1}{r^n} - \frac{nl\cos\lambda}{r^{(n+1)}},$$

e per cui si possono inoltre trascurare i termini contenenti potenze di $\frac{l}{r}$ superiori alla prima. Ottenute cosí le tre componenti $\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$ della forza applicata ad M_1 e dovuta all' azione di ds su M_1, si otterranno quelle dovute all'azione di ds su M_2, e cioè $\xi_2\ \eta_2\ \zeta_2$, cambiando segno semplicemente ad m' ed l nelle espressioni di $\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$. Ma la forza di componenti $\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$ é applicata in M_1, mentre quella di componenti $\xi_2\ \eta_2\ \zeta_2$ lo é in M_2. Le trasporteremo dunque entrambe in A, ove si comporranno in una forza unica di componenti $\Phi_x = \xi_1 + \xi_2$, $\Phi_y = \eta_1 + \eta_2$, $\Phi_z = \zeta_1 + \zeta_2$. Si trova senza difficoltá:

$$\text{(XI)} \quad \begin{cases} \Phi_x = \dfrac{\mu' i ds}{r}\left\{ r\dfrac{\partial E}{\partial r}\cos\alpha\cos\lambda - F\cos\beta\,\mathrm{sen}\lambda + (E - G)\cos\gamma\,\mathrm{sen}\lambda \right\}, \\[2ex] \Phi_y = \dfrac{\mu' i ds}{r}\left\{ F\cos\alpha\,\mathrm{sen}\lambda + r\dfrac{\partial G}{\partial r}\cos\beta\cos\lambda - r\dfrac{\partial F}{\partial r}\cos\gamma\cos\lambda \right\}, \\[2ex] \Phi_z = \dfrac{\mu' i ds}{r}\left\{ (E - G)\cos\alpha\cos\lambda + r\dfrac{\partial F}{\partial r}\cos\beta\cos\lambda + r\dfrac{\partial G}{\partial r}\cos\gamma\cos\lambda \right\}. \end{cases}$$

Le componenti $(\xi_1) + (\xi_2)$, $(\eta_1) + (\eta_2)$, $(\zeta_1) + (\zeta_2)$, della coppia dovuta al l'azione di ds sui due poli dell' elemento magnetico, si possono scrivere subito cambiando nelle (XI) E in zero, F in I e G in L. Ma a questa coppia devonsi aggiungere le coppie che nascono dal trasporto in A delle forze che erano applicate in M_1 ed M_2. Per cui le componenti della coppia totale, che indicheremo con ψ_x, ψ_y, ψ_z, saranno:

$$\psi_x = (\xi_1) + (\xi_2) - (\eta_1 - \eta_2)l\,\mathrm{sen}\lambda,$$
$$\psi_y = (\eta_1) + (\eta_2) + (\xi_1 - \xi_2)l\,\mathrm{sen}\lambda - (\zeta_1 - \zeta_2)l\cos\lambda,$$
$$\psi_z = (\zeta_1) + (\zeta_2) + (\eta_1 - \eta_2)l\cos\lambda.$$

A riduzioni fatte si trova:

$$(\text{XII})\quad\begin{cases}\psi_x=\dfrac{\mu' i ds}{r}\Big\{-(rG+I)\cos\beta\,\text{sen}\lambda+(rF-L)\cos\gamma\,\text{sen}\lambda\Big\},\\[2ex] \psi_y=\dfrac{\mu' i ds}{r}\Big\{(rE+I)\cos\alpha\,\text{sen}\lambda-r\Big(F-\dfrac{\partial L}{\partial r}\Big)\cos\beta\cos\lambda\\ \qquad\qquad\qquad -r\Big(G+\dfrac{\partial I}{\partial r}\Big)\cos\gamma\cos\lambda\Big\}\\[2ex] \psi_z=\dfrac{\mu' i ds}{r}\Big\{-L\cos\alpha\,\text{sen}\lambda+r\Big(G+\dfrac{\partial I}{\partial r}\Big)\cos\beta\cos\lambda\\ \qquad\qquad\qquad -r\Big(F-\dfrac{\partial L}{\partial r}\Big)\cos\gamma\cos\lambda\Big\}.\end{cases}$$

Siamo giunti così a dare colle (XI) le componenti della forza applicata nel punto A, e colle (XII) le componenti della coppia, che si generano per l'azione dell'elemento di corrente ds sull'elemento magnetico M_1M_2.

17. Le componenti trovate sono prese secondo uno speciale sistema di assi. Ma operando in modo simile a quello indicato nel § 12 si possono calcolare le stesse componenti secondo un sistema d'assi qualunque. Indicandole ancora con φ_x, φ_y, φ_z, ψ_x, ψ_y, ψ_z, e chiamando θ l'angolo di ds con OA, θ' quello di M_1M_2 col prolungamento di OA, ε l'angolo di ds ed M_1M_2 nello spazio, $x\,y\,z$ le coordinate di O, $x'\,y'\,z'$ quelle di A, $\alpha\,\beta\,\gamma$ gli angoli di ds ed $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ quelli di M_1M_2 coi nuovi assi, si trova:

$$\varphi_x=\frac{\mu' i ds}{r}\Big\{\Big(-2E+2G+r\frac{\partial E}{\partial r}-r\frac{\partial G}{\partial r}\Big)\cos\theta\cos\theta'\,\frac{x'-x}{r}$$

$$(\text{XI}')\qquad +(E-G)\cos\varepsilon\,\frac{x'-x}{r}+\Big(F-r\frac{\partial F}{\partial r}\Big)\Big(\frac{z'-z}{r}\cos\beta-\frac{y'-y}{r}\cos\gamma\Big)\cos\theta'$$

$$+F(\cos\gamma\cos\beta'-\cos\beta\cos\gamma')+(E-G)\cos\theta\cos\alpha'+r\frac{\partial G}{\partial r}\cos\theta'\cos\alpha\Big\},$$

$$\psi_x=\frac{\mu' i ds}{r}\Big\{\Big(2L-r\frac{\partial L}{\partial r}\Big)\cos\theta\cos\theta'\,\frac{x'-x}{r}+(rF-L)\cos\varepsilon\,\frac{x'-x}{r}$$

$$+r(E-G)\Big(\frac{z'-z}{r}\cos\beta'-\frac{y'-y}{r}\cos\gamma'\Big)\cos\theta$$

$$(\text{XII}')\qquad +\Big(I-r\frac{\partial I}{\partial r}\Big)\Big(\frac{z'-z}{r}\cos\beta-\frac{y'-y}{r}\cos\gamma\Big)\cos\theta'$$

$$+(rG+I)(\cos\gamma\cos\beta'-\cos\beta\cos\gamma')$$

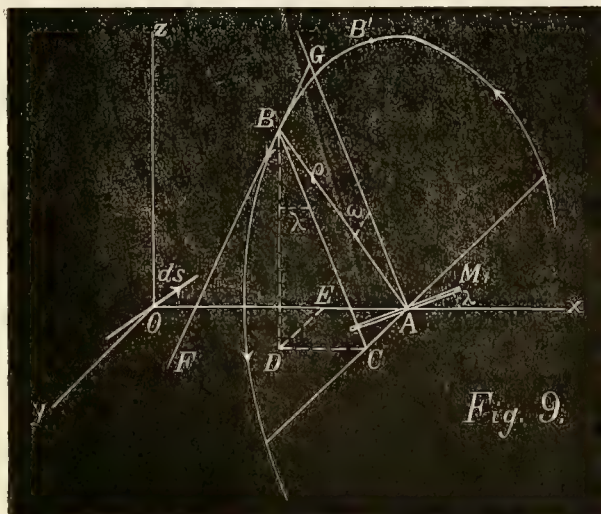
$$-L\cos\theta\cos\alpha'-r\Big(F-\frac{\partial L}{\partial r}\Big)\cos\theta'\cos\alpha\Big\}.$$

18. Immaginiamo ora condotto per A un piano perpendicolare ad AM_1 (Fig. 8), e in questo piano tracciato un piccolo circuito circolare di centro A e raggio ρ (Fig. 9) percorso da una corrente i' nel senso delle freccie. Si tratta di calcolare l' azione che esercita l' elemento ds sul piccolo circuito circolare, riducendola ad una forza applicata in A e ad una coppia, o meglio alle tre componenti dell' una e dell' altra prese secondo le direzioni degli assi $x\ y\ z$ adoperati nel § 16.

Fig. 9.

Sia AG l' intersezione fra il piano del circuito ed il piano xz, e si consideri un elemento ds' del circuito circolare posto nel punto B, che dista angolarmente da AG d' un angolo ω. Colle formole (I) e (II) si calcoleranno prima le componenti ξ, η, ζ, (ξ), (η), (ζ), secondo le direzioni degli assi, della forza e della coppia dovute all' azione di ds su ds', poi, supposta la forza $(\xi\ \eta\ \zeta)$ trasportata in A, e notando che $ds' = \rho d\omega$, s' integreranno quelle sei espressioni rispetto ad ω da zero a 2π. Ma si semplificherà assai il calcolo se si aggiungerà all' azione di ds sull' elemento posto in B, quella esercitata sull' elemento posto nel punto B' simmetrico a B rispetto al piano xz, e le cui componenti chiameremo ξ', η', ζ', (ξ'), (η'), (ζ'); dopo di chè l' integrazione si estenderà naturalmente solo da zero a π. Si otterranno in tal guisa le tre componenti Φ_x, Φ_y, Φ_z, della forza prodotta da ds sul circuito circolare, supposte le forze elementari agenti sui singoli elementi di questo circuito trasportate tutte in A, come pure si otterranno le tre componenti della coppia che risulta dal comporre insieme quelle prodotte da ds sugli elementi ds' del circuito circolare.

Le componenti ξ, η, ζ, (ξ), (η), (ζ) dell' azione di ds sull' elemento posto in B, si ottengono dalle (I) e (II) ponendovi:

0	in posto di	x,
0	» »	y,
0	» »	z,
$r - \rho \cos\omega \operatorname{sen}\lambda$	» »	x',
$\rho \operatorname{sen}\omega$	» »	y',
$\rho \cos\omega \cos\lambda$	» »	z',

$\operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\lambda$	in posio di	$\cos\alpha'$,
$\cos\omega$	» »	$\cos\beta'$,
$-\operatorname{sen}\omega\cos\lambda$	» »	$\cos\gamma'$, (a)
A_1, B_1	» »	A, B .....,

A_1 essendo ció che diviene A, quando in posto di r vi si pone la distanza $OB = r_1$. Siccome poi si ha:

$$\begin{aligned}
r_1^2 &= (r - \rho\cos\omega \operatorname{sen}\lambda)^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2\omega + \rho^2\cos^2\omega\cos^2\lambda = r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\omega\operatorname{sen}\lambda,\\
r_1\cos\theta &= (x' - x)\cos\alpha + \cdots\cdots = r\cos\alpha + \rho\cos\beta\operatorname{sen}\omega - q\rho\cos\omega,\\
r_1\cos\theta' &= (x' - x)\cos\alpha' + \cdots\cdots = r\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\lambda,\\
\cos\varepsilon &= \cos\alpha\cos\alpha' \quad + \cdots\cdots = \cos\beta\cos\omega + q\operatorname{sen}\omega,
\end{aligned}$$

ove per brevitá si é posto $q = \cos\alpha\operatorname{sen}\lambda - \cos\gamma\cos\lambda$, si dovrá pure nelle dette formole (I) e (II) mettere r_1 in posto r, e per θ, θ', ε i valori qui sopra scritti.

Ottenute cosí le componenti ξ, η, ζ, $(\xi), (\eta), (\zeta)$, vi si aggiungeranno quelle relative a B', e cioé ξ', η', ξ', $(\xi'), (\eta'), (\zeta')$, che si ottengono dalle prime cambiando segno ad ω. Allora si formeranno le somme $\xi + \xi', \ldots,$ $(\xi) + (\xi'), \ldots,$ e s'introdurrá la condizione dell'essere ρ piccolissimo, in virtú della quale si puó scrivere:

$$A_1 = A - \rho\cos\omega\operatorname{sen}\lambda\frac{\partial A}{\partial r}\ldots\text{etc.},\quad \frac{1}{r_1^n} = \frac{1}{r^n} + \frac{n\rho\cos\omega\operatorname{sen}\lambda}{r^{(n+1)}},$$

e si possono trascurare entro le grandi parentesi le potenze di $\frac{\rho}{r}$ superiori alla prima. Eseguendo allora le facilissime integrazioni rispetto ad ω fra i limiti 0 e π, si trova per le componenti della forza totale:

$$\text{(XIII)}\left\{\begin{aligned}
\phi_x &= \frac{i\,ds\,i'\pi\rho^2}{r}\left(A - B - r\frac{\partial B}{\partial r} - C\right)\cos\beta\operatorname{sen}\lambda,\\
\phi_y &= \frac{i\,ds\,i'\pi\rho^2}{r}\left\{\left(A - C - D - r\frac{\partial D}{\partial r}\right)\cos\alpha\operatorname{sen}\lambda - (B - D)\cos\gamma\cos\lambda\right\},\\
\phi_z &= \frac{i\,ds\,i'\pi\rho^2}{r}(B - D)\cos\beta\cos\lambda.
\end{aligned}\right.$$

(a) Le coordinate $x'\, y'\, z'$ di B e gli angoli $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ di ds' cogli assi, si determinano similmente che nel § 13.

E per le componenti della coppia dovuta all'azione di ds sugli elementi dal piccolo circuito, si trova ordinatamente:

$$\frac{i\,ds\,i'\pi\rho^2}{r}\left\{2(N-Q)\cos\alpha\cos\lambda+\left(P-Q-r\frac{\partial Q}{\partial r}\right)\cos\gamma\,\mathrm{sen}\,\lambda\right\},$$

$$\frac{i\,ds\,i'\pi\rho^2}{r}(Q-N)\cos\beta\cos\lambda\,,$$

$$\frac{i\,ds\,i'\pi\rho^2}{r}\left\{\left(N+r\frac{\partial N}{\partial r}-P\right)\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\lambda-(N-Q)\cos\gamma\cos\lambda\right\}.$$

Le tre ultime componenti non rappresentano peró da sole la coppia prodotta da ds sul piccolo circuito circolare, giacché abbiamo trasportate in A le forze che agivano sui singoli suoi elementi, e bisogna tener conto delle coppie nate da questo trasporto. Considerando per un momento il solo elemento posto in B, trasportando in A le forze ξ, η, ζ ad esso applicate, si fanno nascere le coppie (vedi Fig. 9):

$$\zeta\cdot DE-\eta\cdot BD=\zeta\rho\,\mathrm{sen}\,\omega-\eta\rho\cos\omega\cos\lambda\,,$$

$$\xi\cdot BD+\zeta\cdot DC=\xi\rho\cos\omega\cos\lambda+\zeta\rho\cos\omega\,\mathrm{sen}\,\lambda\,,$$

$$-\eta\cdot DC-\xi\cdot DE=-\eta\rho\cos\omega\,\mathrm{sen}\,\lambda-\xi\rho\,\mathrm{sen}\,\omega\,,$$

aventi gli assi rispettivamente diretti secondo gli assi delle x, y, z.

Prendendo poi insieme i due elementi posti in B e B', col trasporto in A delle forze ad essi applicate nasceranno le coppie:

$$(\zeta-\zeta')\rho\,\mathrm{sen}\,\omega-(\eta+\eta')\rho\cos\omega\cos\lambda\,,$$

$$(\xi+\xi')\rho\cos\omega\cos\lambda+(\zeta+\zeta')\rho\cos\omega\,\mathrm{sen}\,\lambda\,,$$

$$-(\eta+\eta')\rho\cos\omega\,\mathrm{sen}\,\lambda-(\xi-\xi')\rho\,\mathrm{sen}\,\omega,$$

aventi gli assi secondo x, y, z.

Formando queste tre espressioni coi valori di $\xi\ldots.$, $\xi'\ldots.$ (*a*), integrandole rispetto ad ω da 0 a π, e aggiungendole alle tre componenti della coppia calcolate più sopra, si otterranno le tre componenti ψ_x, ψ_y, ψ_z

(*a*) Siccome i valori delle coppie contengono già ρ come fattore, si potrà addirittura trascurare questa quantità entro le grandi parentesi dei valori di $\xi+\xi'$, $\xi-\xi'$ etc., con chè il calcolo resta notevolmente abbreviato.

della coppia totale, e cioè:

$$(XIV)\begin{cases}\psi_x = \dfrac{i\,ds\,i'\pi\rho^2}{r}\left\{2(N-Q-rD)\cos\alpha\cos\lambda+\left(P-Q-r\dfrac{\partial Q}{\partial r}+rC\right)\cos\gamma\,\mathrm{sen}\lambda\right\},\\ \psi_y = \dfrac{i\,ds\,i'\pi\rho^2}{r}(Q-N+rB)\cos\beta\cos\lambda\,,\\ \psi_z = \dfrac{i\,ds\,i'\pi\rho^2}{r}\left\{\left(N+r\dfrac{\partial N}{\partial r}-P-rA-rD\right)\cos\alpha\,\mathrm{sen}\lambda \right.\\ \qquad\qquad \left. +(Q-N+rB)\cos\gamma\cos\lambda\right\}.\end{cases}$$

19. Se anche pel caso attuale si vogliono avere le componenti φ_x, φ_y, φ_z, ψ_x, ψ_y, ψ_z della forza (applicata al centro del piccolo circuito) e della coppia, secondo tre direzioni ortogonali qualunque, si procederà press' a poco come è indicato nel § 12. Dicendo θ' l' angolo che l' asse del piccolo circuito fà col prolungamento della retta che và dall' elemento ds al suo centro, θ quello di ds colla stessa retta, ε l' angolo fra ds e l' asse del circuito circolare etc, si trova:

$$\begin{aligned}\varphi_x = \frac{i\,ds\,i'\pi\rho^2}{r}\Big\{&\left(2A-B-r\frac{\partial B}{\partial r}-2C-D-r\frac{\partial D}{\partial r}\right)\left(\frac{z'-z}{r}\cos\beta'-\frac{y'-y}{r}\cos\gamma'\right)\cos\theta\\ (XIII')\qquad &-\left(A-r\frac{\partial B}{\partial r}-C-D\right)\left(\frac{z'-z}{r}\cos\beta-\frac{y'-y}{r}\cos\gamma\right)\cos\theta'\\ &-\left(A-B-r\frac{\partial B}{\partial r}-C\right)(\cos\gamma\cos\beta'-\cos\beta\cos\gamma')\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_x = \frac{i\,ds\,i'\pi\rho^2}{r}\Big\{&\left(2N-2Q-r\frac{\partial N}{\partial r}+r\frac{\partial Q}{\partial r}+rA-rB-rC-rD\right)\cos\theta\cos\theta'\frac{x'-x}{r}\\ (XIV')\qquad &+\left(P-Q-r\frac{\partial Q}{\partial r}+rC\right)\cos\varepsilon\frac{x'-x}{r}\\ &+\left(N+r\frac{\partial N}{\partial r}-P-rA-rD\right)\cos\theta\cos\alpha'+(Q-N+rB)\cos\theta'\cos\alpha\Big\}.\end{aligned}$$

20. Siamo ora in grado di trovare quali relazioni devono sussistere fra le sette funzioni $A \ldots . Q$ e le cinque altre $E \ldots . L$, affinchè risultino identiche le azioni esercitate dall' elemento di corrente sull' elemento magnetico e sul piccolo circuito chiuso. Potremo valerci a volontà o delle formole (XI), (XII), (XIII), (XIV), oppure delle (XI'), (XII'), (XIII'), (XIV').

Onde le (XI) e (XII) diano in ogni caso valori identici a quelli forniti

dalle (XIII) e (XIV), bisogna evidentemente che oltre ad essere:

$$i'\pi\rho^2 = \mu',$$

si abbia ancora:

$$\frac{\partial E}{\partial r} = 0, \qquad N - Q - rD = 0,$$

$$A - B - r\frac{\partial B}{\partial r} - C = -F, \qquad I + rG = 0,$$

$$E - G = 0, \qquad P - Q - r\frac{\partial Q}{\partial r} + rC = rF - L,$$

$$A - C - D - r\frac{\partial D}{\partial r} = F, \qquad rE + I = 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial r} = 0, \qquad Q - N + rB = r\frac{\partial L}{\partial r} - rF,$$

$$B - D = r\frac{\partial F}{\partial r}, \qquad G + \frac{\partial I}{\partial r} = 0,$$

$$N + r\frac{\partial N}{\partial r} - P - rA - rD = -L.$$

Le eguaglianze della prima colonna provengono dal confronto fra le (XI) e (XIII); quelle della seconda provengono dalle (XII) e (XIV). Esse non sono tutte distinte, e si possono modificare nel modo seguente.

La prima equivale ad $E = 0$, giacchè si ammette che E sia nulla per $r = \infty$. La 3ª e 5ª allora danno $G = 0$, e la 8ª 10ª e 12ª danno $I = 0$. Restano dunque a considerarsi la 2ª, 4ª, 6ª, 7ª, 9ª, 11ª, e 13ª.

Sottraendo la 2ª dalla 4ª si ha:

$$B - D + r\frac{\partial(B - D)}{\partial r} = 2F,$$

e mettendovi il valore di $B - D$ dato dalla 6ª:

$$r^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial F}{\partial r} = 2F,$$

che integrata dà, indicando con c e c'' due costanti, $F = \frac{c}{r_2} + c''r$, o piuttosto $F = \frac{c}{r^2}$, pel 4° principio ammesso nel § 8.

Sommando la 7ª e l' 11ª formola si ha:

$$B - D = \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{c}{r^2},$$

e quindi in virtú della 6ª:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{c}{r^2} + r \frac{\partial F}{\partial r} = - \frac{c}{r^2}.$$

Se ne ricava:

$$L = \frac{c}{r},$$

dovendo essere zero la costante onde sia $L = 0$ per $r = \infty$. Infine si riconosce, che coi valori cosí determinati di F ed L le formole 7ª, 9ª, 11ª, e 13ª, non sono distinte, ma si riducono realmente a due. Possiamo dunque scrivere le condizioni d' identità cercate nel modo seguente:

$$(20) \qquad E = 0, \quad F = \frac{c}{r^2}, \quad G = 0, \quad I = 0, \quad L = \frac{c}{r};$$

$$(21) \qquad \begin{cases} A - C - D - r \dfrac{\partial D}{\partial r} = \dfrac{c}{r^2}, \quad B - D = -2 \dfrac{c}{r^2}, \\ N - Q - rD = 0, \quad P - Q - r \dfrac{\partial Q}{\partial r} + rC = 0. \end{cases}$$

Le cinque condizioni (20) indicano che, onde sia verificata la identità d' azione dell' elemento di corrente sull' elemento magnetico e sul piccolo circuito chiuso, bisogna addottare la formola di Laplace per esprimere l' azione d' un elemento di corrente sopra un polo magnetico, ed ammettere che il punto d' applicazione della forza sia anche in questo caso nel centro dell' elemento di corrente. Infatti la forza $\frac{c}{r^2}$ applicata al polo, e la coppia $\frac{c}{r}$, si compongono in una forza unica $\frac{c}{r^2}$ applicata all' elemento di corrente, e diretta come lo vuole la detta formola.

Le quattro relazioni (21) fra le sette funzioni $A \ldots . Q$ sono, come si vede, diverse dalle (19). Esse sono soddisfatte se si prende la formola d' Ampère per l' azione fra due elementi di corrente, ma non se si assume quella di Grassmann, come è facile verificare. Si riconosce del pari facilmente che le (9) sono incompatibili colle (21), vale a dire che l' ipotesi che esista un potenziale per l' azione fra elementi di corrente, trae come con-

seguenza che un elemento di corrente eserciti azioni differenti sull' elemento magnetico e sul piccolo circuito chiuso.

CAPITOLO V.

Condizioni necessarie per l' identità completa fra un elemento magnetico ed un piccolo circuito chiuso.

21. Le formole (18) e (19) danno le condizioni necessarie onde un elemento magnetico ed un piccolo circuito chiuso, ad esso concentrico e posto in un piano ad esso perpendicolare, si equivalgano nelle loro azioni sopra un elemento di corrente, mentre le (20) e (21) porgono le condizioni di equivalenza per le azioni dell' elemento di corrente sull' elemento magnetico e sul piccolo circuito. Facendole coesistere, esse costituiranno le condizioni di completa identità. Dalla 1ª delle (19) e dalla 1ª delle (21) si deduce:

$$\frac{\partial(C-D)}{\partial r}=\frac{c-c'}{r^3},$$

e dalla 2ª delle (19) e 2ª delle (21):

$$C-D=2\frac{c'-c}{r^2}, \quad \frac{\partial(C-D)}{\partial r}=4\frac{c-c'}{r^3}.$$

Se ne ricava $c=c'$. Per conseguenza, le condizioni di completa identità, per ciò che riguarda la forza elementare fra polo magnetico ed elemento di corrente, sono le seguenti:

$$\text{(XV)} \qquad E=E'=G=G'=I=I'=L'=0, \quad F=F'=\frac{c}{r^2}, \quad L=\frac{c}{r},$$

le quali mostrano la necessità d' addottare la formola di Laplace, supponendo sempre la forza applicata al centro dell' elemento di corrente.

Tenuto conto dell' eguaglianza $c=c'$, le tre ultime (19) e le tre ultime (21) danno $C=D=\frac{\partial Q}{\partial r}$ e per conseguenza:

$$\text{(XVI)} \qquad \begin{cases} A=r\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2}+2\frac{\partial Q}{\partial r}+\frac{c}{r^2}, \quad B=\frac{\partial Q}{\partial r}-2\frac{c}{r^2}, \\ C=D=\frac{\partial Q}{\partial r}, \quad N=Q+r\frac{\partial Q}{\partial r}, \quad P=Q, \end{cases}$$

sono le relazioni fra le sette funzioni $A \ldots . Q$ necessarie onde sussista l' identità completa fra l' elemento magnetico ed il piccolo circuito.

Ammesse soddisfatte le relazioni (XV) e (XVI) lo sono pure le (11) e (17), e cioè è rispettato il principio dell' eguaglianza fra l' azione e la reazione.

Mentre dunque si é giunti ad una determinazione completa delle funzioni che entrano nelle formole che danno l' azione fra un polo ed un elemento di corrente, si é arrivati a determinare sei soltanto delle sette funzioni che entrano nelle formole relative all' azione fra due elementi di corrente, esprimendole per mezzo della funzione Q che rimane indeterminata.

Se questa funzione Q si suppone eguale a zero, si cade allora nell' azione elementare di Ampère. Ogni altra formola proposta per esprimere l' azione fra due elementi di corrente, come quella di Grassmann, o come la formola del potenziale elementare, sono incompatibili colle relazioni (XVI) e devono quindi essere messe a parte, se si mantiene il principio dell' identità fra l' elemento magnetico ed il piccolo circuito chiuso.

Naturalmente, la Q sparisce dalle formole che danno le azioni fra un elemento di corrente ed un piccolo circuito chiuso, allorquando nelle formole relative a queste azioni si introducono i valori (XVI). Infatti, cosi facendo, queste formole devono divenire identiche rispettivamente a quelle che danno le azioni fra un elemento di corrente ed un elemento magnetico, dopo che vi si siano introdotti i valori (XV). Anzi le (VII′) e (IX′) e le (VIII′) e (X′), relative all' azione d' un elemento magnetico e di un piccolo circuito sopra un elemento di corrente, divengono:

$$\varphi_x = \frac{\mu i' ds'}{r^3} c \left[\cos\gamma \cos\beta' - \cos\beta \cos\gamma' - 3\left(\frac{z'-z}{r}\cos\beta' - \frac{y'-y}{r}\cos\gamma'\right)\cos\theta\right],$$

$$\psi_x = 0\,;$$

mentre le (XI′) e (XIII′) e le (XII′) e (XIV′), relative all' azione d' un elemento di correnfe sopra un elemento magnetico o sopra un piccolo circuito chiuso, divengono:

$$\varphi_x = \frac{\mu' i ds}{r^3} c \left[\cos\gamma \cos\beta' - \cos\beta \cos\gamma' + 3\left(\frac{z'-z}{r}\cos\beta - \frac{y'-y}{r}\cos\gamma\right)\cos\theta'\right],$$

$$\psi_x = \frac{\mu' i ds}{r^2} c \left[3 \cos\theta \cos\theta' \frac{x'-x}{r} - \cos\theta \cos\alpha' - 2\cos\theta' \cos\alpha\right].$$

Non bisogna peró dimenticare che la forza di componenti φ_x, φ_y, φ_z è in quest' ultimo caso supposta applicata al centro dell' elemento magnetico o

del piccolo circuito. Se la si trasporta al centro dell' elemento di corrente, mentre Φ_x naturalmente conserva la stessa espressione, la coppia totale diviene nulla, giacché é facile il verificare che la coppia che nasce col trasporto risulta precisamente eguale ed opposta a quella di componenti ψ_x, ψ_y, ψ_z.

Si potrebbero agevolmente dedurre da queste formole varie note proprietà, p. es. questa, che la forza che agisce fra l' elemento di corrente ed il piccolo circuito o l' elemento magnetico, é perpendicolare all' elemento di corrente.

22. Prima di trarre le ultime conseguenze dai risultati finora stabiliti é bene fare alcune osservazioni sulla via tenuta per ottenerli.

Il piccolo circuito chiuso, il cui piano é perpendicolare all' asse dell' elemento magnetico, si é preso di forma circolare e col centro nel centro di quell' elemento. Ma si poteva sceglierlo rettangolare, senza che i risultati mutassero, e certamente potevasi attribuirgli un' altra qualunque forma.

È probabile poi che si potranno ottenere gli stessi risultati espressi dalle formole (XV) e (XVI) senza passare per la considerazione di elementi magnetici e di piccoli circuiti, ma stabilendo invece l' identità fra un circuito finito qualunque ed una doppia superficie magnetica avente per contorno il circuito stesso. Le formole (I'), (II'), (III'), (IV'), (V'), (VI') dovrebbero forse in tal caso preferirsi alle loro equivalenti (I) .... (VI); ma una ricerca di tal genere, di natura puramente matematica, presenterebbe forse maggiori difficoltà, e perció é da lasciarsi a chi ne ha la competenza.

Infine devesi notare, che il principio ammesso, della identità intrinseca fra l' elemento magnetico ed il piccolo circuito chiuso, deve verificarsi anche rispetto ad un polo magnetico o ad un elemento magnetico; cosí pure deve essere identica l' azione fra due elementi magnetici e quella fra due circuiti piccolissimi tracciati intorno ad essi in piani perpendicolari ai loro assi. Se si eseguiscono i calcoli per trovare le condizioni d' identità in questi casi, si trovano relazioni fra le funzioni $E \dots L$, $E' \dots L'$, $A \dots Q$, che corrispondono ad alcune delle (XV) e (XVI) o che vi sono implicitamente comprese. Cosi per esempio, le condizioni d' identità dell' azione fra due elementi magnetici, con quella fra due piccoli circuiti chiusi, non sono altro che le (19). Quelle per l' identità d' azione dell' elemento magnetico e del piccolo circuito sopra un polo sono:

$$F = \frac{e}{r^2}, \quad G - E + r\frac{\partial G}{\partial r} = 0, \quad I = 0, \quad L = \frac{k}{r};$$

e quelle per l' identità d' azione d' un polo sopra l' elemento magnetico e

sul piccolo circuito chiuso, sono:

$$F' = \frac{c'}{r^2}, \quad E' = G' = I' = 0, \quad L' = \frac{k'}{r}.$$

k e k' sono costanti indeterminate. Siccome ammesse le (XV) e (XVI) anche tutte queste sono soddisfatte, così si può proprio affermare che le relazioni (XV) e (XVI) sono le condizioni per la completa equivalenza fra l'elemento magnetico ed il piccolo circuito chiuso ad esso perpendicolare.

23. Introducendo nelle formole generali per l'azione fra due elementi di corrente, e cioè nelle (I) e (II), i valori delle funzioni A, B, C, D, N e P dati dalle (XVI), esse si trasformano nelle seguenti:

$$\xi = ii'dsds'\frac{c}{r^2}(3\cos\theta\cos\theta' - 2\cos\varepsilon)\frac{x'-x}{r}$$

$$\text{(XVII)} \qquad + ii'dsds'\left\{\left(r\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} - \frac{\partial Q}{\partial r}\right)\cos\theta\cos\theta'\frac{x'-x}{r} + \frac{\partial Q}{\partial r}\cos\varepsilon\frac{x'-x}{r} + \frac{\partial Q}{\partial r}(\cos\theta'\cos\alpha + \cos\theta\cos\alpha')\right\},$$

$$\text{(XVIII)} \quad (\xi) = ii'dsds'\left\{\frac{\partial Q}{\partial r}[(z'-z)\cos\beta' - (y'-y)\cos\gamma']\cos\theta + Q(\cos\gamma\cos\beta' - \cos\beta\cos\gamma'\right\}.$$

Chiamando ξ_0 la parte di ξ che contiene Q si può dire adunque, che l'azione più generale d'un elemento di corrente ds sopra un elemento ds', compatibile col principio ammesso, si compone:

1° di una forza applicata al centro dell'elemento ds', che non è altro che quella di Ampère;

2° di una forza di componenti $\xi_0\ \eta_0\ \zeta_0$ applicata pure al centro medesimo;

3° di una coppia di componenti (ξ), (η), (ζ).

Lasciando a parte la prima forza, occupiamoci per un po' della seconda e della coppia.

Trasportiamo la forza all'origine delle coordinate. Naturalmente le sue tre componenti $\xi_0\ \eta_0\ \zeta_0$ rimarranno invariate; ma alle componenti della coppia (ξ), (η), (ζ), si dovranno aggiungere quelle della coppia che nasce col trasporto. Le componenti di questa ultima coppia sono evidentemente:

$$\zeta_0 y' - \eta_0 z', \quad \xi_0 z' - \zeta_0 x', \quad \eta_0 x' - \xi_0 y'.$$

Chiamando (ξ_0), (η_0), (ζ_0) le componenti della coppia totale, e cioè ponendo $(\xi_0) = (\xi) + \zeta_0 y' - \eta_0 z'$ etc., si avrà, dopo facili riduzioni:

$$(\xi_0) = i i' ds ds' \left\{ \left(r \frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} - \frac{\partial Q}{\partial r} \right) \cos\theta \cos\theta' \frac{yz' - zy'}{r} + \frac{\partial Q}{\partial r} \cos\varepsilon \frac{yz' - zy'}{r} \right.$$
$$+ \frac{\partial Q}{\partial r} [(y \cos\gamma' - z \cos\beta') \cos\theta + (y' \cos\gamma - z' \cos\beta) \cos\theta']$$
$$\left. + Q(\cos\gamma \cos\beta' - \cos\beta \cos\gamma') \right\}.$$

Alle componenti $\xi_0 \ldots$ e $(\xi_0) \ldots$ si può dare la forma seguente, come è facile verificare:

$$\xi_0 = i i' ds ds' \frac{\partial^2 [Q(x - x')]}{\partial s \partial s'}, \quad (\xi_0) = i i' ds ds' \frac{\partial^2 [Q(y'z - yz')]}{\partial s \partial s'}.$$

Apparisce così immediatamente che tanto la forza $\xi_0\ \eta_0\ \zeta_0$ che la coppia $(\xi_0)\ (\eta_0)\ (\zeta_0)$ non hanno nessuna influenza nell'azione fra due circuiti dei quali uno almeno sia chiuso; questa azione calcolata colle (XVII) e (XVIII) risulta dunque la medesima, come se venisse calcolata colla formola di Ampère.

Non sarebbe che nell'azione fra due circuiti aperti che si manifesterebbe l'influenza della funzione Q. Contrassegnando coll'indice 1 le quantità relative all'estremità di un circuito aperto s di cui fa parte l'elemento ds, per la quale entra la corrente, coll'indice 2 quelle relative all'altra estremità, e cogli indici 3 e 4 le quantità relative rispettivamente all'estremità d'ingresso e di uscita della corrente di un secondo circuito aperto s' di cui fa parte ds', l'azione del primo circuito sul secondo sarebbe data: 1° da quella che si calcola colla formola di Ampère; 2° da una forza applicata all'origine delle coordinate, la cui componente X secondo l'asse delle x sarebbe:

$$X = i i' \{ Q_{24}(x_2 - x_4) - Q_{14}(x_1 - x_4) - Q_{23}(x_2 - x_3) + Q_{13}(x_1 - x_3) \},$$

(ove Q_{24} indica il valore che prende Q quando in luogo di r vi si pone la distanza r_{24} fra le estremità contrassegnate dagli indici 2 e 4); 3° da una coppia la cui componente secondo l'asse delle x sarebbe:

$$(X) = i i' \{ Q_{24}(y_4 z_2 - y_2 z_4) - Q_{14}(y_4 z_1 - y_1 z_4) - Q_{23}(y_3 z_2 - y_2 z_3) + Q_{13}(y_3 z_1 - y_1 z_3) \}.$$

Facilmente si riconosce che questa forza e questa coppia equivalgono all'insieme di queste quattro forze:

1° una forza $-ii'Q_{24}r_{24}$ applicata nel punto 4 e diretta secondo la retta r_{24} che va dalla estremità di uscita della corrente s all'estremità di uscita di s';

2° una forza $+ii'Q_{14}r_{14}$, applicata pure in 4 e diretta secondo la retta che vá da 1 a 4;

3° una forza $+ii'Q_{23}r_{23}$ applicata nel punto 3 e diretta secondo r_{23};

4° una forza $-ii'Q_{13}r_{13}$ applicata in 3 e diretta secondo r_{13}.

Dunque l'azione d'un circuito aperto s sopra un altro circuito aperto s' consiste in quella calcolata colla formola d'Ampére, ed in quattro forze applicate alle estremità di s', dirette secondo le rette che le congiungono alle estremità di s, proporzionali ad ii' e ad una funzione indeterminata Qr della distanza r fra le estremità, e attrative o ripulsive secondo che le due estremità sono entrambe d'ingresso o di uscita dalla corrente, oppure sono l'una estremità d'ingresso e l'altra estremità di uscita.

Ne consegue che se si ha un circuito chiuso diviso in due parti, l'una fissa e l'altra mobile intorno ad un asse, il moto sarà prodotto solo dalle forze d'Ampére.

Ció che si é detto per due circuiti aperti vale naturalmente anche per circuiti rettilinei e brevissimi quanto si vuole, e cioé vale anche per gli elementi di corrente; per cui l'azione fra due elementi di corrente puó considerarsi costituita dalla forza d'Ampere, e di quattro forze fra le estremitá dei due elementi, dirette secondo le rette che le congiungono due a due e proporzionali ad ii' e ad una funzione indeterminata della loro distanza.

24. Possiamo alla fine enunciare in breve i risultati di questa ricerca, come segue.

a) Affinché un elemento magnetico possa equivalere in qualunque caso ad un piccolo circuito chiuso, tracciato intorno al suo centro ed in un piano ad esso perpendicolare, é necessario:

1° Ammettere la formola di Laplace per esprimere l'azione fra un polo magnetico ed un elemento di corrente.

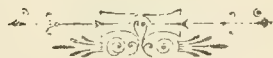
2° Supporre che la forza di Laplace sia applicata all'elemento di corrente, non solo quando si considera l'azione del polo sull'elemento, ma anche quando si considera quella dell'elemento sul polo.

3° Adottare la formola d'Ampére per esprimere l'azione fra due elementi di corrente, respingendo le diverse altre formole elettrodinamiche proposte, oppure assumere la legge d'azione piú generale espressa dalle formole (XVII) e (XVIII), la quale si riduce a quella d'Ampére quando si suppone eguale a zero la funzione indeterminata Q che quelle formole contengono.

b) Per conseguenza, se si volessero ammettere o la formola di Grass-

mann, o le teorie di Clausius, Reynard etc. che conducono a quella stessa formola, o ammettere l'esistenza d'un potenziale per le azioni fra elementi di corrente, p. es. quello di Helmholtz, se insomma si volesse addottare qualunque formola elettrodinamica che non rientri in quella che si è qui stabilita, bisognerebbe in pari tempo ritenere che un piccolo circuito chiuso non equivale sempre ad un elemento magnetico ad esso perpendicolare; ciò che ripugnerà certamente a chi ritenga che sostanzialmente in nulla diversifichi un elemento magnetico da un piccolo circuito chiuso.

c) L'azione espresse dalle (XVII) e (XVIII) di un elemento di corrente ds sopra un altro ds', più generale di quella d'Ampère, anzi la più generale possibile compatibilmente col principio preso a base di questa ricerca, obbedisce al principio dell'eguaglianza fra l'azione e la reazione, e può supporsi divisa in due parti. L'una è la forza d'Ampère; l'altra (che si annulla con Q) può essere considerata come l'assieme di quattro forze applicate alle estremità dell'elemento ds', dirette secondo le rette che congiungono queste estremità a quelle di ds, e proporzionali ad ii' e ad una funzione della distanza. Queste forze cangiano segno passando dal caso in cui le due estremità di elemento considerate sono entrambe estremità di ingresso o di uscita della corrente, al caso in cui per l'una entra mentre per l'altra la corrente esce.

d) Calcolando l'azione fra due circuiti, se uno qualunque di essi è chiuso, sparisce dai risultati ogni traccia delle forze aggiunte a quella di Ampère. La legge d'azione più generale non darebbe risultati differenti da quella d'Ampère che nel caso di due circuiti entrambi aperti.

SOPRA UN CASO

D' INVERSIONE DEI CONDOTTI TORACICI

ACCOMPAGNATO

DA INVERSA ORIGINE DELL' ARTERIA SUCCLAVIA DESTRA

E SULLA GENESI DELLE DUE ANOMALIE

NOTA

DEL PROF. LUIGI CALORI

(CON TAVOLA)

(Letta nella Sessione ordinaria del 9 Novembre 1890.)

Alberto Haller facendosi alle varietà del condotto toracico grande o sinistro comincia dicendo che elle sono « innumerae et in imo trunco sive in cisterna et in fine quo in venam rubram aperitur » (1). E il novero che ei ne dà, comprova certamente quest' asserzione, verificato poscia ed anche accresciuto per novelle osservazioni, secondo che ognuno ne avrà di leggieri testimonio consultando qualche classico trattato moderno di Anatomia, ed in ispecie quello di Henle (2); della quale ricca suppellettile di osservazioni io non vorrò qui far pompa ad una ad una riferendole, mal addicendosi ad una semplice Nota tanto lusso d' erudizione, molto più che può, chiunque voglia, prenderne notizia in quel trattato. Non lascierò tuttavia di ricordare la varia e molteplice foce di esso condotto; siccome quella che conviene col soggetto di questa Nota; conciossiachè quella foce non è sempre a sinistra, nè unica, nè sempre nel luogo medesimo, o in quello ed in altri ad un tempo, come nella vena jugulare interna, nella vena vertebrale, nella vena anonima, nella vena ascellare,

---

(1) Elem. Physiol. corp. hum. Tomus septimus edit. sec. Lausannae MDCCLXXVII. Lib. XXV. § 1. Anatome § XI varietates pag. 222 e seg.

(2) Handbuch der systematischen anatomie des menschen. Tom. III. Braunschwig 1876, pag. 453. Varietaten der ductus thoracicus.

potendo il grande condotto toracico terminare bifido, trifido, quadrifido, e perfino diviso in sei rami sboccanti a sinistra. E bifido ch' esso sia, puó mettere capo nella succlavia sinistra, ed altresí nella destra ad un tempo. E a destra solo puó esserne lo sbocco quando nell' angolo di unione della vena jugulare interna con la succlavia, o quando nella succlavia semplicemente, quando nelle cave, o vero nell' azigos aggiugnendosi essersene oltremodo assottigliata, ed anche obliterata quella porzione di condotto la quale ha la sua foce normale nella vena succlavia sinistra: la quale immissione nell' azigos torna vero quanto notó l' Haller, che esso condotto « se immittit.... certe ramo aliquo, in venam sine pari » (1). Nessuno, che io sappia, poi degli anatomici che hanno trattato della divisata varietá, e particolarmente della inversione dei condotti toracici, da A. Monro sin qua cui Haller ne reca la prima osservazione (2), o da Fleischmann in qua, come scrive Theile, che ne lo fa autore non menzionando punto il Monro (3), parla dell' accoppiamento della varietá di origine od inversione dell' arteria succlavia destra. Un tale accoppiamento a me é venuto nel Novembre dello scorso anno di osservare, ed essendomi parso avere non solo qualche novitá in sé, ma eziandio qualche importanza, mi sono ingegnato d' illustrarlo con una Figura, e descriverlo.

Il soggetto che lo presentó, fu una vecchietta settantenne, piccola di di statura anzi che nó, vizza e secca, come suol dirsi, fino all' osso, la quale moriva nello Spedale Maggiore per acuta pneumonite doppia. Dovendo per le lezioni di anatomia generale, che ho in costume di premettere a quelle di anatomia particolare, dimostrare i principali vasi sanguigni e linfatici, fatta in questi vasi una injezione ceracea, poi levati di sito in un col cuore, non tardarono a mostrarsi le anomalie sopradette, e per prime le arteriose riguardanti i grossi tronchi che nascono dalla convessitá dell' arco aortico, e sono innanzi tratto uno cortissimo, che non é mica l' innominata o tronco brachiocefalico, ma carotico, dovendosi cosi chiamare, perché appena sorto si divide nelle due carotidi primitive; al di dietro del quale tronco o ceppo carotico ha l' origine dell' arteria succlavia sinistra, distante da quello sette millim. circa; dalla parte posteriore poi dell' arco aortico alla distanza di un centimetro dall' origine dell' arteria succlavia ultimo divisata muove l' arteria succlavia destra, l' origine della quale non é giá nella medesima linea anteriore della sinistra, ma dal lato posteriore o destro dell' arco aortico presso il lato sinistro dell' esofago. Questa trasposta od inversa origine non é certamente nuova, ché Hunauld piú di

(1) Op. cit. l. c.
(2) Op. cit. l. c.
(3) Encyclop. Anat. traduit de l'Allemand par Jourdan. Tom. III, pag. 676.

un secolo e mezzo fa l' ebbe osservata (1); e nemanco é rara, ed io senza appositamente cercarla ne ho in pochi anni raccolto sei esemplari, ed é più frequente del nascere l' arteria in discorso dall' aorta discendente toracica più o men sotto l' estremità posteriore dell' arco. Da principio offre una dilatazione conica (vedi la Figura); dilatazione che già fu notata da Hemmel (2) e dessa é lunga diecinove millim., larga quasi nella base due centim., nell' apice nove millim. Questa dilatazione e in una il tronco arterioso che sorge da essa, ascendono con leggiera obliquità volta a destra lungo il lato sinistro dell' esofago per il tratto di quaranta millim.; poi il tronco piega arcuando, e va a destra correndo dietro l' esofago, tra questo canale e la colonna vertebrale, per gettare nel detto lato i soliti rami nel triangolo inferiore del collo come di costume. Fra gli esemplari da me posseduti di questa anomalia ne ho uno in cui il tragitto dell' arteria non é tra l' esofago e la colonna vertebrale, ma tra quel canale e la trachea. Come é chiaro, il tronco di quest' arteria riesce molto più lungo di quello della sinistra, la quale osservazione viene recata dal Dubrueil ad Isidoro Geoffroy-Saint-Hilaire (3). Tale eccessiva lunghezza, ben conveniente con la descritta trasposizione di origine, e con il lungo tragitto che l' arteria deve percorrere per andare a destra, é stato con tutta esattezza rappresentata da R. Quain (4) e da F. Tiedemann (5). Da quest' anomalia certi hanno voluto derivare la cagione dell' essere da natura mancini, non che quella della disfagia che chiamano lusoria. La vecchietta non pativa di questa, né era mancina, sicché conveniva tenere che nessuna efficace compressione esercitasse l' arteria contro l' esofago, né la corrente arteriosa fosse indebolita nell' arto superiore destro, la quale prevalendo nel sinistro fosse cagione dell' esser' ella spontaneamente tratta a valersi di quest' arto più che del destro. Noterò ad ultimo che il nervo laringeo inferiore destro, il quale normalmente nasce presso l' apertura superiore del torace, e comprende inferiormente con un' ansa, ch' ei descrive per ascendere, l' arteria succlavia destra, non ha verun rapporto con la succlavia anomala descritta, e nasce dal vago a livello circa della unione della cartilagine cricoide della laringe con il primo anello della trachea come già si é osservato negli altri casi consimili, de' quali io pur uno illustrai in altra congiuntura (6). Questo laringeo destro ha un incesso trasversale, si

---

(1) Vedi Hist. de l' Acad. des Sciences, année 1735, pag. 20.
(2) Commerc. litter. Norimbergae 1737. Hebd. 21, pag. 162-63. Tab. 2, Fig. 3.
(3) Des anomalies arterielles. Paris 1847, pag. 102.
(4) The anatomie the arteries of the human body ecc. London 1846. Plat. XX, Fig. 5, 6.
(5) Supplem. ad Tab. art. corp. hum. Heidelbergae 1846. Tab. XXXIX, Fig. 4.
(6) Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna. Ser. II, Tom. VIII, pag. 431. Tav. IV, Fig. 9.

anastomizza con il nervo cardiaco medio del simpatico, poi manda un ramo discendente che si distribuisce alla trachea ed all' esofago, nè si anastomizza con il nervo cardiaco inferiore del simpatico medesimo, nè dispensa al pericardio quei ramuscelli che Luschka dice inviare il laringeo inferiore destro semplicemente alla mentovata sierosa. La sua distribuzione nella laringe è normale. Ma abbastanza di tutto ciò: veniamo alla inversione dei condotti toracici.

Io injettai il condotto toracico grande per la cisterna del chilo, e la materia cerocea liquida che dentro vi spinsi, tutto lo percorse ed esattamente riempì fino alla sua foce nella vena succlavia destra. Ascendendo sulla colonna dorsale nella cavità posteriore del mediastino non descrive flessuosità, nè si divide formando isole o plessi, come talvolta si osserva, ma è semplice incedendo quasi dritto tra l' aorta discendente toracica e la vena azigos (vedi la Figura citata); ed arrivato al punto dove suole deviare a sinistra, corrispondente alla quarta vertebra dorsale, come si vede quando è in sito, invece di piegare a sinistra e salire dietro l' arco dell' aorta al lato sinistro dell' esofago, come di costume, va a destra in compagnia della vena azigos al cui lato sinistro è collocato; poi abbandonato da questa vena prosegue a salire dietro l' esofago presso il lato destro di questo canale, e giunto nel collo si trova dopo breve cammino al di dietro dell' arteria succlavia destra anomala: sorpassa montando obliquamente a destra quest' arteria, al di sopra della quale piega, e va a formare un arco esteso da sinistra a destra al di dietro del lato destro della trachea, al di dietro della carotide primitiva destra, e della jugulare interna destra, e discendendo allo esterno si divide in due rami. Questa divisione, guardando il condotto toracico in discorso dalla parte anteriore, rimaneva coperto dalla parte inferiore della jugulare esterna, la quale in corrispondenza di essa offriva una dilatazione a simile di un bulbo situato subito sopra la sua foce nella vena succlavia; il quale bulbo osservai pure a destra altra volta, e descrissi e dimostrai con una figura (1). La detta divisione del condotto dista dalla vena succlavia sottoposta otto millim. circa, ed i suoi due rami non hanno un' eguale grossezza, e sono fra di loro allontanati o divergenti, ed uno è esterno più grosso e tanto quanto l' arco descritto, di qualità che sembra esserne la continuazione, l' altro più sottile, e n' è come un ramo. Ambidue sboccano nella vena succlavia destra, il più sottile distante otto millim. dall' angolo di unione della jugulare interna destra con la detta succlavia dietro la foce della jugulare esterna, il più grosso distante quasi quattro centimetri da quel-

---

(1) Giornale della Rivista Clinica. Bologna, Tip. Fava e Garagnani, 1874. Fig. 2, *x*.

l' angolo. Finalmente essendomi riuscito d' injettare anche il condotto toracico piccolo, situato qui a sinistra, ho veduto che esso sboccava nell' angolo di unione della vena jugulare interna sinistra con la vena succlavia sinistra, ed era breve e formato come è normalmente il destro.

Descritte e dimostrate le due anomalie arteriosa e linfatica, e dimostrato come l' una con l' altra si accompagni, toccherò della loro produzione e se abbiavi tra loro un rapporto genetico. Ne' libri di Anatomia nei quali sono notate le varietà di origine delle arterie, trovo scritto che quelle dei tronchi sorgenti dalla convessità dell' arco aortico, ricevono spiegazione dal modo di sviluppo dei tronchi medesimi, e dal permanere e svilupparsi ulteriormente in luogo di atrofizzarsi e venir meno certi fra gli archi arteriosi primitivi o branchiali così detti, perchè nei vertebrati inferiori si risolvono nella rete vascolare respiratoria delle branchie negate agli embrioni dei vertebrati superiori e dell' uomo. Tutti poi sanno che ammettonsi cinque paja dei detti archi arteriosi primitivi; che le due prime paja, che sono anteriori o superiori, scompajono per tempissimo; che il terzo pajo produce le carotidi; che il quarto a destra, perdute le sue anastomosi col terzo arco destro e col quinto di questo medesimo lato, forma la succlavia destra, ed a sinistra l' arco dell' aorta, il quale cessa l' anastomosi col terzo arco sinistro, e conserva quella col quinto sinistro, la quale anastomosi rappresenta il condotto arterioso del Botallo, obliterantesi dopo la nascita. L' arco aortico in fine mette la succlavia sinistra. Nulla dico del quinto pajo degli archi arteriosi primitivi, non importando egli al fatto. Posto il detto modo di formazione e di sviluppo delle arterie succlavie, e considerato in relazione con l' origine della succlavia destra dalla estremità posteriore dell' arco dell' aorta, o dal principio dell' aorta discendente toracica, io, per quanto mi abbia pensato, non ho potuto trovare come si spieghi così fatta trasposizione di origine dietro la scorta dello sviluppo normale. Non è che ricorrendo ad un anormale sviluppo che me n' è occorsa una spiegazione. Convien porre che il quarto arco arterioso destro non siasi formato, ovvero che esso in un co' suoi due canali anastomotici col terzo e col quinto siasi obliterato, e quindi anullatasi a destra la formazione della succlavia. Della quale obliterazione è stata probabilmente cagione un rallentamento della corsia sanguigna in quell' arco, o un deviamento della medesima per il forte sviluppo, e forse più rapido del solito, del quarto arco arterioso primitivo sinistro costituente, come è stato detto, l' arco dell' aorta: per il quale rigoglioso sviluppo ha dato origine non solo alla succlavia sinistra, ma per compensazione altresì alla succlavia destra. Io non ho saputo escogitare altra spiegazione; la quale non è certo desunta dal modo normale di sviluppo della succlavia destra, ma dall' anullamento dell' arco arterioso primitivo che la costituisce, ed in

un medesimo da un aumento di sviluppo e da un tronco soprannumerario del quarto arco arterioso primitivo sinistro, il quale tronco forma la succlavia destra di origine e corso anomali. Io ho cercato se in qualche vertebrato superiore, e specialmente in qualche mammifero fosse normale la divisata trasposizione di origine della succlavia destra, ma non mi è venuto fatto di trovarne alcun esempio, onde che anche filogeneticamente l' anomalia non è spiegabile. Spiegablle è bensì l' altra anomalia arteriosa che l' accompagna, il nascere cioè le due carotidi primitive da un ceppo comune, o tronco innominato, poichè tale disposizione è, secondo che trovo notato, normale nell' elefante. S' intende poi di leggieri come possa aver luogo quel tronco innominato, essendo che le due carotidi sorgendo vicinissime dal bulbo arterioso, possono facilmente nella loro origine e per un certo tratto unirsi e confondersi in un ceppo o tronco comune per amore, ben s' intende, di quella loro grande vicinità.

Quanto alla inversione dei condotti toracici, l' embriologia non ci somministra osservazioni che ci scorgano ad intenderne la genesi. Mancando di questo giovamento, ci può essere di alcun ajuto la considerazione di qualche altra anomalia di essi condotti. Accade talvolta che il grande condotto toracico sia doppio, ovvero che esso nel petto si divida in due grosse branche, una delle quali va a mettere foce nella vena succlavia sinistra, l'altra unita al tronco broncomediastinico destro nella vena succlavia destra. Questa disposizione sembra non sia altro che la dilatazione di un ramo anastomotico che suole trovarsi tra il grande condotto toracico e quel tronco broncomediastinico. Se una delle due branche prefate, poniamo la destra, prevalga e conduca una maggiore copia di linfa, l'altra dovrà restringersi, e crescendo quella copia vieppiù, e continuatamente, dovrà essa atrofizzarsi ed anche obliterarsi, ed alla perfine scomparire. E non è cosa nuova che il grande condotto toracico si obliteri, avendone già recati esempi Lientaud (1), Portal (2), A. Cooper (3), Rust (4) e, secondo Henle (5), Arnold. Tale obliterazione è recata a causa morbosa, e specificamente da Wutzer a flogosi essudativa (6). E qui torna buono aggiugnere che questo autore nel caso da lui osservato di grande condotto toracico aperto con doppia bocca nella vena azigos, la porzione di condotto posta sopra quegli sboc-

---

(1) Historia anatomico-medica. T. II. Parisiis 1767, pag. 93.

(2) *Férussac.* Bulletin des sciences médicales. T. 18. 1829, pag. 329.

(3) Medical Records and Researches from the papers of a private medical association. London 1798. Vol. I, pag. 28.

(4) Horn' s Archiv 1815 Septbr. u. Octbr. S. 731.

(5) Op. cit. l. c.

(6) Muller' s Archiv 1834, pag. 311 alla 318. Eimmündung des ductus thoracicus in die vena azygos. Tab. V.

chi era molto assottigliata e come un ramo del condotto medesimo, certo pel deviamento graduato della linfa da quella porzione. Tale osservazione, della quaie già fu detto pure da principio, conforta l' ipotesi che ho discorso di sopra, e si unisce a questa ad agevolarne l'intendere la genesi della inversione dei condotti toracici, la quale genesi mi è parso l' unica soddisfacente, come l'unica che ho saputo trovare, non soccorrendoci la embriologia. Che poi all' ultimo cotesta inversione abbia un rapporto genetico con l' inversa origine od origine della succlavia destra dalla estremità posteriore dell' arco aortico, o dal principio dell' aorta discendente toracica, pare neppure sia lecito congetturare, considerato che quella inversione si è fin qui osservata senza quella anomalia arteriosa, e che questa si è osservata senza quella, od almeno se le due anomalie arteriosa e linfatica trovavansi congiunte non fu tale congiunzione avvertita.

SPIEGAZIONE DELLA FIGURA

Dimostra questa Figura l' inversione dei condotti toracici grande e piccolo dalla parte posteriore una e l' origine dell' arteria succlavia destra al di dietro della sinistra, ed altresì gli altri vasi sanguiferi ed organi coi quali sono quei condotti in rapporto. Il tutto fuori di sito e di naturale grandezza.

a, esofago.
b, trachea.
c, bronco primario destro.
d, bronco primario sinistro.
e, sacco del pericardio.
f, linea indicante il diaframma cui il pericardio aderisce.
g, vena cava ascendente avvolta dal pericardio.
h, vena cava discendente.
i, vena azigos sboccante nella vena cava anzidetta.
k, vena innominata destra.
l, vena jugulare interna destra.
m, vena succlavia destra.

n, vena jugulare esterna destra dilatata presso la sua foce nella vena anzidetta in una specie di bulbo trasversalmente tagliato.
o, vena jugulare interna sinistra.
p, vena succlavia sinistra.
q, vena jugulare esterna sinistra.
r, ramo destro dell' arteria polmonale.
s, ramo sinistro della medesima.
t, u, vene polmonali destre e sinistre.
v, arco aortico alla sua estremità posteriore.
x, y, carotidi comuni.
z, arteria succlavia sinistra.
&, ramo vertebrale di quest' arteria.
1, arteria succlavia destra.
2, dilatazione conica al principio di quest' arteria.
3, aorta discendente toracica.
4, grande condotto toracico.
5, suo arco.
6, sua divisione in due rami.
7, ramo interno minore.
8, ramo esterno maggiore.
Amendue questi rami mettono nella vena succlavia destra.
9, condotto toracico piccolo, qui sinistro.

E. Contoli, dis. dal vero, e lit.

lit. G. Wenk e Figli–Bologna.

INDICE

MEMORIE

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DELL' ISTITUTO DI BOLOGNA

SERIE V. – TOMO I

Fascicolo Secondo.

BOLOGNA
TIPOGRAFIA GAMBERINI E PARMEGGIANI
1891

INTORNO

ALLA

COSTITUZIONE DELL'APIOLO E DEI SUOI DERIVATI

MEMORIA

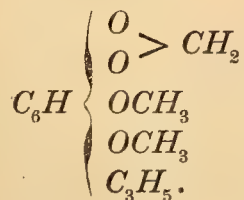
DI

GIACOMO CIAMICIAN E PAOLO SILBER

(Letta nella Sessione 9 Novembre 1890).

Negli ultimi due anni abbiamo pubblicato una serie di studj intorno all' apiolo (*), i quali ci hanno condotto ai seguenti risultati. L' apiolo si trasforma per azione della potassa alcoolica in un composto isomero, *l' isapiolo,* che ha un comportamento molto simile a quello della materia primitiva, da cui differisce principalmente per la facilità con la quale viene attaccato dagli ossidanti.

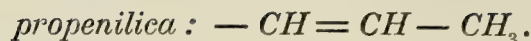
Dall' esame dei prodotti d' ossidazione dell' apiolo e segnatamente dell' isapiolo, risultò, prima di tutto, che queste sostanze sono da considerarsi quali derivati d' un propenilfenolo poliatomico, e si arrivò ben tosto ad assegnare tanto all' uno che all' altro dei due composti isomeri la seguente formola di costituzione:

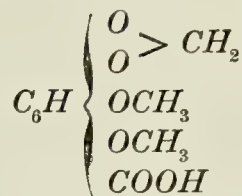
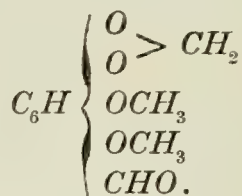
$$C_6H \begin{cases} {}^{O}_{O}\!> CH_2 \\ OCH_3 \\ OCH_3 \\ C_3H_5 . \end{cases}$$

La differenza fra l' apiolo e l' isapiolo fu riconosciuto risiedere nella struttura del radicale « C_3H_5 », che può avere la forma

$$\textit{allilica}: -CH_2-CH=CH_2$$

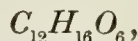
(*) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. vol. IV. I semestre pag. 542, 550 e 824. — vol. V. II semestre, pag. 3.

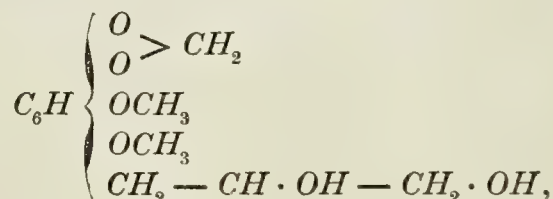
oppure quella

$$\textit{propenilica}: -CH=CH-CH_3.$$

Per ossidazione dell' apiolo e dell' isapiolo col permanganato potassico in soluzione alcalina e col bicromato potassico in soluzione acida, si ottengono, quali composti maggiormente interessanti, *l'acido apiolico* e *l'aldeide apiolica,* le di cui formole dimostrano appunto, che in questi processi il residuo propenilico viene trasformato in gruppo carbossilico o aldeidico.

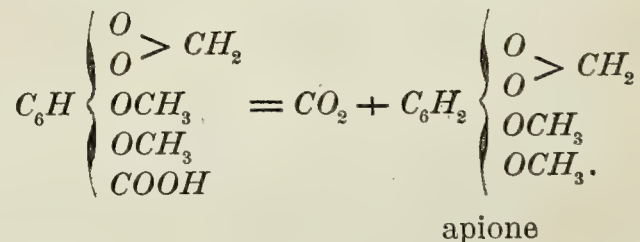
$$C_6H\begin{cases} \begin{matrix} O \\ O \end{matrix} > CH_2 \\ OCH_3 \\ OCH_3 \\ COOH \end{cases} \qquad\qquad C_6H\begin{cases} \begin{matrix} O \\ O \end{matrix} > CH_2 \\ OCH_3 \\ OCH_3 \\ CHO. \end{cases}$$

acido apiolico — aldeide apiolica

Oltre a queste sostanze si ottenne per ossidazione dell'apiolo col camaleonte in soluzione alcalina, un composto neutro, della formola empirica:

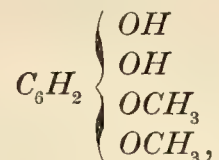
$$C_{12}H_{16}O_6,$$

al quale spetta probabilmente la seguente costituzione:

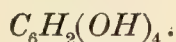
$$C_6H\begin{cases} \begin{matrix} O \\ O \end{matrix} > CH_2 \\ OCH_3 \\ OCH_3 \\ CH_2-CH\cdot OH-CH_2\cdot OH, \end{cases}$$

per cui dovrebbe essere considerato come un *glicole apiolico.*

L' acido apiolico perde in determinate condizioni una molecola d' anidride carbonica e si trasforma nell'etere dimetilmetilenico del fenolo fondamentale dell'apiolo; il composto in parola venne chiamato *apione,* e la sua formazione e costituzione é espressa dalla seguente uguaglianza:

$$C_6H\begin{cases} \begin{matrix} O \\ O \end{matrix} > CH_2 \\ OCH_3 \\ OCH_3 \\ COOH \end{cases} = CO_2 + C_6H_2\begin{cases} \begin{matrix} O \\ O \end{matrix} > CH_2 \\ OCH_3 \\ OCH_3. \end{cases}$$

apione

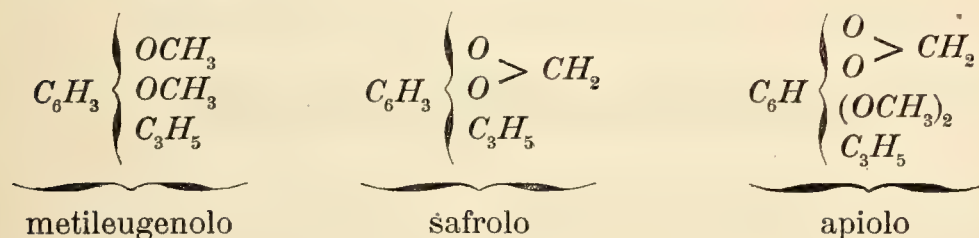
Finora non è stato possibile d'ottenere allo stato libero il fenolo tetratomico corrispondente all'apione. Riscaldando l'acido apiolico in tubi chiusi con potassa alcoolica, si elimina, oltre al carbossile, soltanto il gruppo metilenico ed il composto risultante:

$$C_6H_2 \begin{cases} OH \\ OH \\ OCH_3 \\ OCH_3, \end{cases}$$

venne chiamato *dimetilapionolo*, designando col nome di *apionolo* il fenolo tetratomico fondamentale dell'apiolo:

$$C_6H_2(OH)_4.$$

L'apione può dirsi però anche *dimetilmetilenapionolo.*

A questo punto erano arrivati i nostri studj sull'apiolo, quando, sul principio del corrente anno, credendo utile, per il loro ulteriore sviluppo, di comparare il comportamento chimico dell'apiolo con quello di altri corpi d'analoga costituzione, incominciammo una serie di ricerche sul *safrolo* e sul *metileugenolo.*

Come si vede dalle seguenti formole:

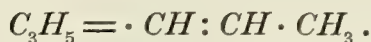
$$\underbrace{C_6H_3 \begin{cases} OCH_3 \\ OCH_3 \\ C_3H_5 \end{cases}}_{\text{metileugenolo}} \qquad \underbrace{C_6H_3 \begin{cases} \begin{matrix} O \\ O \end{matrix} > CH_2 \\ C_3H_5 \end{cases}}_{\text{safrolo}} \qquad \underbrace{C_6H \begin{cases} \begin{matrix} O \\ O \end{matrix} > CH_2 \\ (OCH_3)_2 \\ C_3H_5 \end{cases}}_{\text{apiolo}}$$

questi corpi hanno tra di loro molta somiglianza e di fatto abbiamo trovato che questa si riscontra anche nelle loro proprietà chimiche. Il safrolo ed il metileugenolo vengono anch'essi trasformati dalla potassa alcoolica in composti isomeri, i quali danno poi, con maggiore facilità, per ossidazione gli acidi corrispondenti all'acido apiolico. Per queste ragioni e per altre ancora, che vennero trovate e pubblicate da I. F. Eykmann (*) quasi contemporaneamente alle nostre esperienze (**), si può ammettere, che nel-

(*) Berl. Ber. 23. pag. 855.
(**) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. vol. VI. I semestre, pag. 388.

l'apiolo, nel safrolo e nel metileugenolo sia contenuto il gruppo allilico:

$$C_3H_5 = \cdot CH_2 \cdot CH : CH_2,$$

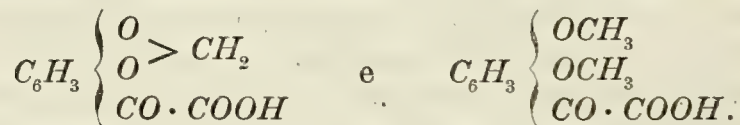
il quale nei loro isomeri, cioè nell'isapiolo, isafrolo ed isometileugenolo, è convertito in gruppo propenilico:

$$C_3H_5 = \cdot CH : CH \cdot CH_3.$$

Nel corso di questi studj, che venivano a confermare la formola di costituzione da noi proposta per l'apiolo, abbiamo trovato alcuni nuovi derivati del safrolo e del metileugenolo, che non corrispondevano a nessuna delle sostanze fino allora ottenute dall'apiolo. Ci sembrò perciò necessario, prima di procedere alla determinazione della costituzione dell'apionolo, che deve essere riguardata come il problema più importante, di completare la serie dei derivati apiolici. Di questi nuovi composti tratteremo in principio della presente Memoria e passeremo poi alla descrizione di quei fatti, che ci hanno permesso di determinare la struttura intima dell'apionolo e di stabilire, con una certa probabilità, quella dell'apiolo.

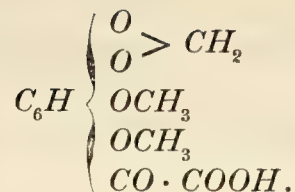
I.

Acido apionilgliossilico (Apionchetonico).

Le sostanze analoghe all'isapiolo danno per ossidazione col permanganato potassico in soluzione alcalina, oltre agli acidi carbossilici anche i corrispondenti acidi chetonici. L'isafrolo e l'isometileugenolo danno, oltre agli acidi piperonilico e veratrico, gli acidi chetonici delle formole:

$$C_6H_3 \begin{cases} O \\ O \end{cases}\!\!> CH_2 \\ CO \cdot COOH \quad \text{e} \quad C_6H_3 \begin{cases} OCH_3 \\ OCH_3 \\ CO \cdot COOH. \end{cases}$$

L'isapiolo doveva perciò comportarsi in modo simile e noi abbiamo trovato di fatto, che le acque madri, risultanti dall'ossidazione dell'isapiolo col camaleonte, contengono un'acido, più solubile dell'acido apiolico, al quale

spetta la formola:

$$C_6H \begin{cases} \overset{O}{\underset{O}{}} > CH_2 \\ OCH_3 \\ OCH_3 \\ CO \cdot COOH. \end{cases}$$

Ossidando l'isapiolo con permanganato potassico, nel modo da noi indicato (*), si ottiene, per precipitazione della soluzione alcalina con acido solforico diluito, l'acido apiolico e le acque madri contengono il nuovo acido, che si estrae nel seguente modo. Per ridurre il liquido a piccolo volume si concentrano le soluzioni solforiche, saturate con carbonato sodico, svaporandole a fuoco diretto. Si agitano quindi con etere, per eliminare le materie non acide, e si ripete indi questo trattamento sul liquido acidificato nuovamente. Il prodotto solubile nell'etere è un olio giallobruno, che si solidifica dopo qualche tempo. Il nuovo acido venne purificato prima mediante alcune cristallizzazioni dal benzolo bollente e poi facendolo ricristallizzare dall' acqua calda. Dalle soluzioni acquose si separa in forma d'aghi lunghi, lievemente colorati in giallo, che si scompongono fra 160° e 172° con sviluppo gassoso, producendo un liquido giallastro, senza avere un punto di fusione bene determinato.

L' analisi dette numeri corrispondenti alla formola sopraindicata.

0,2450 gr. di materia dettero 0,4678 gr. di CO_2 e 0,0924 gr. di H_2O.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_{11}H_{10}O_7$
C	52,08	51,97
H	4,19	3,94.

L' acido apionilgliossilico è solubile nell'acqua, nell' etere, nel benzolo bollente e nell' acido acetico. La soluzione acquosa dà con cloridrato di fenilidrazina un composto idrazinico, che verrà ulteriormente studiato.

Il sale argentico $[C_{11}H_9O_7 \cdot Ag]$ si ottiene, in forma d'un precipitato bianco e cristallino, trattando la soluzione acquosa dell' acido con nitrato d'ar-

(*) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. vol. IV. I semestre, pag. 564.

gento ammoniacale. Per l'analisi venne fatto cristallizzare dall'acqua bollente.

L'analisi di questo sale viene a confermare la formola dell'acido.

0,3454 gr. di materia dettero 0,1024 gr. d'argento.

In 100 parti:

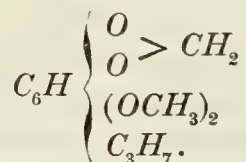
	trovato	calcolato per $C_{11}H_9AgO_7$
Ag	29,65	29,92.

II.

Riduzione dell' isapiolo.

Recentemente abbiamo dimostrato (*), che l'isosafrolo viene ridotto per azione dell'idrogeno che si svolge dall'alcool assoluto e sodio metallico, trasformandosi in parte in un fenolo monoatomico, il meta-propilfenolo, ed in parte in diidrosafrolo. L'isapiolo si comporta in modo perfettamente analogo.

La riduzione venne eseguita sciogliendo 10 gr. d'isapiolo in 150 c. c. d'alcool assoluto e trattando il liquido prima a freddo e poi a b. m. con sodio metallico fino a saturazione. Versando il prodotto della reazione in 400 c. c. d'acqua si forma subito un intorbidamento lattiginoso e poi, agitando il liquido, un precipitato bianco. La materia solida così ottenuta (3,8 gr.) si purifica facilmente facendola cristallizzare dall'alcool o per distillazione. Essa fonde a 35° e bolle a 292° senza decomposizione. La sua formola corrisponde a quella d'un *diidroapiolo*, che avrà senza dubbio la seguente costituzione:

$$C_6H \begin{cases} \begin{matrix} O \\ O \end{matrix} > CH_2 \\ (OCH_3)_2 \\ C_3H_7 . \end{cases}$$

(*) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. vol. VI. I semestre, pag. 442.

I risultati dell' analisi provano l' esattezza di questa formola.

0,2312 gr. di materia dettero 0,5454 gr. di CO_2 e 0,1504 gr. di H_2O.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_{12}H_{16}O_4$
C	64,33	64,29
H	7,23	7,14.

Il diidroapiolo si scioglie nell' etere, nel benzolo, nell' etere petrolico e nell' alcool. In quest' ultimo si scioglie più facilmente dell' isapiolo. Con acido solforico concentrato si colora in giallo e la colorazione passa poi rapidamente al rosso. L' isapiolo dà invece subito una colorazione rossa intensa.

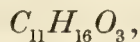
Il liquido alcalino, da cui si separò il diidroapiolo, venne liberato dall' alcool per distillazione ed indi acidificato ed esaurito con etere. Il prodotto, che si ottiene in questo modo, bolle, alla pressione di 36 mm. a 168°, e distilla a pressione ordinaria, a 277-278°. È un liquido denso, giallognolo, che non si solidifica nel miscuglio di neve e sale. Per l' analisi venne frazionato a pressione ridotta.

0,2486 gr. di sostanza dettero 0,6152 gr. di CO_2 e 0,1836 gr. di H_2O.

In 100 parti:

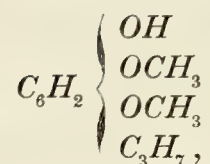
	trovato	calcolato per $C_{11}H_{16}O_3$
C	67,49	67,35
H	8,21	8,16.

Il nuovo composto, che ha dunque la formola:

$$C_{11}H_{16}O_3,$$

si comporta come un fenolo. Si scioglie negli alcali ed è insolubile nei carbonati alcalini. Nell' acqua fredda è del pari quasi insolubile, ma si scioglie un poco in quella calda. La soluzione acquosa dà col cloruro ferrico un precipitato bruno fioccoso.

La costituzione di questo corpo è senza dubbio da rappresentarsi con

la seguente formola:

$$C_6H_2 \begin{cases} OH \\ OCH_3 \\ OCH_3 \\ C_3H_7 , \end{cases}$$

la quale viene confermata dalla determinazione degli ossimetili, eseguita col metodo di Zeisel.

0,1520 gr. di materia dettero 0,3589 gr. di AgI, da cui si deduce la seguente quantità di ossimetile su 100 parti di composto:

	trovato	calcolato per $C_9H_{10}O(OCH_3)_2$
$2(OCH_3)$	31,15	31,63 p. cto.

L' isapiolo si comporta dunque coll' idrogeno nascente come l' isafrolo; in entrambi i casi si forma in parte il derivato biidrogenato, in cui il gruppo propenilico è convertito in gruppo propilico, ed assieme a questi si ottengono composti fenici nei quali il gruppo biossimetilenico è rimpiazzato da un ossidrile.

Da 10 gr. di isapiolo abbiamo ottenuto 3,8 gr. di idrapiolo e 5,0 gr. di composto fenico.

Abbiamo tentato d' ottenere l' etere trimetilico dal fenolo ora descritto, ma nel processo di metilazione avvengono reazioni secondarie, simili a quelle osservate da Herzig e Zeisel (*) nella eterificazione di vari fenoli poliatomici, per cui il prodotto dà all' analisi e nella determinazione dell' ossimetile numeri, che differiscono alquanto da quelli richiesti dalla teoria. L' operazione venne eseguita scaldando il fenolo in tubo chiuso o in un' apparecchio a ricadere, munito di una colonna di mercurio, a b. m., con la quantità necessaria di joduro metilico e potassa. Il prodotto ottenuto bolliva principalmente a 160-161° a 36 mm., e passava in gran parte a 266-269° a pressione ordinaria.

(*) Vedi Monatshefte für Chemie X, pag. 144 e seguenti.

Le analisi fatte con preparati differenti dettero i seguenti numeri:

I. 0,2622 gr. di sostanza dettero 0,6648 gr. di CO_2 e 0,2034 gr. di H_2O.
II. 0,1152 gr. di sostanza dettero 0,2914 gr. di CO_2 e 0,0896 gr. di H_2O.

In 100 parti:

	trovato		calcolato per $C_{12}H_{18}O_3$
	I.	II.	
C	69,13	68,98	68,57
H	8,62	8,64	8,57.

In relazione coll'eccesso di carbonio, s'è ottenuto dalle frazioni corrispondenti, un difetto nella quantità di ossimetile (*).

I. 0,2000 gr. di sostanza dettero, seguendo il metodo di Zeisel, 0,6471 gr. di AgI.
II. 0,3368 gr. di sostanza dettero 1,0183 gr. di AgI.

In 100 parti:

	trovato		calcolato per $C_9H_9(OCH_3)_3$
	I.	II.	
OCH_3	42,68	39,88	44,29.

Questo etere metilico, a cui saranno mescolate quantità più o meno rilevanti di composti chetonici secondari, è un'olio giallognolo insolubile nell'acqua, che non si solidifica nel miscuglio frigorifero ordinario. — Noi abbiamo fatto molti tentativi per ottenere dal fenolo libero e dal suo etere qualche prodotto di ossidazione bene caratterizzato, ma inutilmente. Si formano sempre materie oleose e resinose, oltre alle quali non abbiamo potuto accertare fra i prodotti di ossidazione, che la presenza di acido butirico.

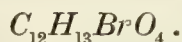
Mentre l'isapiolo e l'isafrolo danno facilmente prodotti di riduzione, si osserva che l'apiolo ed il safrolo non vengono quasi punto modificati per azione del sodio sulle loro soluzioni alcooliche.

L'apiolo può essere riottenuto quasi completamente dal liquido alcalino e nella soluzione non rimangono che piccole quantità d'una materia di natura fenica.

(*) Vedi Monatshefte für Chemie X, pag. 144 e seguenti.

III.

Derivati bromurati dell' isapiolo.

Isidoro Ginsberg (*) ottenne qualche tempo fa per azione del bromo sull' apiolo e sull' isapiolo composti tribromurati. Nel composto derivante dall' isapiolo due atomi di bromo devono trovarsi in condizioni diverse del terzo, perchè bollendolo con polvere di zinco in soluzione alcoolica si ottiene un *monobromoisapiolo*. Noi abbiamo scaldato una soluzione alcoolica di tribromoisapiolo (p. f. 120°) con polvere di zinco per 20 ore a b. m.. Il liquido filtrato e concentrato dà per trattamento con acqua un prodotto oleoso, che abbandonato a sè stesso si trasforma, dopo qualche tempo, in una massa solida formata da aghi raggruppati concentricamente. Cristallizzati dall' alcool, fondono a 51° e contengono una quantità di bromo corrispondente alla formola:

$$C_{12}H_{13}BrO_4 .$$

0,2294 gr. di materia dettero 0,1421 gr. di $AgBr$.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_{12}H_{13}BrO_4$
Br	26,36	26,57.

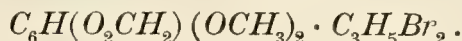
Il monobromoisapiolo è solubile nell'alcool, nell'acido acetico e nell'etere e non si scioglie nell'acqua. Con acido solforico concentrato si colora in bruno.

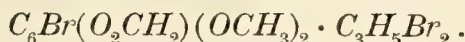
Noi abbiamo preparato anche un composto bibromurato, trattando a poco a poco con bromo una soluzione di isapiolo nell' etere anidro, raffreddata con ghiaccio e sale, fino a che l'alogeno rimase in lieve eccesso. Il liquido trattato con un po' d'anidride solforosa, fino a scolorarlo completamente, e lavato indi con acqua, dà per svaporamento spontaneo una massa cristallina, che venne fatta cristallizzare dall' etere petrolico bollente,

(*) Berl. Ber. 21, 2514.

dopo averla seccata sull' acido solforico. Si ottengono tavolette rombiche, spesso raggruppate in mammelloni, che fondono a 75°.

È assai probabile che questa sostanza sia un *bibromuro di isapiolo,* e che abbia perció la seguente formola:

$$C_6H(O_2CH_2)(OCH_3)_2 \cdot C_3H_5Br_2 .$$

Il tribromoisapiolo di Ginsberg sarà forse il *bibromuro di monobromoisapiolo:*

$$C_6Br(O_2CH_2)(OCH_3)_2 \cdot C_3H_5Br_2 .$$

La quantitá di bromo contenuta nel bibromuro da noi scoperto corrisponde alla formola sopraindicata.

0,3532 gr. di materia dettero 0,3443 gr. di $AgBr$.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_{13}H_{14}O_4Br_2$
Br	41,48	41,88 .

Il bibromuro d' isapiolo viene decomposto per ebollizione con acqua o con alcool ed il liquido contiene acido bromidrico libero. Trattandolo con polvere di zinco in soluzione alcoolica si forma un prodotto oleoso, che sembra essere diverso dall' isapiolo.

IV.

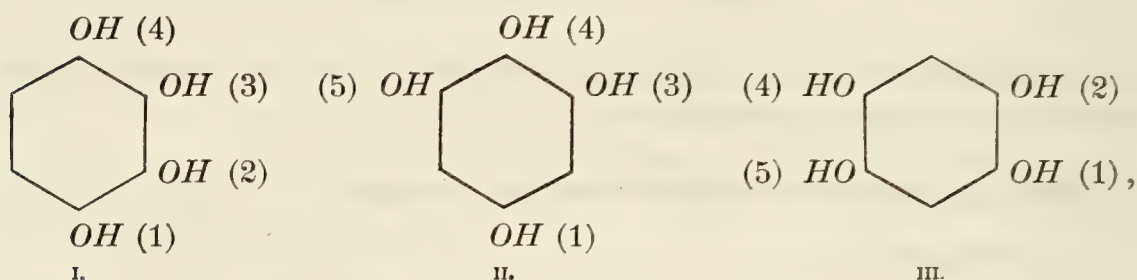
Sulla costituzione dell' apionolo.

Noi abbiamo supposto fino dai nostri primi studj sull' apiolo (*), che il nucleo fondamentale di questo corpo fosse un fenolo tetratomico, che abbiamo chiamato *apionolo.* L' apione deve essere considerato in base alle

(*) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. vol. IV. I semestre, pag. 554 e 827.

nostre esperienze come l' etere dimetilmetilenico dell' apionolo. Inoltre abbiamo descritto recentemente (*) il dimetilapionolo e l' etere dimetilico corrispondente, il *tetrametilapionolo,* che non è altro che un *tetrametossilbenzolo :*

$$C_6H_2(OCH_3)_4 .$$

La teoria generale dei corpi aromatici fa prevedere l' esistenza di tre tetraossibenzoli isomeri, ai quali spettano le seguenti formole:

e la questione che avevamo a risolvere era necessariamente quella di vedere a quale di questi tre differenti composti fossero da riferirsi i derivati dell' apionolo.

A questo proposito è prima di tutto da osservarsi, che il tetrametilapionolo non corrisponde per le sue proprietà all' etere tetrametilico del tetraossibenzolo 1-3-4-5, preparato da W. Will (**), e da lui chiamato β-ossipirogallolo (***). Inoltre l'apionolo non può essere identico per molte ragioni col tetraossibenzolo simmetrico di Nietzki e Fr. Schmidt (****); perciò non può avere altra costituzione che quella rappresentata dalla formola I.

Per l' importanza che spetta all' apionolo, quale nucleo fondamentale dell' apiolo, era però desiderabile avere una prova diretta per dimostrare che i quattro ossimetili del tetrametilapionolo si trovano nelle posizioni 1-2-3-4.

Si trattava perciò di provare, che nei derivati dell' apionolo i due atomi d' idrogeno benzolici ancora disponibili, stanno l' uno rispetto all' altro in posizione « orto ». — A questo scopo invece di esperimentare sul tetra-

(*) Ibid. vol. V. II semestre, pag. 3.
(**) Berl. Ber. 21, 610.
(***) Ibid. 21, 2025.
(****) Ibid. 21, 2374.

metilapionolo ci siamo serviti dei derivati dell'apione, che sono molto più facili a prepararsi.

Dinitroapione.

Recentemente (*) abbiamo ottenuto per azione dell'acido nitrico sull'acido apiolico una sostanza, che abbiamo ritenuto essere il dinitroapione. L'apione dà per trattamento con acido nitrico realmente lo stesso composto. — Per prepararlo si scioglie 1 gr. d'apione in 10 c. c. d'acido acetico glaciale e si versa a poco a poco questa soluzione in 15 c. c. d'acido nitrico, della densità 1,52, raffreddato a — 18°. Si ottiene una soluzione colorata intensamente in giallo carico, la quale versata nell'acqua dà origine alla formazione d'un precipitato giallo, fioccoso, che si purifica per cristallizzazione dall'alcool. Il prodotto si presenta in aghi gialli, lunghi e e splendenti, fusibili a 117-118°, perfettamente identici al composto preparato dall'acido apiolico. Quest'ultimo modo di preparazione è però sempre da preferirsi.

L'analisi venne a confermare la formola stabilita l'anno scorso.

0,3170 gr. di materia dettero 29,0 c. c. d'azoto, misurati a 17°,6 ed a 774 mm..

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_9H_8N_2O_8$
N	10,55	10,29.

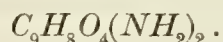
Se si può dimostrare che nel dinitroapione i due residui nitrici si trovano l'uno rispetto all'altro in posizione « orto », la costituzione dell'apionolo è trovata. Noi abbiamo raggiunto questo scopo preparando il diamidoapione e provando che esso è una *ortodiammina*, perchè si combina con la massima facilità con gli ortodichetoni per formare le azine relative.

Diamidoapione.

La riduzione del dinitroapione, preparato dall'acido apiolico, si compie facilmente mediante l'idrogeno svolgentesi dall'acido cloridrico con lo stagno. — 5 gr. del composto nitrico, ridotti in fina polvere, vennero riscal-

(*) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. vol. V. II semestre, pag. 12.

dati debolmente con 200 c. c. d'acido cloridrico in presenza di limatura di stagno, che veniva aggiunto a poco a poco, man mano che andava sciogliendosi nell'acido cloridrico. Dopo due o tre ore tutto il dinitroapione era scomparso e trasformato nella nuova base, che trovavasi in soluzione allo stato di cloridrato. Per ottenerla, si tratta con un forte eccesso di potassa e si estrae con etere. È necessario separare al più presto l'alcaloide dai liquidi eterei, che risultano dalle singole estrazioni, perché lasciando i cristalli in contatto con la soluzione madre si scompongono facilmente in parte. Il prodotto, formato da cristalli giallastri, si altera facilmente all'aria diventando bruno, e conviene perció purificarlo subito, facendolo cristallizzare dall'etere. Quando é pura, la base é abbastanza stabile; si presenta in prismi senza colore o colorati lievemente in giallo, che fondono a 119°. L'analisi dette numeri corrispondenti alla formola del diamidoapione:

$$C_9H_8O_4(NH_2)_2 .$$

0,2928 gr. di sostanza dettero 0,5458 gr. di CO_2 e 0,1550 gr. di H_2O.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_9H_{12}N_2O_4$
C	50,84	50,94
H	5,88	5,66.

Il diamidoapione si scioglie nell'acqua colorandola in giallo; bollendo, il liquido si fa sempre più colorato, per cui é certo che avviene una parziale decomposizione del prodotto. È assai probabile che la base ottenuta da Ginsberg (*), per riduzione d'un composto nitrico proveniente dall'isapiolo, sia identica alla nostra. Ginsberg trovó il punto di fusione 118°.

Il diamidoapione si scioglie nell'acido cloridrico senza colorare il liquido, per svaporamento si ottiene il *cloridrato,* che cristallizza in aghi senza colore. La sua soluzione acquosa riduce il cloruro d'oro ed il cloruro di platino; con cloruro ferrico si ottiene una colorazione verde, che diventa subito rossastra. — Trattando una soluzione alcoolica della base libera, con una soluzione alcoolica d'acido picrico, si ottiene il *picrato,* cristallizzato in aghi gialli.

Bollendo 1 gr. di diamidoapione con 5 c. c. d'anidride acetica a ricadere

(*) Berl. Ber. 21. 1193 e 1194.

per due ore e distillando poi il liquido a pressione ridotta, risulta un derivato acetilico, insolubile nell' acqua fredda, che venne fatto cristallizzare parecchie volte dall' alcool diluito bollente. Si ottengono aghi senza colore, che fondono a 133°. La loro composizione centesimale condurrebbe alla formola d' un *tetracetildiamidoapione :*

$$C_9H_8O_4[N(C_2H_3O)_2]_2 .$$

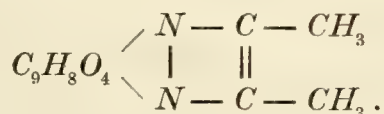
0,1962 gr. di materia dettero 0,3848 gr. di CO_2 e 0,0980 gr. di H_2O.

In 100 parti :

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{20}N_2O_8$
C	53,49	53,68
H	5,55	5,26 .

Il diamidoapione si combina con la massima facilità col diacetile e col benzile.

Bollendolo in soluzione alcoolica con un' eccesso di *diacetile* e trattando il liquido colorato in giallo con un poco d' acqua, si forma per raffreddamento una massa di aghi gialli, lunghi e sottili, che vennero fatti cristallizzare dall' acqua bollente, in cui sono poco solubili. Fondono a 176° ed hanno la composizione d' una *azina derivante dal diamidoapione :*

$$C_9H_8O_4 \left\langle \begin{array}{l} N - C - CH_3 \\ \;| \quad\;\; \| \\ N - C - CH_3 . \end{array} \right.$$

0,1700 gr. di sostanza dettero 0,3706 gr. di CO_2 e 0,0864 gr. di H_2O.

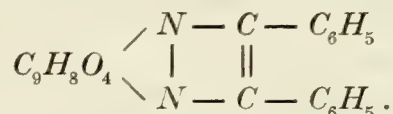
In 100 parti :

	trovato	calcolato per $C_{13}H_{14}N_2O_4$
C	59,45	59,54
H	5,65	5,34 .

Con uguale prontezza agisce il *benzile* sul diamidoapione. Mescolando una soluzione di diamidoapione (0,6 gr.) in acido acetico al 90 p. cto. (3 c. c.) con la quantità necessaria di benzile (0,6 gr. sciolti in 10 c. c. d'acido acetico), il liquido si riscalda e dopo qualche tempo lo si trova convertito in una

massa di cristalli gialli. Purificati mediante alcune cristallizzazioni dall'acido acetico bollente e poi dall'alcool bollente, dove sono poco solubili, si presentano in forma di aghi colorati lievemente in giallo, che fondono a 222°. Con acido solforico concentrato danno una colorazione rosso-violetta intensa.

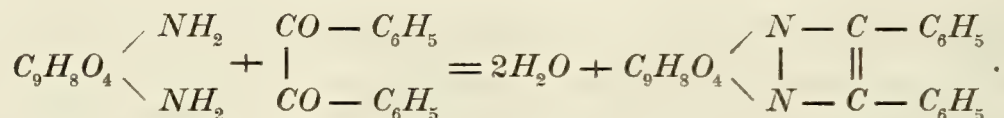
L'analisi corrispose alla formola preveduta:

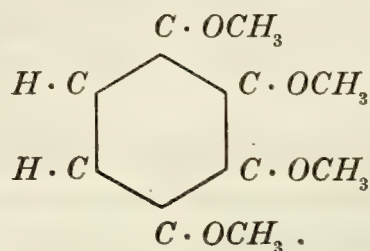
$$C_9H_8O_4 \begin{cases} N - C - C_6H_5 \\ \;|\quad\;\; \| \\ N - C - C_6H_5 \end{cases} .$$

0,1766 gr. di sostanza dettero 0,4644 gr. di CO_2 e 0,0786 gr. di H_2O.

In 100 parti:

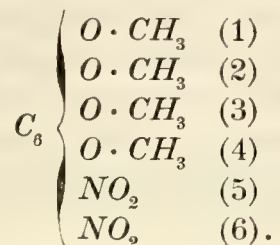
	trovato	calcolato per $C_{23}H_{18}N_2O_4$
C	71,72	71,50
H	4,94	4,66.

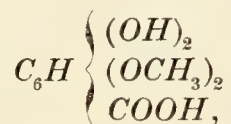
Il rendimento di azina corrisponde a quello voluto dalla equazione seguente:

$$C_9H_8O_4 \begin{cases} NH_2 \\ \\ NH_2 \end{cases} + \begin{matrix} CO - C_6H_5 \\ | \\ CO - C_6H_5 \end{matrix} = 2H_2O + C_9H_8O_4 \begin{cases} N - C - C_6H_5 \\ \;|\quad\;\; \| \\ N - C - C_6H_5 \end{cases} .$$

Da queste esperienze risulta in modo evidente, che i due atomi di idrogeno benzenici dell' apione stanno l' uno rispetto all' altro in posizione « orto ». *L'apionolo è dunque il tetraossibenzolo assimmetrico [1-2-3-4] ed il tetrametilapionolo deve essere rappresentato perciò con la seguente formola:*

$$\begin{matrix} & C \cdot OCH_3 & \\ H \cdot C & & C \cdot OCH_3 \\ H \cdot C & & C \cdot OCH_3 \\ & C \cdot OCH_3 . & \end{matrix}$$

Tetrametilapionolo

Per meglio caratterizzare il tetrametilapionolo, in vista della singolare importanza che ha questo corpo, per gli studj di cui ci stiamo occupando, abbiamo preparato anche il *dinitrotetrametilapionolo,* il quale deve avere necessariamente la seguente costituzione:

$$C_6 \begin{cases} O \cdot CH_3 & (1) \\ O \cdot CH_3 & (2) \\ O \cdot CH_3 & (3) \\ O \cdot CH_3 & (4) \\ NO_2 & (5) \\ NO_2 & (6). \end{cases}$$

Sulla preparazione del dimetilapionolo, dal quale si ottiene poi l'etere tetrametilico dell'apionolo nel modo già descritto, abbiamo qualche cosa da aggiungere alle osservazioni pubblicate l'anno scorso (*). Riscaldando l'acido apiolico con potassa alcoolica in tubi chiusi, si ottiene, per acidificazione del prodotto, una materia catramosa, la quale conterrà probabilmente l'*acido dimetilapionolcarbonico:*

$$C_6H \begin{cases} (OH)_2 \\ (OCH_3)_2 \\ COOH, \end{cases}$$

piuttosto che il dimetilapionolo, il quale si formerebbe poi nella distillazione del prodotto greggio. Questa supposizione ci è stata suggerita dal fatto, che la soluzione alcalina, ottenuta trattando direttamente con acqua il contenuto dei tubi, dopo avere eliminato l'alcool, non dà il fenolo per trattamento con acido carbonico. Acidificando con un acido minerale energico, si ottiene la materia catramosa suddetta, la quale evidentemente conterrà l'acido suindicato, che durante il processo di distillazione si scinde in anidride carbonica e nel dimetilapionolo. Quest'ultima operazione, che riesce assai penosa se non si prendono speciali precauzioni, stante la irregolare e violenta scomposizione della massa, per cui questa viene facilmente projettata nel recipiente collettore, può essere assai agevolata, riempiendo tutto il palloncino con vetro filato. In questo modo il liquido viene assorbito completamente dal vetro e la scomposizione e la distillazione si effettua senza inconvenienti, riscaldando il palloncino in un bagno di lega da saldare.

(*) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. vol. V. II semestre, pag. 4.

La preparazione del dinitrotetrametilapionolo venne eseguita nel seguente modo: 2 gr. di etere sciolti in 20 c. c. d'acido acetico glaciale, vennero introdotti a poco per volta, in 30 c. c. d'acido nitrico ($d = 1{,}52$), raffreddato a — 18°. — Versando nell'acqua la soluzione rossastra risultante, si ottiene dopo qualche tempo un precipitato giallo, fioccoso, la di cui formazione viene agevolata se si agita energicamente il liquido. Il prodotto greggio viene filtrato, lavato e purificato, facendolo cristallizzare dall'alcool. È un corpo giallo, cristallino, che fonde a 92°. È insolubile negli alcali, che non ne alterano neppure il colore, solubile nell'alcool, nell'etere e nell'acido acetico. La sua composizione viene dimostrata dalla seguente analisi.

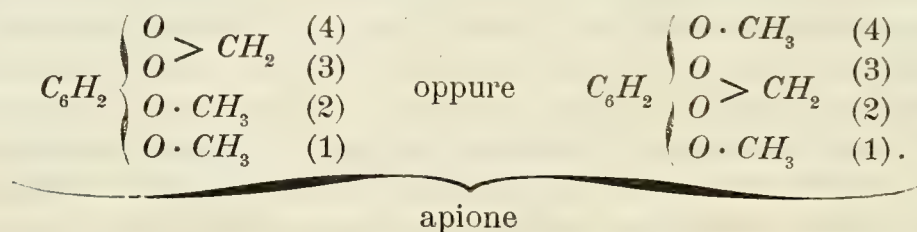
I. 0,2652 gr. di sostanza dettero 0,4080 gr. di CO_2 e 0,1042 gr. di H_2O.

II. 0,1300 gr. di materia svolsero 11 c. c. d'azoto misurato a 19° ed a 754 mm..

In 100 parti:

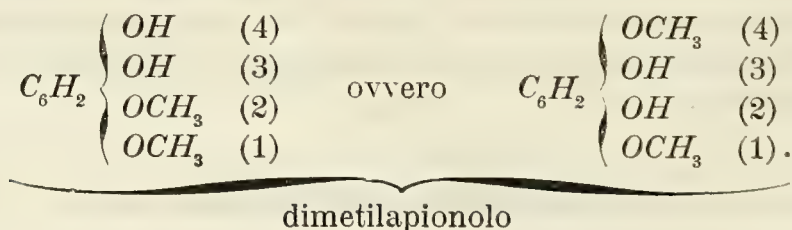
	trovato		calcolato per $C_{10}H_{12}N_2O_8$
	I.	II.	
C	41,96	— —	41,67
H	4,37	— —	4,17
N	— —	9,84	9,73.

Trovata la costituzione dell'apionolo, non rimangono per l'*apione* che due formole, le quali hanno per ora lo stesso grado di probabilità:

$$C_6H_2 \begin{cases} O \\ O \end{cases} \!\!> CH_2 \;\; \begin{matrix}(4)\\(3)\end{matrix},\; \begin{matrix} O\cdot CH_3 & (2) \\ O\cdot CH_3 & (1) \end{matrix} \qquad \text{oppure} \qquad C_6H_2 \begin{cases} O\cdot CH_3 & (4) \\ O \\ O \end{cases}\!\!> CH_2 \;\begin{matrix}(3)\\(2)\end{matrix},\; O\cdot CH_3 \;(1).$$

apione

Il *dinitroapione* ed il *diamidoapione* hanno anch'essi le formole corrispondenti, ed il *dimetilapionolo* contiene i due ossidrili liberi nei posti occupati dal gruppo biossimetilenico nella molecola dell'apione:

$$C_6H_2 \begin{cases} OH & (4) \\ OH & (3) \\ OCH_3 & (2) \\ OCH_3 & (1) \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad C_6H_2 \begin{cases} OCH_3 & (4) \\ OH & (3) \\ OH & (2) \\ OCH_3 & (1). \end{cases}$$

dimetilapionolo

In fine accenneremo che l'apione si trasforma in piccola parte per azione del sodio sulla sua soluzione alcoolica, nell'etere dimetilico d'un triossibenzolo, che ha molta somiglianza coll'ossiidrochinone. Su questa reazione ci riserbiamo di istituire ulteriori esperienze.

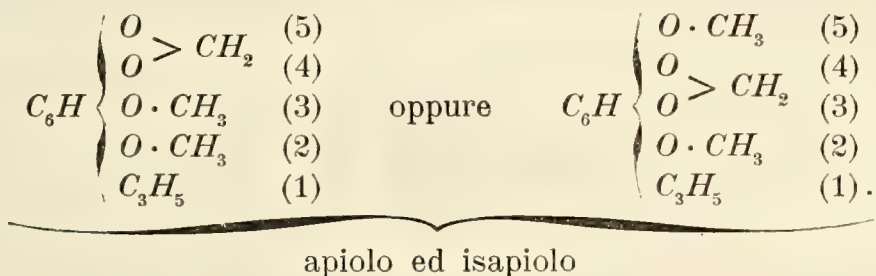
V.

Sulla costituzione dell'apiolo.

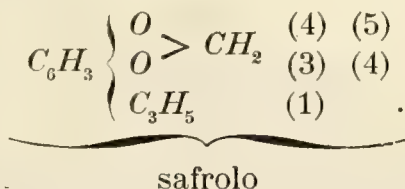
I fatti descritti finora permettono di determinare la costituzione dell'apiolo con una certa probabilità. Noi parleremo nel presente capitolo soltanto di questo corpo, perchè dopo quello che abbiamo detto in principio, ciò che vale per l'apiolo s'intende esteso anche all'isapiolo, il quale non differisce che per la struttura del radicale « C_3H_5 ».

Tenendo conto della costituzione dell'apionolo e dell'analogia più volte rilevata, che l'apiolo presenta col safrolo, risultano per esprimere la costituzione del primo, le seguenti formole, che sono presentemente ugualmente probabili:

$$C_6H \left\{ \begin{array}{ll} O \\ O \end{array} > CH_2 \begin{array}{l} (5) \\ (4) \end{array} \right. \atop \begin{array}{ll} O \cdot CH_3 & (3) \\ O \cdot CH_3 & (2) \\ C_3H_5 & (1) \end{array} \quad \text{oppure} \quad C_6H \left\{ \begin{array}{ll} O \cdot CH_3 & (5) \\ O > CH_2 & (4) \\ O & (3) \\ O \cdot CH_3 & (2) \\ C_3H_5 & (1) \end{array} \right.$$

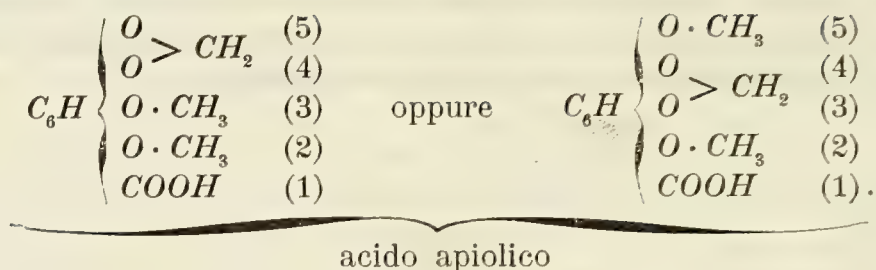
apiolo ed isapiolo

In queste due formole si ammette che il gruppo biossimetilenico occupi rispetto al radicale allilico lo stesso posto che ha nel safrolo:

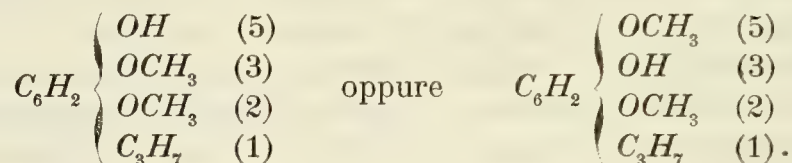
$$C_6H_3 \left\{ \begin{array}{lll} O \\ O \end{array} > CH_2 \begin{array}{ll} (4) & (5) \\ (3) & (4) \end{array} \right. \atop C_3H_5 \quad (1)$$

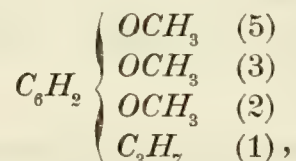
safrolo

L'acido e l'aldeide apiolica hanno anch'essi perciò le corrispondenti

formole di costituzione:

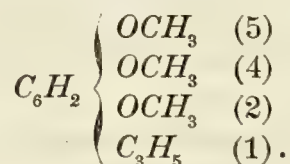
$$C_6H \left\{ \begin{array}{ll} {O \atop O} > CH_2 & {(5) \atop (4)} \\ O \cdot CH_3 & (3) \\ O \cdot CH_3 & (2) \\ COOH & (1) \end{array} \right. \quad \text{oppure} \quad C_6H \left\{ \begin{array}{ll} O \cdot CH_3 & (5) \\ {O \atop O} > CH_2 & {(4) \atop (3)} \\ O \cdot CH_3 & (2) \\ COOH & (1). \end{array} \right.$$

acido apiolico

Resta ancora a determinare la costituzione del fenolo triatomico, che si forma nella riduzione dell'isapiolo con sodio ed alcool. Se si può ammettere che l'isapiolo subisca in questo caso una trasformazione analoga a quella dell'isafrolo, in cui, come è noto (*), si elimina l'ossigeno che sta in posizione « para », rispetto al gruppo propenilico, si arriva per il composto fenico derivante dall'isapiolo ad una delle due seguenti formole:

$$C_6H_2 \left\{ \begin{array}{ll} OH & (5) \\ OCH_3 & (3) \\ OCH_3 & (2) \\ C_3H_7 & (1) \end{array} \right. \quad \text{oppure} \quad C_6H_2 \left\{ \begin{array}{ll} OCH_3 & (5) \\ OH & (3) \\ OCH_3 & (2) \\ C_3H_7 & (1). \end{array} \right.$$

L'etere trimetilico corrispondente non potrebbe avere in questo caso che la costituzione:

$$C_6H_2 \left\{ \begin{array}{ll} OCH_3 & (5) \\ OCH_3 & (3) \\ OCH_3 & (2) \\ C_3H_7 & (1), \end{array} \right.$$

che corrisponderebbe a quella dell'*etere trimetilico d'un propilossiidrochinone.*

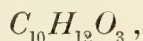
Ora è noto in seguito ai lavori di W. Will (**), che l'*asarone* è anch'esso un derivato del trimetilossiidrochinone e precisamente un' *alliltrimetilossiidrochinone,* che ha probabilmente la formola:

$$C_6H_2 \left\{ \begin{array}{ll} OCH_3 & (5) \\ OCH_3 & (4) \\ OCH_3 & (2) \\ C_3H_5 & (1). \end{array} \right.$$

(*) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. vol. VI. I semestre, pag. 442.
(**) Berl. Ber. 21, 615.

Perciò era interessante ricercare se il *diidroasarone* fosse differente dal prodotto di riduzione dell' isapiolo.

Noi abbiamo sottoposto al processo di riduzione con sodio ed alcool assoluto, un campione di asarone proveniente dalla fabbrica di E. Merck. Il prodotto sciolto nell' acqua e liberato dall'alcool dà, estraendo con etere, una materia oleosa, che passa fra 260° e 274°, senza avere un punto di ebollizione bene determinato. Questo corpo é però certamente diverso dalla materia derivante dall' isapiolo, massime in seguito al suo comportamento coll' acido nitrico. Mentre l'etere trimetilico, da noi descritto più sopra, non dà, per ossidazione coll' acido nitrico, che sostanze oleose, si ottiene facilmente dall' idroasarone una materia cristallina, priva d'azoto, che ha i caratteri d'un chinone.

Versando una soluzione del prodotto bollente fra 260° e 274° in acido acetico glaciale, nell'acido nitrico concentrato ($d = 1,52$), raffreddato a —18°, si ottiene un liquido rossobruno, che dà per trattamento con molt' acqua un precipitato cristallino. Questo ultimo, purificato per cristallizzazione dall' alcool, si presenta in squamette gialle, che fondono a 111°.

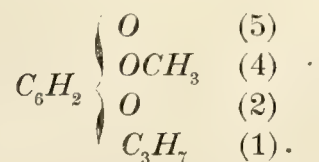
La composizione di questa sostanza corrisponde probabilmente alla formola:

$$C_{10}H_{12}O_3,$$

0,2258 gr. di materia dettero 0,5480 gr. di CO_2 e 0,1378 gr. di H_2O.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_{10}H_{12}O_3$
C	66,19	66,66
H	6,78	6,66

che sarebbe quella d'un' *ossimetilpropilchinone*

$$C_6H_2 \begin{cases} O & (5) \\ OCH_3 & (4) \\ O & (2) \\ C_3H_7 & (1). \end{cases}$$

Questo corpo si scioglie poco nell' acqua anche bollente, la sua soluzione acquosa é colorata in giallo e diventa bruna coll' ebollizione, emettendo vapori d'un' odore che ricorda quello della vainiglia. L'acido solforoso la

scolora immediatamente e svaporando il liquido si ottengono aghetti senza colore. Bollendo il chinone con acido cloridrico, si forma una soluzione gialla, che dopo qualche tempo acquista un colore verde. — Noi non abbiamo studiato ulteriormente questa sostanza, perchè essa non riguardava direttamente l' argomento delle nostre ricerche.

Dai nostri studj sull'apiolo risulta dunque che la sua costituzione corrisponde a quella d' un *etere dimetilmetilenico d' un' alliltetraossibenzolo assimmetrico (1-2-3-4)*. L'apiolo è finora l' unico prodotto naturale, che derivi da un fenolo tetratomico e presenta perciò, anche da questo lato, un notevole interesse.

STORIA E CONSIDERAZIONI

INTORNO UN CASO SINGOLARISSIMO

DI MACROCEFALIA DA IDROCEFALO ACUTO

MEMORIA

DEL PROF. CAV. FERDINANDO VERARDINI

(CON TAVOLA)

(Letta nella Sessione ordinaria del 16 Novembre 1890).

È questa, Signori, la terza volta che mi è dato d' intrattenervi intorno la *Macrocefalia da Idrocefalo acuto,* in quanto che per circostanze favorevoli ho avuto campo d' esaminarne alquanti casi da me raccolti monograficamente nella prima Memoria che compilai sopra questo tema, il quale mi parve e tuttavia mi sembra sempre degno di ponderazione, specialmente se lo si risguarda dal lato eziologico, e se pur mirasi a ricavarne dai fatti studiati la probabilità di raggiungere il più utile de' risultamenti, o quello di tentarne una cura efficace.

Accenno pensatamente ora a questa possibilità di buona riuscita non solo perchè ne feci un tentativo io stesso per ottenerla e che descrissi alla Storia quarta nel mio primo studio, pubblicato fra le Memorie di quest' Accademia nell' anno 1872, Serie 3ª, Tom. II, pungendo la raccolta sierosa contenuta entro il cranio d' un bambino macrocefalico e traendone da quell' atto operatorio un temporaneo miglioramento; ma singolarmente per le ammirabili cose apprese da me nell' esaminare i Resoconti delle Sedute tenutesi nel recente Congresso internazionale delle Scienze Mediche in Berlino, le quali molto m' impressionarono perchè addimostrative, essersi colà appunto valorosamente aperta una via che sembra possa guidare al desiato fine.

Per fermo, vi lessi in que' Resoconti che l' illustre Prof. *Horsley* nello svolgere magistralmente il difficile, oscuro, nuovo e delicatissimo argomento risguardante la *Chirurgia cerebrale*, con molta dottrina portò innanzi al dôtto Consesso idee peregrine ed ardite che sembrerebbero perfino esagerate ed

inattuabili se non fossero state di qualche guisa da Lui sorrette con alcuni fatti, i quali lasciano nascere nell' animo la non infondata speranza di un più efficace e fruttuoso pratico risultamento per l' avvenire.

E di vero, non è portentosa cosa l' aprire il cranio per arrestare emorragie legando ad esempio l' arteria meningea media? l' aprire estesamente la dura madre al fine di togliere grumi prodotti da contusione cerebrale per traumi? e così medesimamente per svotare raccolte ematiche avvenute in causa di pachi-meningite emorragica onde vincerne le conseguenze letali, premessane, ben inteso, la trapanazione del cranio che pell' *Horsley*, e per altri, è cosa di ben poco momento? e tuttavia trapanare il cranio in casi di emorragia secondaria a trombosi per impedire che si dia luogo all' epilessia, al coma, ed arrestarne o sventarne le funeste conseguenze? finalmente accennò che nei casi d' *idrocefalia* che suole arrecare epilessia, o la demenza, è utile pungere ripetutamente e comprimere e fognare i ventricoli laterali; e che nel rammollimento cerebrale è possibile ottenerne la guarigione estirpandone *il focolaio;* a prova reca innanzi un fatto a Lui stesso occorso nel quale dopo avere diagnosticato che trattavasi di un tumore formatosi al peduncolo cerebellare medio in un individuo che soffriva d' accessi epilettici con rotazione violenta del corpo da destra a sinistra, levò Esso la metà dell' occipitale e più tardi l' altra metà ed il malato visse due anni in discrete condizioni nè più fu molestato da fenomeni di compressione, e da epilessia. In appresso, ebbe altri sei casi analoghi ed operò della stessa maniera ed afferma che nessuno degli operati morì.

La fognatura poi dei ventricoli laterali del cranio, noto eziandio, fu si bene praticata con successo varie volte dal *Keen* (di Filadelfia), dallo *Zenner* (di Cincinnati) il quale riporta un fatto occorsogli, nel quale si trattava di *idrocefalo acuto* che metteva in pericolo di vita un fanciullo di quattro anni. Trapanato il cranio, tntrodotto un ago cavo, N. 5 della filiera francese, ed uscitone da esso parte dell' umore cefalo-rachidiano che conteneva, fece penetrare nel ventricolo, invece di tubi da fognatura, tre crini di cavallo, prima raddoppiati. Nulla occorse d' anormale e l' esito fu buono.

Ebbene, da questa sommaria esposizione non aveva, come dissi, ragione di chiamare portentosi i progressi della *Chirurgia cerebrale?* e non è lecito dedurne, in virtù di questi progressi, che anche nei casi di Macrocefalia da Idrocefalo acuto, e nei primordi del male si potrà impedire il progressivo sviluppo del male medesimo e vincerlo? e non me n' è arra il caso or qui sopra riportato?

Lo studio impertanto di questa alterazione patologica, che non è poi rara ad osservarsi, mi pare oggi meglio giustificato ed ho fede che non debba quindi tornare a Voi discara l' esposizione storica del nuovo e sin-

golarissimo fatto morboso che m' appresto a narrarvi, e dal quale, secondo mia possibilità, avrò cura di trarne alcune considerazioni.

STORIA

Pellegrino Domenichini, nativo di Loiano, ora nell' età di anni diciasette, compiuti sul finire del p. p. Agosto, è il decimo figlio di Costantino, mercante ambulante, da non molto tempo defunto, e della Bernardi Angela; nacque regolarmente ed era ben conformato in ogni sua parte del corpo, similmente a tutti i fratelli di lui, dei quali i primi cinque morirono in tenerissima età, i successivi, due maschi e due femmine, vivono rubusti, ben pasciuti e ben conformati di corpo. Il maggiore ha 30 anni, 25 l' altro. Le femmine hanno raggiunto una i 20, e la sorella i dicianove anni. La madre, come era stata costretta per tutti i suoi figliuoli, diede pur quest' ultimo a balia presso una donna sana, montanara, la quale lo allattò per circa un anno. Svezzato che fu, continuò a rimanere presso di lei, perchè la madre che seguiva il marito nelle lunghe e lontane escursioni, non poteva occuparsene e coltivarlo con quell' amore che avrebbe richiesto la sua tenerissima età. Trascorsi circa sedici mesi, il bambino, sebbene fosse in apparente stato di perfetta salute, fosse tranquillo e desse a conoscere di essere dotato di svegliata intelligenza, si mostrava però talvolta molto quieto, inchinevole al sonno, ed era mestieri allora di scuoterlo, specie per somministrargli il cibo, che gustava poi molto e che digeriva fisiologicamente. Di questo tempo, il Domenichini parlava, chiamava la balia e la madre, allorquando poteva vederla, e si faceva ben intendere per aver ciò che desiderava. Non si reggeva però sulle gambe con sicurezza e non camminò speditamente che all' età di cinque anni, avendo preferito di andare carponi da un luogo ad un altro. Il suo corpo ciò non ostante si era svolto perfettamente ed era bene e proporzionatamente nutrito; notavasi soltanto, a bene esaminarlo, che la sua testa era più sviluppata e grande relativamente all' età sua, ma regolarmente conformata.

Una notte la balia fu d' improvviso svegliata da lamenti e da grida del fanciullo, che trovò acceso in viso dimenante il capo e si lagnava perchè forte gli doleva. Postagli accidentalmente una mano sul capo, notò la donna una forte pulsazione nel mezzo della testa e se ne impensierì fuori modo. Chiamato impertanto il Medico del luogo, questi dichiarò che il fanciullo aveva alta febbre ed era in preda ad un processo acuto delle meningi, e verificò pure ch' eravi spandimento di liquido entro il cranio, sicchè lo tenne come per ispacciato.

Apprestategli nulladimeno le necessarie cure a poco a poco il fanciullo s' ammansò, e riuscì prodigiosamente a superare la violenza del male. Rimase però intontito, parlava a stento, e difficilmente mostrava di conoscere le persone che l' attorniavano, compresa la madre sua, che avvertita del fatto, era accorsa presso di lui e l' assistette con grande amore.

La testa eragli di molto accresciuta durante la malattia e sua madre spezialmente annotò ben anco che dalla parte di sinistra aveva acquistata una prognazione, o rialzo considerevole, che dapprima non aveva certo. Fatto è, dico seguitando il racconto, che gradatamente il Domenichini ricuperò le forze, e sì da reggersi in piedi ed a camminare, ma di giorno in giorno rendevasi sempre più stupido, smemorato, quasi idiota. Trascorso un anno, ossia tra il quinto ed il sesto dell' età sua, fu compreso di nuovo e quasi all' improvviso da analogo accesso febbrile, accompagnato da intenso addoloramento al capo, seguito da delirio, indi da coma che durò, al dire sempre della madre, circa una quindicina di giorni.

Unica cura possibile fu l' applicazione del freddo al capo, con acqua e con ghiaccio, e così a mano a mano andò pur questa volta scemandosi il delirio, e l' infermo si riebbe sufficientemente, rimanendo però oggetto di compassione e di tristezza a chi lo guarda o lo avvicina in causa della mostruosità dell' enorme suo capo e della sua quasi ebetudine di mente. È notevole che nel suo idiotismo offre motivo a ritenersi che sia suscettibile anche di qualche delicato sentimento; ad esempio, mostra vergogna se lo si vuole denudare per pulirlo, cambiargli i panni, anche se queste pulizie sono a lui apprestate dalla stessa sua madre; non c' è caso che non si ritiri in luogo appartato per liberarsi dal soverchio peso del corpo o per altro che gli occorra. Tranne di fare un piccolo tragitto, sebbene ripetutamente insegnatogli, da solo non è capace di girare per la città e non ricorderebbe, nè saprebbe indicare ove dimora, nè ravvisare le strade che percorre, le quali gli sembrano sempre nuove. È docilissimo, buono e risponde abbastanza a segno sopra domande intorno cose relative ai comuni negozii della vita. Quando la madre lo invita a recitare le sue orazioni, il fa di buona voglia ed in parte le ricorda, ma di sovente fa d' uopo metterlo in via con qualche suggerimento. Al levarsi ed al tramontare del Sole si segna e dice tre Ave alla Vergine, una immagine della quale di continuo porta legata al collo entro un astuccio.

Non s' occupa di cosa veruna e passa le giornate elemosinando, sdraiato in terra, facendo giuocattoli con pietruzze, oppure pulendo pezzi di metallo; occupazione questa che predilige. Se qualche monello lo beffeggia, e pur troppo non è raro il caso, esso non s' inquieta, o cerca di vendicarsi, invece s' allontana quietamente e ricorre alla madre che quasi mai lo perde d' occhio.

A bella prova di sua imbecillità riporto qui puramente la seguente circostanza verificata da me e cioè: che dopo essersi prestato a porsi nelle pose che reputai le più adattate a far rimarcare le deformità del suo capo ed ottenuta dalla fotografia un bellissimo esemplare dell' intero suo corpo, avendogli io chiesto se distingueva chi era la persona fotografata, esso dopo averla ben bene guardata, la baciò dicendo ch' era *un bel Santolino*. E sì che davvero è proprio l' effigie sua ben meritevole di contrario epiteto.

Esposte in succinto le cose che ho fatto stima più dappresso riguardino le circostanze che debbono avere spiccatamente influito a determinare, secondo mio giudicio, la deformazione singolare del capo del Domenichini, passo a minutamente descriverne le particolarità tutte, con accuratezza studiate da me, insieme al ch.mo collega Prof. Cav. *Luigi Monti* (che mi fu sempre nelle precedenti antropologiche ricerche sapiente guida) nel Laboratorio Anatomico del nostro illustre e celeberrimo *Luigi Calori*.

Il Domenichini è alto centimetri 134, quindi in rapporto all' età che conta è alquanto piccolo, quasi di statura infantile. Dalla spalla poi, ossia dalla punta dell' acromio alla pianta del piede si misurano centimetri 105. La larghezza delle spalle dall' uno all' altro acromio è di centimetri 33. L' ampiezza del torace alla sua metà è di centimetri 81. (Il cuore pulsa regolarmente e così le arterie radiali al carpo. Pesato, è kilog. 45, 50).

Il suo corpo è abbastanza ben proporzionato e ciò ben risulta dagli esemplari fotografici che presento, dai quali tuttavia se ne deduce altra singolare anomalia, o quella del non lieve sviluppo delle parti generative, superiore alla regola generale. Posta anche questa osservazione perchè non mi sembrò fuori di proposito, intrapprendo la descrizione delle misure prese col compasso, o craniometro sulla testa del Domenichini.

Per esse si rilevò che dal mento al bregma contansi millimetri 252. Il diametro antero-posteriore è di 190; il bi-parietale 184; il bi-temporale 186; il frontale inferiore 151; il frontale superiore 180.

La circonferenza orizzontale misura 685 millimetri. (Dalle indagini quindi da me diligentemente praticate questa misura, almeno per quanto ne sò, è la maggiore delle conosciute e non è superata che dalla presa sul famoso CAPITONE descritto dal *Benvenuti* alla 43ª osservazione dei *Nova acta naturae curiosorum*, e ch' io ricordai nell' ultima mia Memoria dell' anno 1889, nella quale vi è detto che fosse di 1110 millimetri, val dire più di un metro).

Esaminata la faccia, trovammo che la sua altezza rispondeva a 144 millimetri; la distanza fra le orbite 48 millimetri. La distanza poi delle arcate zigomatiche è di 147 millimetri; notasi molto più sporgente il lato sinistro, mentre che il destro è quasi retto.

In quanto poi alla distanza fra gli angoli della mandibola questa ammonta a 102 millimetri, e fra le apofisi mastoidee 122 millimetri.

Notammo anche il diametro verticale del cranio essere di 174 millimetri, quantunque ben sapessimo che l' esatta misura di tale diametro non si potrebbe affermare con assoluta certezza se non sul teschio macerato, riflettendo noi che quasi invariabilmente corrisponde alla distanza che passa fra il meato uditivo esterno ed il vertice.

Altra cosa meritevole di essere notata si é che nel mezzo del parietale destro si sente una forte pulsazione e si avverte una fenditura longitudinale della lunghezza di cinque centimetri, la quale credo prodotta dalla grande distensione avvenuta, specie in forza del secondo violentissimo attacco infiammatorio delle meningi, susseguito da copioso versamento d' umore sieroso entro il cranio; distensione che addusse l' allontanamento delle ossa che lo compongono.

Tale a mio vedere la etiología dell' Idrocefalo acuto, come l' affermai nelle antecedenti mie pubblicazioni e lo riconfermo in appoggio anche della presente Storia clinica e vieppiù perché suffulta dall' autorevole appoggio di uno tra più dotti e valorosi Clinici viventi che nomineró concludendo.

Rilevammo, dico inoltre, irregolare l' arcata dentaria della mascella superiore e considerammo che sebbene l' infermo non sia strabico, pur tuttavia rimarcasi alquanto sporgente l' occhio sinistro e ció bene ravvisasi anche nelle bellissime fotografie che ho presentate (1), non che dalle figure litografate nella Tavola unita al presente comunicato.

Per non trascurare poi altro esame che nello stato attuale della Scienza si é reso indispensabile a chiarire la diagnosi delle malattie cerebrali, o l' oftalmologico (il quale ben di sovente vale anche al pronostico del loro iniziarsi, o ne rileva le avvenute conseguenze), riporto in questo luogo la esposizione delle cose osservate, insieme all' egregio collega ed amico Prof. Cav. *Vincenzo Gotti,* sugli occhi del mio macrocefalico.

Dall' esame esterno notasi che i due occhi sono molto più dell' ordinario discosti e distano l' uno dall' altro, dai due angoli interni sei centimetri e dodici dagli esterni. L' occhio sinistro é più sporgente del destro ed ha un volume maggiore; la consistenza peró dei due bulbi é normale. La visione é eguale nei due occhi, presa isolatamente; non é peró possibile la convergenza dello sguardo sopra un dato oggetto. Non esistono alterazioni della congiuntiva palpebrale e bulbare, e le cornee sono perfettamente trasparenti e presentano una curva normale. Le pupille sono *miotiche* e reagiscono imperfettamente alla luce.

---

(1) Le fotografie furono tutte eseguite dal valente fotografo Sig. *Alessandro Bongiorgi* che in Via Venezia tiene l' elegante e ben fornito suo Gabinetto.

Ora dell' esame oftalmoscopico od esame endoculare.

Al fine di poter esaminare il fondo dell' occhio, essendovi *miosi*, si dovette ricorrere alla dilatazione delle pupille coll' atropina.

Non si ebbe però una completa dilatazione, perchè esistono alcune *sinecchie posteriori*, conseguenza di pregresse iriti.

Queste per altro non impediscono che in parte i movimenti pupillari. I mezzi trasparenti sono normali e lasciano vedere il fondo oculare perfettamente.

La vascolarizzazione retinica è sufficiente, ma le papille dei nervi ottici sono pallide; locchè accennerebbe ad un incipiente processo atrofico dei nervi ottici. Vedonsi anche distintamente i vasi della coroide per atrofia del tappeto. La refrazione degli occhi è emmetropica.

Ricordata colla mia maggiore accuratezza la descrizione storica che potei procurarmi non che l' esame anamnestico del caso stupendo di Macrocefalia in individuo adulto e vivente, che Vi farò esaminare dopo la lettura di questa mia qualsiasi comunicazione; apprestato un minuto ragguaglio delle misure prese sul corpo di lui e particolarmente sul suo enorme capo, al fine di farne esattamente risultare le molte e speciali alterazioni; descritto pure il risultato dell'esame endo-oculare praticato, mi fo da ultimo a concluderne:

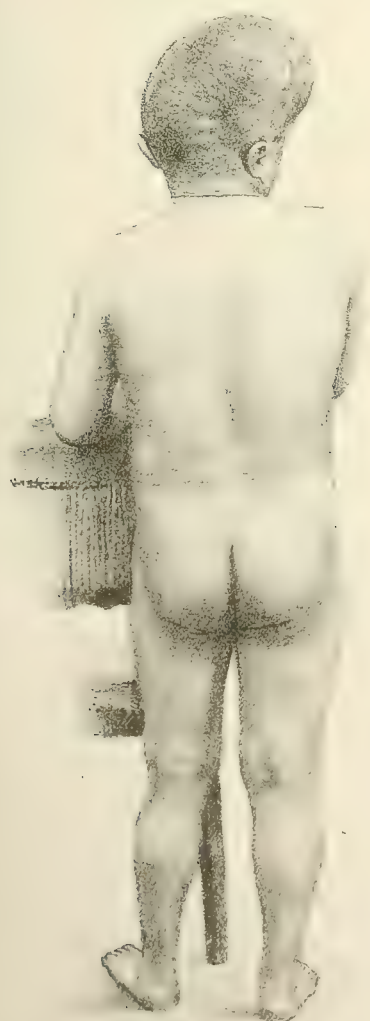
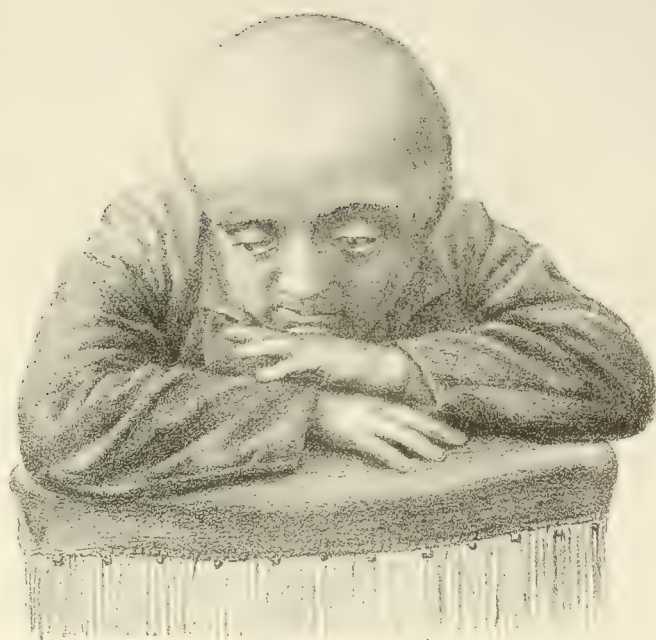
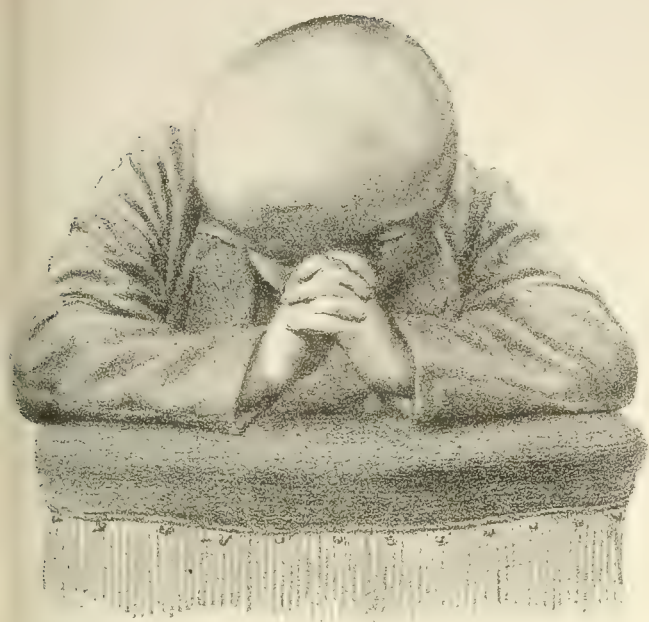
1° che questo ulteriore, singolarissimo caso clinico, supera tutti gli altri esemplari riportati nella mia Monografia, meno quello che citai del *Benvenuti*, nè ho notizie che altri ne abbiano osservati o descritti dei maggiori:

2° che riconferma le cose precipue che esposi, ed in particolare maniera l' eziologia ne rafferma, o quella che l' idrocefalo acuto determina la Macrocefalia, a seguito d' un processo infiammatorio che si sviluppa nelle meningi cerebrali, e fors' anche per raccolta di liquido nei ventricoli laterali che sono suscettibili, come afferma l' illustre *Strümpell* nel suo Trattato di Patologia generale, di una enorme dilatazione, e si riempiono di un *liquido idrocefalico* che sforza e dilata le pareti ossee e può dar luogo alle più svariate deformazioni del capo:

3° che lo stupendo esemplare che ho descritto rassoda tuttavia l'altro concetto da me già esposto, o quello: che processi infiammatorii analoghi ai descritti nelle precedenti mie pubblicazioni e nell' attuale, possono varie volte ripetersi sopra un medesimo individuo, ed ogni volta apportare un più considerevole ingrandimento del capo e ne ho apprestate le prove nelle relazioni dei fatti che ho potuto verificare io stesso:

4° che la macrocefalia non è soltanto propria dei bambini, ma può

svilupparsi in etá adulta, e produrre tale un cambiamento materiale del capo da alterarne profondamente le facoltá intellettuali e rendere questi infelici in un compassionevole stato d'idiotismo, distruggendo in essi la piú bella proprietá dell' uomo, o la ragione. Di fatto, anche per recenti studii, rimane addimostrato che pur troppo non sono infrequenti ad osservarsi nei Manicomii i casi di svariate forme di pazzie nei Macrocefalici.

lit. G. Wenk e Figli — Bologna.

NUOVO CASO

DI

MESO-RINO-SCHISI NELL' UOMO

OSSERVAZIONE

DEL PROFESSORE CESARE TARUFFI

(CON UNA TAVOLA)

(Letta nella Sessione del 7 Dicembre 1890).

Più volte avemmo la fortuna d' incontrarci in deformità avvertite dagli antichi e dimenticate dai trattatisti moderni, sebbene avessero una importanza scientifica non comune (1). Oggi pure possiamo riferire intorno ad una mostruosità assai singolare, quale è il naso diviso in due parti, che già era stata indicata da Borel nel 1670 e che non si trova ricordata nè da Is. Geoffroy Saint-Hilaire, nè da Förster, nè da Ahlfeld (2). Però noi non siamo i primi in questo secolo a fare tale osservazione, essendo già registrati altri tre fatti simili, la qual cosa, se nuoce alla novità, giova per iniziare lo studio dei caratteri della stessa alterazione.

Borel (3), come usava al suo tempo, dette la notizia in modo assai conciso ed imperfetto; difatto egli dice soltanto: *Hic inter monstra jungam, fabrum esse lignarium in Urbe Buch apud Normannos, qui nasus duos habet, seu nasum duplicem, quare vulgo vocatur Mauritius duorum nasorum.* Più esatta fu la descrizione data da Bidault de Villier nel 1821, da cui si desume chiaramente che il naso non era altrimenti doppio, ma diviso longitudinalmente sulla linea mediana; lo che fu poi confermato da Selenkost, da Bajardi ed oggi da noi, con questa differenza che una

---

(1) Nelle *Memorie della R. Accademia delle Scienze* (Serie IV), abbiamo già riferito un caso di *Perineo-melus* in un maiale (Tomo VI, 1884); due casi di *Diphallus* Gurlt nell'uomo (Tomo IX, 1889), ed un esempio nel vitello d' *Hypognatus antistrophus* (Tomo X, 1890).

(2) Borel Pietro — *Historiarum et observationum*, Francofurti 1670. Cent. III. Obs. 43 in fine pag. 231.

(3) L' osservazione di Borel ed un' altra assai dubbia di Bartholin non sfuggirono a Boyer, il quale anzi per i casi futuri consigliò l'intervento chirurgico: (*Traité des maladies chirurgicales*, Tomo V, pag. 48, Paris 1846: 5ª edit.) lo chè è stato eseguito da Bajardi.

metà del naso era spostata dalla propria sede. La rarità di queste fessure ci obbliga di riferirne succintamente le osservazioni e poscia di confrontare queste fra loro e con altre risguardanti parimenti la faccia onde tentare una interpretazione.

Osservazione 1ª — Bidault de Villiers: *Journal complémentaire* etc. Tomo X, pag. 183; Paris 1821.

L'autore vide un contadino in *Autun* dell'età incirca di 40 anni coll'apparenza d'un doppio naso; ma esaminandolo attentamente, s'accorse che era diviso nella linea mediana, e ciascheduna metà nel suo profilo era pressochè perpendicolare, cioè poco proiettata in avanti. Superiormente ambedue le metà si riunivano insieme descrivendo un piano inclinato, e discendendo divergevano lasciando fra loro una doccia che s'allargava a misura che s'allontanava dalla sua origine. Tale biforcazione sfigurava grandemente l'uomo veduto di faccia, mentre veduto di profilo la deformità era molto meno apparente. Quest'uomo non offriva alcuna altra deformità esteriore.

Osservazione 2ª — Selenkost A., medico a Pietroburgo: *Virchow's Archiv*, Bd. 95, S. 95; 1884.

Fu accolto nell'ospedale un contadino della Finlandia, dell'età di 34 anni, con edema acuto ai polmoni ed ai piedi. Egli presentava la metà destra del naso separata dalla sinistra, in forma di proboscide, che discendeva dal margine superiore ed interno dell'orbita corrispondente (V. Tav., fig. 1ª). La proboscide aveva all'estremità una piccola apertura che permetteva ad una sonda di giungere fino alla volta orbitale. Comprimendo la prima sgorgava un umore mucoso con bolle d'aria. Le palpebre a destra non si chiudevano, e nell'inferiore si vedeva un leggier ectropion ed una lacrimazione continua. La cornea era completamente opaca ed affetta da panno.

L'infermo morì 26 giorni dall'entrata nell'ospedale, con convulsioni seguite da coma. La necroscopia mostrò dilatazione dei vasi della piccola meninge con edema torbido, senza pseudo-membrane; lo stato rudimentale del bulbo olfattorio destro, ridotto alla lunghezza di 1 cent., mentre il chiasma era ben conformato. Nei ventricoli laterali del cervello era contenuto del siero incolore. Ambidue i polmoni si mostrarono in alto grado edematosi. L'apertura palpebrale del lato destro, più corta di 4 mill. di quella a sinistra, aveva la forma triangolare colla punta all'esterno, e colla base all'interno; questa era quasi verticale, lunga 1,1 cent. e costituita dal margine della palpebra superiore, piegata in basso. La tromba o proboscide nascondeva questo margine. (Nella figura si vede il margine di detta palpebra salire obliquamente dall'esterno verso l'interno sino al punto ove si curva per formare la base del triangolo. Disgraziatamente l'autore tace sui caratteri di questa base). Mancavano i punti lacrimali.

Il naso aveva il dorso assai depresso ed assimetrico, mancando della metà destra. La metà sinistra era completa e nella sua sede ordinaria, però invadeva alquanto l'altro lato, e presentava l'orificio di forma ovale disposto obliquamente. Dal lato destro della faccia non furono trovati nè l'osso nasale, nè il seno frontale, nè la cavità nasale, nè l'etmoide, nè la lamina cribrosa, nè il canal lacrimale (la fossa lacrimale era profonda e conteneva un piccolo sacco cieco). Mancavano inoltre l'antro d'Higmoro, il vomere, l'incisivo esterno coll'intermascellare corrispondente (V. fig. 2ª).

Osservazione 3ª — Bajardi Daniele, pediatra in Firenze: *Atti del XII Congresso* (Pavia 1888) Vol. I, pag. 171; Pavia 1888.

Bambina di 2 anni, in cui mancava la metà destra del naso. La metá sinistra era completa, col foro della narice leggiermente spostato a destra, in guisa che il filtro labbiale sembrava diretto verso il medesimo foro, e colla radice assai appianata, la quale distava dalla rima orbitale sinistra 9 mill. e dalla destra 23 mill. La respirazione era normale.

Il lato destro della faccia appariva meno sviluppato del lato sinistro, colla bozza frontale più piccola dell' omonima e colla linea anteriore d' inserzione dei capelli meno bassa che dall' altro lato (nella fotografia si vede una stretta e leggiera depressione nell' arco orbitale in corrispondenza dell' angolo interno delle palpebre, che ascende sulla fronte verso la linea mediana). Dal terzo interno dell' arco orbitale destro pendeva una tromba o proboscide che copriva in parte le palpebre (V. Tav., fig. 3ª), la quale nell'estremità libera aveva una piccola apertura circolare, da cui esciva un umore mucoso, e per questa si giungeva con uno specillo quasi fino alla radice della tromba. Quando la bambina piangeva, oppure coll' azione dell'ammoniaca, la tromba si contraeva e contemporaneamente si muoveva la metà sinistra del naso.

Sollevata la tromba si vedeva la palpebra inferiore affetta da notevole ectropion ed il globo oculare ridotto ad un piccolo moncone, in conseguenza di panoftalmite. Il sacco lacrimale era dilatato per dacriocistite cronica, ma non si potè riconoscere col tatto l'osso *unguis*. L' autore escise la tromba olfattiva ed ottenne l' unione della ferita per prima intenzione; nè tosto, nè in seguito fu avvertita alcuna difficoltà nella respirazione. Fatto poscia l'esame anatomico di detta proboscide, egli rinvenne tutti i tessuti che entrano nella composizione del naso.

(Dobbiamo ringraziare l' autore d' averci favorita la fotografia, che abbiamo riprodotta nella unita Tavola).

Osservazione 4ª — Taruffi Cesare: *Osservazione originale.* Vedi Tavola, fig. 4ª.

Rimase incinta per la terza volta una donna di 32 anni, ben conformata e sana, abitante l'alto Appenino bolognese, ed ebbe la gravidanza regolare sino al termine, senza alcun incidente, neppure momentaneo che la disturbasse, nulladimeno il 1° settembre 1890 mise in luce una bambina colla faccia deformata, mentre nel resto era floridissima, e che potemmo esaminare dopo 50 giorni mercè la cortesia del valente chirurgo Dott. Putti.

La deformità era data dalla divisione longitudinale del naso in due parti. La sinistra conservava la sede e la forma ordinaria, tranne che era appianata più del solito e l' orificio leggiermente spostato a destra, in guisa che il filtro labbiale ascendeva verso il medesimo. La cute del dorso di questa metà discendeva a destra per continuarsi con quella della gota vicina.

La parte destra del naso era convertita in una tromba mobile o proboscide, avvolta dalla cute, e nasceva sotto l' estremità interna del sopraciglio ed a contatto colla radice della parte sinistra. Essa era lunga 2 cent., più grossa nell' estremità libera (circonf. 4 ½ cent.), diretta in basso, ora obbliquamente in avanti, quando la testa della bambina era verticale o poggiata sull' occipite, ed ora piegata dal lato in cui si rivolgeva la testa. L' estremità libera della tromba presentava un incavo ellittico, lungo 5 mill., in cui si ripiegava la cute e nel fondo eravi un piccolo foro rotondeggiante da cui gemeva uno scarso umore mucoso contenente bolle d' aria, specialmente quando la bambina emetteva dei gridi. Al tatto la tromba offriva resistenza maggiore intorno all' estremità.

La fronte ed i due sopraccigli avevano la forma regolare, però questi distavano fra

loro 2 ½ cent., sicchè appariva la glabella alquanto più larga del solito. Sollevata la tromba si scuoprì all'angolo interno una tumefazione pallida grande come una lente, che compressa risvegliava dolore e rigurgitava dalla palpebra inferiore un umore denso cremoso; questa tumefazione per la sede fu giudicata il prodotto di una *dacriocistite*. Del pari infiammata era la caruncola lacrimale. La rima palpebrale destra era più corta di 3 mill. della sinistra e l'accorciamento si verificava nel canto interno. La palpebra inferiore aveva alla distanza circa di 3 mill. dal canto medesimo un coloboma in forma di V, assai ristretto, alto 3 ½ mill. Anche nel margine della palpebra superiore in corrispondenza del coloboma si vedeva una leggiera incisura. L'occhio destro non offriva altre modificazioni che d'essere leggiermente sporgente e leggiermente strabitico verso l'esterno (lo che al dire della madre sarebbe accaduto dopo avvenuta la tumefazione del sacco lacrimale). Il palato e la lingua non offrivano alcuna alterazione

Confrontando queste quattro osservazioni si rileva tosto che in tutte havvi una divisione del naso lungo la linea mediana con divaricamento fra le due parti, ma che solo nel caso di BIDAULT esse erano congiunte superiormente e disgiunte simmetricamente discendendo (lo che probabilmente si verificava ancora nel caso di BOREL), mentre negli altri tre casi una metà era rimasta in sede e l'altra più o meno allontanata, perdendo i rapporti colla prima, non solo alla base ma ben anche alla radice.

Nei tre esempi d'allontanamento d'una parte dall'altra si sono verificati due fenomeni che meritano considerazione, cioè la trasformazione della metà del naso in uno cilindro carnoso, e l'allontanamento di questa metà tutte le volte dal lato destro. I caratteri del cilindro carnoso erano i seguenti: esso pendeva al lato interno del margine orbitale (sia sopra, sia sotto), non raggiungeva la lunghezza della narice conservata in sede, si mostrava contrattile agli stimoli e mobile passivamente, era coperto dalla cute, offriva un orificio circolare alla sua estremità libera pel quale si penetrava in uno stretto canale mucoso, cieco nel suo fondo. Noi però non possiamo affermarlo nel nostro caso, avendo saputo che l'umore mucoso conteneva talora delle bolle d'aria.

Se ora cerchiamo la ragione della trasformazione d'una narice in un cilindro carnoso indipendente, dobbiamo avanti tutto avvertire che non è un fenomeno senza analogie, anzi dobbiamo considerarlo la ripetizione parziale d'una complicazione quasi costante nella ciclopia della specie umana. Difatto in questa apparisce sopra il globo oculare mediano (prodotto dalla fusione dei due occhi) una tromba o proboscide canalizzata, costituita da tutti i componenti della parete esterna del naso, meno le ossa, in guisa che niuno dubita trattarsi dell'accartocciamento della parete stessa, rimasta svincolata dalle parti vicine: lo che risulta dalla non interposizione del processo nasale del frontale fra le due prime branchie.

Che poi la tromba riscontrata nei tre casi in discorso non sia che la parziale ripetizione del fenomeno verificato nei ciclopi, viene confermato dal reperto anatomico, in quanto che tanto SELENKOST nel suo contadino

morto per edema pulmonale, quanto BAJARDI nella sua bambina operata felicemente, trovarono nel cilindro carnoso tutti gli elementi che avrebbero costituito la narice mancante. La ripetizione peró non é completa e non ha la stessa genesi, poiché nella ciclopia la tromba rappresenta le due narici, e qui una sola, e la dottrina che serve a spiegare l' origine della ciclopia qui non é applicabile, perché la metá normale é giá congiunta colla guancia e coll' intermascellare, lo che significa che nulla ha impedito la discesa e la interposizione fra le branchie della metá del processo nasale del frontale, mentre é d' uopo ammettere che vi fu una cagione che impedi l' interposizione dell' altra metá.

Tale cagione non ha poi agito con uniformitá in niuno dei quattro casi: difatto considerando gli effetti, questi offrirono differenze notevoli. Nell' osservazione di BIDAULT le due parti del naso distavano simmetricamente fra loro; nella nostra il cilindro eminasale era inserito sotto l' estremitá interna del sopraciglio ed a contatto (ma distinto) dalla radice della pinna normale. Nell' uomo di SELENKOST la tromba nasceva dal margine superiore ed interno dell' orbita corrispondente; e nella bambina di BAJARDI la tromba aveva origine dal terzo interno dell' arco orbitale.

E questo diverso effetto d' una azione tuttora ignota, risulta tanto piú evidente, notando che negli archivi della scienza vi sono altri esempi di fessure del naso. E senza ricordare quelle appena iniziate nella linea mediana del naso (1), avvertiremo che si sono dati non rari casi in cui la fessura era laterale, cioé divideva per metá una pinna nasale, e questa fessura ora rimaneva circoscritta, ed ora (ció é accaduto piú spesso) si continuava in basso col labbro leporino ed in alto (obbliquando) con una fessura della palpebra inferiore, ed allora si verifica uno dei modi di fessure ascendenti della faccia (2). Sé si pigliano in debita considerazione questi fatti puó indursi che la divisione mediana del naso non é che una nuova specie delle fessure di quest' organo. Se poi si rammenta che si danno altre fessure ascendenti dalla faccia senza ledere il naso, e che non offrono alcun' altra differenza dalle precedenti se non la sede, allora é anche permesso supporre che vi sia una causa d' egual natura capace di dividere la faccia in diverse direzioni.

Cercando qual sia cotesta cagione, noi non possiamo immaginare un arresto di sviluppo, sapendosi che esso mantiene disgiunte parti che dovevano congiungersi, o mantiene piccole le parti che dovevano crescere ulteriormente; ora questa dottrina non puó applicarsi ad alcuna delle divisioni

---

(1) V. TARUFFI — *Storia della Teratologia*, Tomo VI, pag. 292; 1891.
(2) IDEM — *Ibid.*, pag. 339.

suddette del naso, perchè il processo nasale del frontale presenta bensì un incavo nel suo margine libero, ma non è diviso nella totalità; e neppure può applicarsi a molte fessure della faccia, perchè queste non seguono sempre le linee di confine fra le parti embrionali costituenti la faccia, laonde bisogna cercare una causa esteriore che possa agire in diversa direzione e partire da punti diversi.

Questa cagione fu già intraveduta da STEFANO GEOFFROY SAINT-HILAIRE nel 1827, manifestando l'opinione che le aderenze e le briglie amniotiche possano produrre le ernie del capo: poscia la teoria fu dimostrata non solo in molte ernie, ma ancora in molte mutilazioni congenite degli arti, da permettere l'ipotesi che anche quando le aderenze erano scomparse, esse fossero state nulladimeno la causa della deformità. La stessa successione di fatti e di idee è accaduta rispetto alle fessure della faccia, essendosi trovati, alquanto tardi, esempi in cui frammenti d'amnion aderivano ancora alla fessura, ed un caso recente è fornito da GUÉNIOT e CHAVANE (1), laonde la teoria viene applicata con verosimiglianza anche a quelle divisioni della faccia, in cui non si rinvengano briglie. Ora faremo altrettanto per la divisione mediana del naso, tanto più che una metà era in tre casi più o meno spostata dalla sua sede naturale.

Queste tre osservazioni con tromba nasale offrivano un'altra particolarità, che merita d'essere presa in considerazione, e cioè che lo spostamento era a destra. Tale circostanza potrebbe far supporre che ciò fosse l'indizio d'una regola generale, ma se consideriamo per una parte che troppo pochi sono i fatti per concludere, e che d'altra parte la prevalenza del labbro leporino è invece a sinistra (HERMANN sopra 135 casi di *cheiloschisi unilaterale* ne trovò 87 a sinistra), e che dal numero finora cognito di fessure della faccia non si rileva alcuna prevalenza nè da un lato nè dall'altro, siamo inclinati a non dare per ora importanza alla circostanza suddetta.

Finalmente ricorderemo, che in tutte tre le osservazioni era alterata la palpebra inferiore corrispondente al lato del cilindro olfattivo, poichè in due casi vi era *ectropion*, e nel nostro vi era un *coloboma* vicino all'angolo interno dell'occhio. In quanto all'*ectropion* congenito possiamo ricordare che è una affezione rarissima (2), recentemente confermata due volte da TALKO che la vide associata a microftalmo (come notò v. AMMON), e da cisti sotto la congiuntiva (3); ora in niuno dei due fatti da noi citati fu avvertito il microftalmo, nè alcun altra circostanza causale, laonde non

(1) GUÉNIOT e CHAVANE — *Bulletins de la Soc. Anatomique de Paris*, Serie V, Tomo III, pag. 613; Tomo. IV, pag. 137; 1890.

(2) MANZ in Freiburg — *Handbuch der gesammten Augenheilkunde*, Bd. II, S. 112; Leipzig 1875.

(3) TALKO — *Extrait des Congrès périodiques internationales d' Ophtalmologie*, 1880.

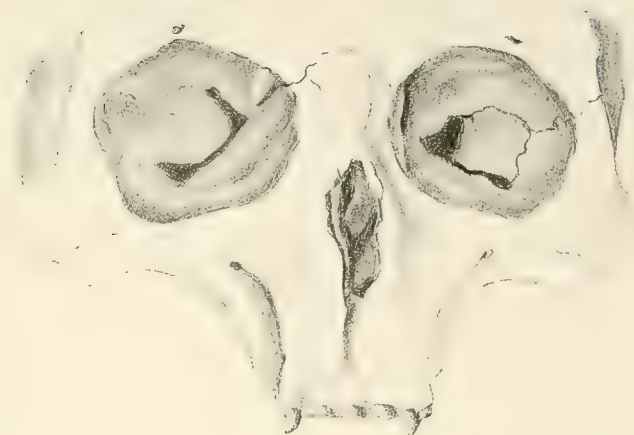
Fig. 1

Fig 2

Fig. 3

Fig 4

V. Contoli, lit

lit. G. Wenk e Figli – Bologna.

possiamo azzardare alcuna interpretazione. Non è così rispetto al *coloboma* palpebrale della nostra bambina, avendo VAN DUYSE fornito sufficienti prove per ritenere la divisione congenita della palpebra l'effetto di briglie amniotiche (1), lo che per noi è un argomento per supporre che anche la divisione del naso sia stata prodotta dalla stessa causa; soltanto non possiamo spiegare il meccanismo, cioè decidere se una sola briglia abbia diviso i due organi, oppure vi siano state due aderenze vicine ma distinte, lo che forse è più probabile.

(1) VAN DUYSE — *Annales de la Soc. de méd. de Gand*, Tomo 60, pag. 205; 1882.

DELLE SUPERFICIE ALGEBRICHE

CHE HANNO POTENZA

IN RISPETTO A OGNI PUNTO DELLO SPAZIO

OVVERO

IN RISPETTO AD ALCUNI DEI LORO PROPRII PUNTI

MEMORIA

DEL

Prof. FERDINANDO PAOLO RUFFINI

(Letta nell'Adunanza delli 7 Dicembre 1890).

Una curva piana algebrica (C^m) dell'ordine m riferita a due assi delle x e delle y coordinati ortogonalmente in un punto qualsivoglia del suo piano sia rappresentata dall'equazione.

$$f(x, y) = 0,$$

a termini razionali e intieri con coefficienti reali, e per *membro supremo* dell'equazione s'intenda la somma de' suoi termini di grado m rispetto alle variabili x e y. Per un punto qualsivoglia o *polo* che nomineremo O di coordinate x_0 e y_0 conducasi una retta (p) la quale intersecherà la curva (C^m) in m punti; si indichino con $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ le distanze dal polo O di ciascuno degli m punti comuni alla retta e alla curva e si faccia il prodotto

$$\pi = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_m.$$

Se il polo O non è un punto della curva e il prodotto π riesce indipendente dalla direzione della retta (p), variando soltanto al variare delle coordinate x_0 e y_0 del polo, la curva *ha potenza* in rispetto ai punti del suo piano, intendendo per *potenza della curva* in un dato punto il valore che acquista il prodotto π quando si prende per polo quel punto.

Se poi il polo $O(x_0, y_0)$ è un punto della curva, la retta (p) incontrerà la curva stessa in altri $m-1$ punti; e se si indichino con $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{m-1}$

le loro $m-1$ distanze dal polo O e si ponga

$$\pi = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_{m-1},$$

può accadere che per uno o più punti in numero finito della curva (C^m) il prodotto π_1 riesca indipendente dalla direzione della retta (p), e allora la curva *ha potenza* in rispetto a tali punti, intendendo per *potenza della curva* in ciascuno di essi il valore, in generale diverso da punto a punto, che vi acquista il prodotto π_1.

In un altro scritto (*) ho dimostrato che fra le curve (C^m) hanno potenza in rispetto a ogni punto del loro piano quelle soltanto che essendo d'ordine pari $m = 2k$ sono rappresentate da un' equazione col suo membro supremo della forma

$$a_0(x^2 + y^2)^k;$$

e hanno potenza in rispetto a uno o più dei loro proprii punti quelle soltanto che essendo d'ordine dispari $m = 2k + 1$ sono rappresentate da una equazione col suo membro supremo della forma

$$a_0(ax + by)(x^2 + y^2)^k,$$

e i punti in rispetto ai quali esse hanno potenza sono quelli ne' quali la tangente la curva è parallela all'assintoto reale della curva stessa.

Si possono fare ricerche analoghe circa le superficie algebriche. Suppongasi pertanto una superficie (S^m) che riferita a tre piani yz, zx, xy coordinati ortogonalmente in un punto qualsivoglia dello spazio sia rappresentata da un'equazione algebrica di grado m

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

a termini razionali, intieri, con coefficienti reali, e per membro supremo dell'equazione s'intenda la somma u de' suoi termini di grado m rispetto alle variabili: sarà u della forma

$$\begin{aligned} u(x,y,z) = {} & a_{0,0}x^m + (a_{1,0}y + a_{01}z)x^{m-1} + (a_{2,0}y^2 + a_{1,1}yz + a_{0,2}z^2)x^{m-2} + \cdots \\ & + (a_{n,0}y^n + a_{n-1,1}y^{n-1}z + \cdots + a_{1,n-1}yz^{n-1} + a_{0,n}z^n)x^{m-n} + \cdots \\ & + a_{m,0}y^m + a_{m-1,1}y^{m-1}z + \cdots + a_{1,m-1}yz^{m-1} + a_{0,m}z^m. \end{aligned} \tag{2}$$

(*) V. *Delle curve piane algebriche che hanno potenza ecc.* nel T. X della S. IV di queste Memorie, pp. 337-350.

Per un punto qualsivoglia o polo $O(x_0, y_0, z_0)$ dello spazio, ma che non appartenga alla superficie, si conduca una retta (p), e si rappresentino con α, β, γ i coseni degli angoli che essa fa cogli assi delle x, delle y, delle z rispettivamente: si indichino con $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ le distanze dal polo di ciascuno degli m punti nei quali la retta (p) incontra la superficie (S^m) e si faccia il prodotto

$$3) \qquad \pi = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_m :$$

si dirà che la superficie *ha potenza* in rispetto al polo O se il prodotto π riesca indipendente dalle quantità α, β, γ e sia perciò identicamente

$$4) \qquad \frac{\partial \pi}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \pi}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \pi}{\partial \gamma} d\gamma = 0 .$$

Se invece il polo $O(x_0, y_0, z_0)$ è un punto della superficie (S^m), la retta (p) incontrerà la superficie stessa in altri $m-1$ punti, e se si indichino con $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{m-1}$ le loro distanze dal polo O e si ponga

$$5) \qquad \pi_1 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_{m-1} ,$$

si dirà che la superficie *ha potenza* in rispetto a quel suo punto se riesca π_1 indipendente dalle quantità α, β, γ e quindi identicamente

$$6) \qquad \frac{\partial \pi_1}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \pi_1}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \pi_1}{\partial \gamma} d\gamma = 0 .$$

Nell' uno e nell' altro caso per *potenza della superficie* nel supposto punto O s' intenderà il valore che relativamente a tal punto acquista il prodotto π, ovvero il prodotto π_1, secondo che il punto non appartiene, ovvero appartiene, alla superficie.

Si vedrà nei capitoli (I) e (II) come possano essere adempite le condizioni (4) e (6) rispettivamente: qui ricordiamo soltanto che se x, y, z sono le coordinate particolari di uno dei punti comuni alla retta (p) e alla superficie (S^m) e se ρ è la distanza di tal punto dal polo O, si ha, qualunque sia questo polo e ritenute le denominazioni precedenti.

$$7) \qquad x = x_0 + \alpha\rho , \quad y = y_0 + \beta\rho , \quad z = z_0 + \gamma\rho .$$

I.

Il polo O sia un punto dello spazio non appartenente alla superficie.

Dall'equazione (1) e col mezzo della (7) si eliminino le variabili x, y, z, e si otterrà per equazione risultante

$$8)\quad f(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right)_0^{(1)}\rho + \frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right)_0^{(2)}\rho^2 + \cdots$$
$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdots m}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right)^{(m)}\rho^m = 0,$$

nella quale lo zero al piede delle parentesi vuol dire che, dopo fatte le operazioni indicate simbolicamente e secondo la solita convenzione dall'indice superiore, si deve nei risultamenti sostituire le x_0, y_0, z_0 alle x, y, z.

Le distanze $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ sono le m radici dell'equazione (8), ond'è (3)

$$9)\quad \pi = (-1)^m \frac{f(x_0, y_0, z_0)}{\frac{1}{1\cdot 2\cdots m}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right)^{(m)}}$$

Il prodotto π riuscirebbe nullo indipendentemente dai valori α, β, γ se fosse $f(x_0, y_0, z_0) = 0$, cioè se il punto O appartenesse alla superficie: essendo già stato escluso questo caso, affinchè il prodotto π riesca indipendente dalla direzione della retta (p), dovendo essere adempita la condizione (4), dovrà essere identicamente nullo il differenziale totale del denominatore della frazione (9). È poi manifestamente

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdots m}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right)^{(m)} = u(\alpha, \beta, \gamma),$$

cioè, il denominatore della frazione (9) è eguale all'espressione che si ottiene col sostituire nel valore (2) della u alle x, y, z le α, β, γ, ed è anche

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1\,;$$

perciò la condizione richiesta sarà espressa dal sistema delle due equazioni

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial u}{\partial \beta}d\beta + \frac{\partial u}{\partial \gamma}d\gamma = 0, \quad \alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma = 0,$$

delle quali è facile dedurre che dovrà essere

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial \alpha}}{\alpha}=\frac{\frac{\partial u}{\partial \beta}}{\beta}=\frac{\frac{\partial u}{\partial \gamma}}{\gamma}:$$

da queste due derivano le equazioni seguenti:

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial \alpha}}{\alpha}=\frac{\frac{\partial u}{\partial \alpha}\alpha+\frac{\partial u}{\partial \beta}\beta+\frac{\partial u}{\partial \gamma}\gamma}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2},$$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial \alpha}}{\alpha}=\frac{\frac{\partial u}{\partial \alpha}d\alpha+\frac{\partial u}{\partial \beta}d\beta+\frac{\partial u}{\partial \gamma}d\gamma}{\alpha d\alpha+\beta d\beta+\gamma d\gamma}=\frac{d\,u(\alpha,\beta,\gamma)}{\frac{1}{2}d(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)},$$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial \alpha}\alpha+\frac{\partial u}{\partial \beta}\beta+\frac{\partial u}{\partial \gamma}\gamma}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}=\frac{d\,u(\alpha,\beta,\gamma)}{\frac{1}{2}d(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}:$$

essendo u funzione omogenea del grado m rispetto alle variabili α, β, γ, è anche

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}\alpha+\frac{\partial u}{\partial \beta}\beta+\frac{\partial u}{\partial \gamma}\gamma=m\,u(\alpha,\beta,\gamma),$$

e l'equazione ultima precedente si trasforma nella

$$\frac{d\,u(\alpha,\beta,\gamma)}{u(\alpha,\beta,\gamma)}=\frac{m}{2}\frac{d(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2};$$

integrando e indicando con C la costante dell'integrazione

$$u(\alpha,\beta,\gamma)=C(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{\frac{m}{2}}:$$

il valore della costante si determina coll'avvertire che per $\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=0$ deve riuscire $u(1,0,0)=a_{0,0}$; è dunque

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdots m}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\alpha+\frac{\partial f}{\partial \beta}\beta+\frac{\partial f}{\partial \gamma}\gamma\right)^{(m)}=u(\alpha,\beta,\gamma)=a_{0,0}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{\frac{m}{2}}=a_{0,0}.$$

Questo risultamento dimostra che il membro supremo dell'equazione (1) della superficie (S^m) dovrà essere della forma

$$u(x, y, z) = a_{0,0}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{m}{2}},$$

e per conseguenza essere m numero pari; dovrà, cioè, essere

$$10) \qquad m = 2k, \quad u = a_{0,0}(x^2 + y^2 + z^2)^k,$$

e quando queste condizioni sieno adempite, la superficie avrà potenza in rispetto a qualsivoglia punto (x_0, y_0, z_0) dello spazio e la potenza della superficie in quel punto sarà espressa da

$$11) \qquad \pi = \frac{1}{a_{0,0}} f(x_0, y_0, z_0),$$

onde: *una superficie algebrica* (1) *ha potenza in rispetto a ogni punto dello spazio se è superficie d'ordine pari* $m = 2k$ *e il membro supremo della sua equazione è della forma* (10), *e allora la potenza della superficie in un punto qualsivoglia* (x_0, y_0, z_0) *è data dalla formula* (11). (*)

Abbiasi ad esempio una sfera (S) di raggio r riferita a tre piani coordinati ortogonalmente nel suo centro.

$$(S) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

e α, β, γ sieno le coordinate di un punto O scelto ad arbitrio nello spazio, e pongasi per brevità

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = d^2:$$

la quadrica (S_1) rappresentata dall'equazione

$$S_1) \qquad (d^2 - r^2)(x^2 + y^2 + z^2 - r^2) - 2(\alpha x + \beta y + \gamma z - r^2)^2 = 0$$

ha contatto colla sfera (S) in una linea, la quale è pure linea di contatto della sfera stessa colla superficie conica che le è circoscritta e ha il proprio centro nel punto O: inoltre la sfera (S) e la quadrica (S_1) sono *quadriche conjugate,* hanno, cioè, la proprietà che il piano polare rispetto a

(*) È manifesto che se una superficie ha potenza in rispetto a ogni punto dello spazio, qualsivoglia sezione piana della superficie è una curva che ha potenza in rispetto a ogni punto del proprio piano.

una di esse, riguardata come quadrica fondamentale, di un punto qualsivoglia dell'altra è piano tangente quest' ultima quadrica.

Essendo il punto O arbitrario, l'equazione (S_1) dimostra che il numero delle quadriche conjugate con una sfera data è triplamente infinito. Ad ogni punto $O(\alpha, \beta, \gamma)$ dello spazio corrisponde una delle quadriche (S_1), la quale tocca la sfera in una circonferenza circolare, che è la intersecazione della sfera stessa col piano

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - r^2 = 0,$$

cioè col piano polare del punto O sì in rispetto alla sfera (S) come in rispetto alla quadrica (S_1); perciò si suol dire che il punto O è il *polo del contatto*, e il piano polare del punto O è il *piano del contatto* delle due quadriche conjugate.

Le equazioni che determinano il centro (X, Y, Z) della quadrica (S_1) corrispondente del punto (α, β, γ) sono

$$(d^2 - r^2 - 2\alpha^2)X - 2\alpha\beta Y - 2\gamma\alpha Z + 2r^2\alpha = 0,$$
$$-2\alpha\beta X + (d^2 - r^2 - 2\beta^2)Y - 2\beta\gamma Z + 2r^2\beta = 0,$$
$$-2\gamma\alpha X - 2\beta\gamma Y + (d^2 - r^2 - 2\gamma^2)Z + 2r^2\gamma = 0,$$

dalle quali si deduce

$$X = \frac{2r^2}{d^2 + r^2}\alpha, \quad Y = \frac{2r^2}{d^2 + r^2}\beta, \quad Z = \frac{2r^2}{d^2 + r^2}\gamma.$$

Cerchiamo ora il luogo dei poli del contatto di quelle fra le quadriche (S_1) che hanno per centro un punto di una data superficie sferica

$$S_2) \qquad (X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 = R^2.$$

Sostituendo nell'equazione (S_2) i precedenti valori delle X, Y, Z, e ponendo per brevità

$$m^2 = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$$

risulta l'equazione

$$S^4) \qquad m^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 + 2r^2(m^2 - 2(a\alpha + b\beta + c\gamma - r^2))(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$
$$- 4r^4(a\alpha + b\beta + c\gamma) + m^2r^2 = 0:$$

il luogo è dunque una quartica (*) che ha potenza in rispetto a ogni punto dello spazio.

Se la sfera (S_2) passasse per l'origine delle coordinate, che è il centro della sfera (S), si avrebbe

$$m^2 = a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = 0,$$

e la quartica (S^4) si risolverebbe nel piano all'infinito, e nella superficie del 3° ordine

$$S^3) \qquad (a\alpha + b\beta + c\gamma - r^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + r^2(a\alpha + b\beta + c\gamma) = 0,$$

la quale, come vedremo, ha potenza in rispetto ad alcuni de' suoi proprii punti soltanto.

Un altro esempio ci è offerto dalla superficie canale che è l'inviluppo di una sfera di raggio r il di cui centro percorre una circonferenza circolare di raggio r_1.

Pongasi l'origine delle coordinate ortogonali nel centro della circonferenza di raggio r_1 e si faccia coincidere l'asse delle z coll'asse di questa circonferenza. Le equazioni della circonferenza e della sfera saranno

$$a) \qquad x_1^2 + y_1^2 = r_1^2, \quad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2 = r^2$$

rispettivamente. Da queste si deduce differenziando

$$x_1 dx_1 + y_1 dy_1 = 0, \quad (x - x_1)dx_1 + (y - y_1)dy_1 = 0$$

e quindi

$$xy_1 - yx_1 = 0,$$

equazione che combinata colla prima delle (a) somministra i valori

$$x_1 = \pm \frac{r_1 x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad y_1 = \pm \frac{r_1 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}:$$

sostituendo nella seconda delle (a) e liberando dai radicali, si ottiene l'equazione dell'inviluppo

$$(x^2 + y^2 + z^2 - r^2 + r_1^2)^2 - 4r_1^2(x^2 + y^2) = 0,$$

(*) La quartica è superficie di rivoluzione, e asse di rivoluzione è la retta $\alpha:\beta:\gamma = a:b:c$.

il membro supremo della quale è

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 ;$$

l'inviluppo è dunque una quartica che ha potenza in rispetto a ogni punto dello spazio.

In generale, sia una curva algebrica piana rappresentata dalle equazioni

$$C^{2k}) \qquad z = 0, \quad (x^2 + y^2)^k + \varphi_{2k-s}(x, y) = 0, \quad s \geq 1 :$$

la curva avrà potenza in rispetto a ogni punto del suo piano. L'equazione

$$(x^2 + y^2 + z^2)^k + \varphi_{2k-s}(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0, \quad s \geq 1,$$

rappresenterà una superficie di rivoluzione, in generale dell'ordine $4k$, che ha per asse l'asse delle x e per meridiano la curva (C^{2k}), e tal superficie avrà potenza in rispetto a ogni punto dello spazio (*).

II.

Suppongasi ora che il polo $O(x_0, y_0, z_0)$ sia un punto della superficie (S^m).

In questo caso il primo termine dell'equazione (8) è identicamente nullo, l'equazione stessa liberata dal fattore ρ riducesi alla

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right)_0^{(1)} + \frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right)_0^{(2)}\rho + \cdots$$
$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdots m}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right)^{(m)}\rho^{m-1} = 0,$$

e il valore (5) del prodotto π_1 è espresso da

$$12) \qquad \pi_1 = (-1)^{m-1} \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right)_0^{(1)}}{\frac{1}{1\cdot 2\cdots m}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right)^{(m)}} .$$

(*) Si potrebbe dimostrare che per asse della superficie di rivoluzione si può scegliere una retta ad arbitrio nel piano della curva (C^{2k}).

Il prodotto π_1 riuscirebbe nullo in que' punti della superficie, le coordinate dei quali rendessero

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 = 0:$$

facendo astrazione da questi punti singolari, che una superficie può avere, dovremo cercare se vi possano essere altri punti della superficie che presi come polo rendano il prodotto π_1 indipendente dalle quantità α, β, γ; e da prima esamineremo se questa proprietà possa essere comune a *tutti* i punti di una superficie.

Perchè il prodotto π_1 riuscisse indipendente dalla direzione della retta (p) qualunque fosse il punto (x_0, y_0, z_0) della superficie che si prendesse per polo, dovrebbe per la (6) essere

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right)^{(m)} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 d\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 d\beta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 d\gamma\right]$$
$$- \left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right)_0 d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right)^{(m)} = 0,$$

ovvero

$$\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right)^{(m)} d\alpha - \alpha d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right)^{(m)}\right\}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$$
$$+ \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right)^{(m)} d\beta - \beta d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right)^{(m)}\right\}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$$
$$+ \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right)^{(m)} d\gamma - \gamma d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right)^{(m)}\right\}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 = 0:$$

perchè questa equazione fosse soddisfatta in tutti i punti della superficie dovrebbe risultare

$$\frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right)^{(m)}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right)^{(m)}} = \frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{d\beta}{\beta} = \frac{d\gamma}{\gamma} = \alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma = 0,$$

e per conseguenza

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right)^{(m)} = \text{costante}$$

ciò che manifestamente non si può ammettere. Ciò dimostra che *una superficie algebrica non può avere potenza in rispetto a tutti i suoi punti.*

Si assegnino alle coordinate x_0, y_0, z_0 del polo O valori che rendano nullo il resto della divisione

$$13)\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right)^{(m)}:\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right)_0^{(1)},$$

cosicché risulti

$$u(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{1}{1\cdot 2\cdots m}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right)^{(m)}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right)_0^{(1)}V(\alpha,\beta,\gamma),$$

essendo $V(\alpha,\beta,\gamma)$ un polinomio algebrico, razionale, intiero, omogeneo e del grado $m-1$ rispetto alle variabili α, β, γ, vale a dire della forma

$$14)\quad V(\alpha,\beta,\gamma)=b_{0,0}\alpha^{m-1}+(b_{1,0}\beta+b_{0,1}\gamma)\alpha^{m-2}+(b_{2,0}\beta^2+b_{1,1}\beta\gamma+b_{0,2}\gamma^2)\alpha^{m-3}+\cdots$$
$$+b_{m-1,0}\beta^{m-1}+b_{m-2,1}\beta^{m-2}\gamma+\cdots+b_{1,m-2}\beta\gamma^{m-2}+b_{0,m-1}\gamma^{m-1}:$$

sarà allora

$$15)\qquad \pi_1=\frac{1}{V(\alpha,\beta,\gamma)}$$

e il membro supremo dell'equazione (1) avrà la forma

$$16)\qquad u(x,y,z)=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 z\right]V(x,y,z).$$

La condizione necessaria e sufficiente affinché il prodotto π_1 riesca indipendente dalla direzione della retta (p) è così ridotta alla condizione che l'equazione

$$\frac{\partial V}{\partial\alpha}d\alpha+\frac{\partial V}{\partial\beta}d\beta+\frac{\partial V}{\partial\gamma}d\gamma=0$$

sia soddisfatta per identità. Si è veduto precedentemente (I) che ciò non può avvenire se non sia $m-1$ numeri pari e per conseguenza la superficie (S^m) d'ordine dispari $m=2k+1$, e sia inoltre il polinomio V della forma

$$V(\alpha,\beta,\gamma)=C(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^k,$$

queste condizioni dovranno dunque essere adempite affinchè la superficie abbia potenza in rispetto ad alcuni de' suoi propri punti.

Per determinare la costante C si osservi che il polinomio $V(\alpha, \beta, \gamma)$ è il quoziente della divisione indicata nella formula (13), che il primo termine di questo quoziente è

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0} a_{0,0} \alpha^{m-1}$$

e che per $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ il quoziente stesso si riduce al coefficiente del suo primo termine; è dunque

$$C = \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0} a_{0,0}, \quad V(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0} a_{0,0}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^k,$$

il membro supremo dell'equazione (1) diventa (16)

$$17) \quad u(x, y, z) = \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0} a_{0,0} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 z\right](x^2 + y^2 + z^2)^k,$$

e la formula (15) si riduce alla

$$18) \quad \pi_1 = \frac{1}{a_{0,0}} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 .$$

La formula (17) dimostra che l'equazione di una superficie algebrica che ha potenza in rispetto a uno o più dei suoi punti (fatta astrazione da certi punti singolari, che la superficie può avere come sopra si è detto) è di grado dispari $2k + 1$ e si può ridurre alla forma

$$19) \quad \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 z\right](x^2 + y^2 + z^2)^k + \varphi_s(x, y, z) = 0, \quad s \leq 2k,$$

rappresentando $\varphi_s(x, y, z)$ un polinomio algebrico razionale intiero di grado s: perciò la superficie ammette un solo cono assintotico reale del 1.^{mo} ordine (piano assintotico), che avrà un equazione della forma

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - a) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - b) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 (z - c) = 0,$$

e k coni assintotici immaginarii del 2.do ordine, che avranno equazioni della forma

$$(x-a_i)^2+(y-b_i)^2+(z-c_i)^2=0.$$

L'equazione

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 z=0$$

è quella di un piano tangente la superficie (S^m) nel polo (x_0, y_0, z_0) e parallelo altresì al piano assintotico reale della superficie stessa: se dunque si assume a polo (x_0, y_0, z_0) uno qualunque di quei punti della superficie nei quali il piano tangente è parallelo al piano assintotico reale, la superficie avrà potenza in rispetto a tal punto, ossia *la superficie ha potenza in rispetto a ognuno di quei suoi punti ne' quali il piano tangente è parallelo al piano assintotico reale della superficie;* onde: *una superficie algebrica ha potenza in rispetto a uno o più de' suoi punti, se è superficie d'ordine dispari $2k+1$ e il membro supremo dell'equazione che la rappresenta è della forma* (17), *e in questo caso la superficie ha potenza in rispetto a ognuno di que' suoi punti nei quali il piano tangente è parallelo al piano assintotico reale della superficie stessa; e la potenza della superficie in ciascuno di tali punti è data dalla formula* (18).

Raccogliendo i risultamenti di questo e del precedente capitolo si può conchiudere: *Fra le superficie algebriche quelle soltanto che sono d'ordine pari $2k$ e rappresentate da un'equazione col suo membro supremo della forma*

$$a) \qquad a_0(x^2+y^2+z^2)^k$$

hanno potenza in rispetto a ogni punto dello spazio; e quelle soltanto che sono d'ordine dispari $2k+1$ e rappresentate da un'equazione col suo membro supremo della forma

$$b) \qquad a_0(ax+by+cz)(x^2+y^2+z^2)^k$$

hanno potenza in rispetto a uno o più dei loro punti, e questi sono i punti di contatto della superficie con ciascuno dei piani tangenti paralleli al piano assintotico reale della superficie.

Per esempio si immagini il fascio delle sfere che hanno comune un circolo dato, e i coni che avendo tutti il loro centro in uno stesso punto o polo O sono circoscritti ciascuno a una delle sfere del fascio di sfere.

Il luogo delle linee di contatto dei coni colle sfere è una superficie del 3.° ordine della quale si può trovare l'equazione nel modo seguente.

Si prenda per asse delle x la retta luogo dei centri delle sfere e si ponga l'origine delle coordinate in quel punto A di quest'asse nel quale si projetta ortogonalmente il polo O: il piano xy contenga questo polo, cosicchè le coordinate del polo stesso sieno $x=0$, $y=h$, $z=0$, essendo l'asse delle z perpendicolare agli altri due: dicasi a la distanza dell'origine delle coordinate dal piano del circolo comune alle sfere del fascio e b il raggio di questo circolo.

L'equazione di quella sfera del fascio che ha il suo centro a una distanza x_1 dall'origine A delle coordinate è

$$(x-x_1)^2+y^2+z^2=(x_1-a)^2+b^2,$$

e quella di un piano condotto pel punto O a contatto colla sfera

$$(x-x_1)X+y(Y-h)+zZ=0:$$

le coordinate del punto di contatto debbono soddisfare le due equazioni

$$(x-x_1)^2+y^2+z^2=(x_1-a)^2+b^2, \quad (x-x_1)x+y(y-h)+z^2=0:$$

eliminando da queste la x_1 si ottiene l'equazione del luogo cercato

$$20) \qquad (x-2a)(x^2+y^2+z^2)+(a^2+b^2-2hy)x+2hay=0,$$

rappresentante una superficie del 3.° ordine che passa per l'origine delle coordinate, pel polo O, contiene la circonferenza circolare comune alle sfere del fascio, e ha per coni assintotici i coni

$$x=2a, \quad x^2+(y-h)^2+z^2=0,$$

il primo reale del 1.^{mo} ordine (piano), il secondo immaginario del 2.^{do} ordine col centro reale nel polo O: il piano assintotico reale ha inoltre comune colla superficie la retta

$$21) \qquad x=2a, \quad y=\frac{a^2+b^2}{h}$$

nella quale si intersecano tutti i piani rappresentati dall'equazione

$$(2a-X)x_1+hY=a^2+b^2,$$

cioè tutti i piani polari del punto O in rispetto alle sfere del fascio.

Le sezioni fatte nella superficie da piani paralleli al piano assintotico reale sono circoli che hanno i loro centri nell'iperbola equilatera

$$(x-2a)(y-h)=ah, \quad z=0;$$

e la sezione fatta dal piano $z=0$ è la cubica ciclica

$$22) \qquad (x-2a)(x^2+y^2)+(a^2+b^2-2hy)x+2hay=0,$$

luogo dei punti di contatto delle rette uscenti dal polo O nel piano $z=0$ coi circoli del fascio di circoli che nel piano medesimo passano pei due punti $x=a$, $y=\pm b$. (*)

Poichè il membro supremo dell'equazione (20) è della forma (b), la superficie ha potenza in rispetto a que' suoi punti nei quali il piano tangente è parallelo al piano assintotico reale. Le coordinate di questi punti debbono soddisfare le equazioni

$$23) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2(x-2a)y-2(x-a)h=0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}=2(x-2a)z=0:$$

per mezzo della prima di queste eliminando la y dall'equazione (20) nella quale si dovrà anche porre $z=0$ a cagione della seconda, risulta

$$24) \qquad (x-2a)^2x^2+(a^2+b^2)(x-2a)x-h^2(x-a)^2=0.$$

Il sistema di queste equazioni (23) e (24) determina quattro punti in rispetto a ciascuno dei quali la superficie ha potenza. Questi punti sono quegli stessi quattro punti in rispetto ai quali ha potenza la cubica rappresentata dall'equazione (22) (**): due di essi sono sempre reali; gli altri due sono immaginarii se è $b^2>0$, sono reali coincidenti se è $b^2=0$, sono reali distinti se è $b^2<0$, cioè b quantità immaginaria.

Può tuttavia accadere che una soluzione delle equazioni (23) e (24) in luogo di un punto determini nella superficie una linea: così nel caso particolare

$$h=0$$

(*) Cfr. l. c. p. 347.
(**) l. c. pag. 347-350.

nel quale il polo O coincidendo coll'origine delle coordinate viene ad essere un punto della linea dei centri delle sfere, la superficie diventa superficie di rivoluzione intorno all'asse delle x, e una delle radici dell'equazione (24) è

$$x = 2a,$$

cui corrisponde non un punto ma la linea reale all'infinito della superficie: se poi si avverte che anche la retta rappresentata dall'equazione (21) si porta sulla superficie a distanza infinita, si riconoscerà che la linea reale all'infinito della superficie diventa in questo caso una linea di flesso, ossia luogo dei punti di flesso di tutti i meridiani, e si può ammettere che la superficie abbia potenza in rispetto a ogni punto di tal linea e la potenza sia l'infinito (∞^1).

Quando è $b = 0$, qualunque sia la h, la sezione circolare della superficie fatta dal piano $x = a$ si riduce a un punto, che nomineremo P; le sfere del fascio sono tutte a contatto fra loro in questo punto, che diventa un punto singolare della superficie nel quale la potenza della superficie è *zero:* e infatti i piani tangenti la superficie nel punto P sono rappresentati dall'equazione

$$y^2 + 2\frac{h}{a}(x - a)y + z^2 - (x - a)^2 = 0,$$

che è l'equazione di una superficie conica del 2.do ordine col suo centro nel punto P e che interseca il piano $x = 0$ in una circonferenza circolare che ha il proprio centro nel polo O. La superficie conica è simmetrica rispetto al piano $z = 0$ nel quale le due generatrici rette della superficie sono ad angolo retto l'una coll'altra: perciò quando il polo O è un punto dell'asse delle x e la superficie (20) è superficie di rivoluzione, anche la superficie conica diventa di rivoluzione coll'angolo al centro retto.

Un altro esempio si ha nella superficie rappresentata dall'equazione

$$S^3) \qquad (a\alpha + b\beta + c\gamma - r^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + r^2(a\alpha + b\beta + c\gamma) = 0,$$

mentovata precedentemente (I). L'equazione del piano assintotico reale è

$$25) \qquad a\alpha + b\beta + c\gamma - r^2 = 0;$$

se pertanto si rappresenti con f il primo membro dell'equazione (S^3), i punti (α, β, γ) della superficie in rispetto ai quali questa ha potenza do-

vranno adempire le condizioni

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}{a}=\frac{\frac{\partial f}{\partial \beta}}{b}=\frac{\frac{\partial f}{\partial \gamma}}{c};$$

avendosi

$$\frac{1}{a}\frac{\partial f}{\partial \alpha}=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+r^2+2(a\alpha+b\beta+c\gamma)\frac{\alpha}{a},$$

$$\frac{1}{b}\frac{\partial f}{\partial \beta}=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+r^2+2(a\alpha+b\beta+c\gamma)\frac{\beta}{b};$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial \gamma}=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+r^2+2(a\alpha+b\beta+c\gamma)\frac{\gamma}{c},$$

le due precedenti equazioni si riducono alle

26) $$\frac{\alpha}{a}=\frac{\beta}{b}=\frac{\gamma}{c};$$

le quali dimostrano che i punti in rispetto ai quali la superficie ha potenza sono i tre punti nei quali essa è incontrata da una retta condotta per l'origine delle coordinate perpendicolarmente al piano assintotico (25). Le ascisse di questi punti sono le tre radici dell'equazione

$$(a^2+b^2+c^2)\alpha^3-ar^2\alpha^2+a^2r^2\alpha=0$$

che risulta dall'eliminazione delle variabili β e γ dall'equazione (S^3) mediante le (26): uno di questi punti è l'origine delle coordinate, nel quale la potenza della superficie è

$$\pi_1=\frac{1}{a}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)_0=r^2.$$

La superficie (S^3) è superficie di rivoluzione intorno alla retta (26). Ciò si riconosce immediatamente se, come si può fare senza nuocere alla generalità della questione, si suppone sia

$$b=0, \quad c=0:$$

l'equazione della superficie prende allora la forma più semplice

$$(a\alpha - r^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + ar^2\alpha = 0$$

e si rende manifesto che l'asse delle x è asse di rivoluzione e inoltre che il meridiano della superficie è una curva

$$\gamma = 0, \quad (a\alpha - r^2)(\alpha^2 + \beta^2) + ar^2\alpha = 0,$$

che ha potenza in rispetto a ciascuno di que' suoi punti nei quali la tangente è parallela all'asse delle y.

Più generalmente sia una curva algebrica piana

$$C^{2k+1}) \qquad z = 0, \quad ax(x^2 + y^2)^k + \varphi_{2k-s}(x, y^2) = 0, \quad s \geq 0,$$

simmetrica rispetto all'asse delle x e che ha potenza in rispetto a ciascuno di que' suoi punti nei quali la tangente è parallela all'asse delle y: l'equazione

$$S^{2k+1}) \qquad ax(x^2 + y^2 + z^2)^k + \varphi_{2k-s}(x, y^2 + z^2) = 0, \quad s \geq 0$$

rappresenterà una superficie di rivoluzione intorno all'asse delle x e che ha per meridiano la curva (C^{2k+1}), e la superficie avrà potenza in rispetto a ognuno di quei suoi punti ne' quali il piano tangente è parallelo al piano $x = 0$.

APPLICAZIONE DI NUOVI CRITERII

PER LA

CLASSIFICAZIONE DELLE PIANTE

QUARTA MEMORIA

del Prof. FEDERICO DELPINO

(Letta nella Sessione del 16 Novembre 1890).

§ 33. Canoni della dottrina filogenetica applicabili alla classificazione delle piante.

Per quanto la gran maggioranza dei botanici odierni abbia fatto adesione alla dottrina della trasformazione delle specie proposta da La Mark e Darwin, ben pochi fin qui si adoperarono ad applicarne i principii per una migliore classificazione delle piante superiori, e quei pochi, convien dirlo, non sempre furono felici nel rintracciare ed esporre i relativi schemi genealogici. Sovente anzi proposero serie genealogiche affatto inammessibili, anzi con ordine inverso a quello che presumibilmente ebbe luogo in natura.

Cotali incongruenze radicarono in molti la convinzione che nello stato attuale della scienza sia vana fatica quella di ricercare le origini delle specie, e i gradi della loro reciproca affinità e parentela. Si vuol bandire affatto dal campo della scienza positiva ogni speculazione filogenetica, negando ad esse un valore assoluto objettivo. Sono, dicesi, mere opinioni personali, soggette a variare a tenore delle diverse menti dei naturalisti, e si vuole escludere ogni disputa, ogni discussione intorno alle medesime.

Che cosa molti intendano per scienza positiva io non so bene. Ciò che ben comprendo si è che, dato il caso che una speculazione filogenetica colpisca il vero, la scienza che essi battezzano per positiva riuscirebbe a una parziale negazione del vero: diventerebbe negativa.

Ma è poi vero che le conclusioni della dottrina filogenetica non possano avere valore objettivo giammai? Questo per me non credo. I canoni della dottrina filogenetica che ordino ed espongo nelle seguenti pagine avreb-

bero per me un valore reale e positivo, perchè in parte scaturiscono dalla considerazione di fenomeni naturali quali oggidì si presentano a noi, in parte derivano da ragionamenti, che sono fondati sui fatti, e quindi poco oppugnabili.

Questo essendo il primo tentativo di tal genere fin qui proposto, stimo invocare per esso la benigna considerazione dei naturalisti; ben fortunato se potrò sollevare su tale importante argomento quella feconda e lata discussione che tanto vale a dissipare o diminuire le tenebre delle nostre ignorazioni.

I canoni che qui espongo sono ventotto. Potrebbero essere assai più, ma ho voluto restringermi ai principali.

1. Ogni gruppo naturale di piante equivalente a genere, o tribù o famiglia, qualora sia ottimamente costituito, vanta assoluta unicità d'origine. Discende da una forma archetipa, comparsa in determinato tempo e spazio, la quale, quand'anco oggidì non fosse più rappresentata da individui viventi o fossili, resta però sempre contemplabile dalla visione teorica. Questa forma doveva in sè potenzialmente comprendere i caratteri che poi si sono evoluti nelle diverse e divergenti sue stirpi.

Non credo che si possano muovere serie objezioni contro l'accettazione di tal canone. Chi si è approfondito alquanto nello studio morfologico di singole famiglie o tribù o generi di piante, deve aver constatato, che, malgrado le molteplici divergenze di caratteri presso le singole stirpi, per altro domina in tutte una conformità nel piano della struttura organica, massimamente nell'architettonica florale, da dover ammettere per tutte la discendenza da un archetipo comune.

L'unica eccezione che si potrebbe sollevare riguarderebbe quelle famiglie o quelle tribù o quei generi che constano di elementi abbastanza eterogenei, meno facilmente riducibili a un tipo strutturale unico. Ma senza dire che pochi vi sono di cosifatti gruppi eterogenei, tale eccezione finalmente colpirebbe non la teorica filogenetica, ma l'inabilità dei tassonomi, che male costituirono quei gruppi, mentre avrebbero dovuto scinderli in più famiglie, o tribù o generi.

2. Tutte le specie di ogni singolo gruppo naturale, oggidì viventi, poichè sono coetanee, devono essere considerate come collaterali, non già mutuamente collegate da vincoli di ascendenza o discendenza.

Ma se sono coetane oggidì, non ne segue che tutte siano egualmente antiche ed egualmente distanti dalla forma archetipa. Dalle più antiche e più conformi al tipo originario alle più recenti e distanti da detto tipo, è illimitato il numero delle specie intermediarie.

3. Tutti i generi di un dato gruppo naturale di piante oggidì rappresentati, sebbene possano comecchè coetanei, essere considerati collaterali

tra di loro, pure, poichè ogni genere comprende non solo le specie oggidì viventi, ma, teoricamente, quelle eziandio che vissero nell'epoche trascorse, possono già fornire argomento di ricercare i loro rapporti reciproci di ascendenza e discendenza.

Ma non bisogna perdere di vista che per produrre una plausibile rappresentazione di detti rapporti, occorrerebbe che nessuno dei generi fosse estinto e scomparso. Questa eventualità per altro è di troppo rara occorrenza, per cui gli schemi genealogici delle forme generiche riescono per lo più assai difficili ed ipotetici. Non ostante in mancanza di meglio vi si deve acconciare.

4. I gruppi naturali di piante superanti la comprensione dei generi, vale a dire le tribù di una famiglia, le famiglie di una coorte, benchè sotto un aspetto debbono considerarsi collaterali, perchè rappresentate da individui oggidì coetanei, pure per solito si prestano con lata e sufficiente base alle speculazioni sui loro mutui rapporti di parentela; e con tanto maggiore probabilità di colpire il vero, in quanto che rappresentano una continuità di forme; locchè non possono fare i gruppi di minor comprensione come sarebbero i generi. Infatti se in ogni famiglia o tribù, la maggior parte delle forme generiche è senza dubbio scomparsa, a fronte dei pochi generi residuali, la stessa cosa non si può dire nè delle tribù di una famiglia, nè della famiglia di una coorte, delle quali forme non dovettero scomparire dalla terra salvo che pochissime: di tal guisa che restano evidenti tutti i gradini della scala di evoluzione, e resta possibile la estensione d'un fiducievole schema genealogico.

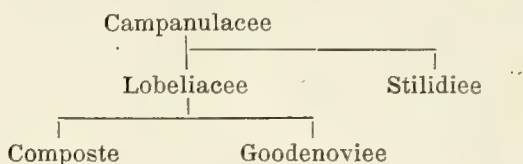
A chiarimento di questo e del precedente canone voglio addurre alcuni esempi pratici.

Consideriamo la famiglia delle apocinee (*latiori sensu* quale venne ottimamente proposta da Ant. Lor. De Jussieu e forse inopportunamente scissa in due famiglie da Rob. Brown). Il volere elucubrare uno schema genealogico pei numerosissimi (superstiti) generi che oggidì la rappresentano, oltre essere opera di grande difficoltà, è in ogni caso sottoposta a troppe incertezze d'ipotesi. Laddove lo schema genealogico delle sue principali tribù (o sottofamiglie) non lascia guari possibilità di dubitazione, ed esprimesi come segue.

Apocinee
|
Periplocee
|
Secamonee
|
Asclepiadee

Infatti le periplocee sono intermedie tra le apocinee e le secamonee;

le secamonee tra le periplocee e le asclepiadee. Come forse in altro lavoro dimostreremo, il curioso apparecchio pollinigero delle asclepiadee è spiegato da quello delle secàmonee; quello delle secamonee da quello delle periplocee; quello delle periplocee da quello delle apocinee.

Così pure è facilmente dimostrabile la serie genealogica

Ma molto meno dimostrabile sarebbe uno schema genealogico, il meglio escogitato, relativo ai generi compresi in ciascuna di dette famiglie.

5. È lecita in ogni caso l'indagine della relativa antichità delle specie nei singoli generi, dei generi nelle singole tribù o famiglie. Siffatta indagine è la base degli schemi filogenetici, ed è una base razionale e inoppugnabile.

6. L'antichità relativa delle specie d'un genere, dei generi d'una famiglia, delle famiglie d'una coorte si desume dalla considerazione comparata dei loro caratteri morfologici, specialmente di quelli che hanno una spiccata significazione biologica. Quindi è che la biologia, ossia lo studio della vita di relazione nelle piante fornisce uno dei più importanti criterii per l'ottima classificazione dei vegetali.

7. I caratteri delle piante, di qualsiasi ordine, morfologico cioè, biologico, anche fisiologico, istologico e perfino chimico, altri sono continuativi, altri neomorfici, altri saltuarii. È indispensabile saper discernere gli uni dagli altri. I caratteri continuativi sono quelli che effettuano la fissità, la immutazione, l'identità tipica delle singole specie, dei singoli generi, tribù e famiglie. I caratteri neomorfici segnano l'inizio d'un nuovo lignaggio, d'una stirpe nuova. I caratteri saltuari segnano una risurrezione di forme ataviche. I caratteri neomorfici poi sono positivi o negativi. È caso di neomorfosi positiva l'assunzione di caratteri non posseduti nè dai padri nè dagli avi. È caso invece di neomorfosi negativa la eliminazione dei caratteri posseduti dai genitori. Le specie, i generi, le tribù, le famiglie segnati da neomorfosi negativa, sono lignaggi depauperati e ridotti.

Tutti i caratteri differenziali, che singolarizzano le specie, i generi, le tribù, le famiglie, sono in fondo altrettante neomorfosi positive o negative, assunte a un dato momento nel tempo, in un dato punto nello spazio. Diventano caratteri continuativi nella successione delle generazioni, e possono a loro volta essere eliminate, dando luogo allora a neomorfosi negative secondarie.

8. I caratteri omologhi, nei singoli gruppi naturali di piante, altri sono (relativamente) antichi, altri postumi. Guidati dalla esperienza dei fatti odierni, e mediante applicazione d'un rigoroso ragionamento, siamo abilitati a discernere i caratteri antichi da quelli di recente e postuma acquisizione.

9. Poste a paragone le attuali stirpi affini, si manifestano per solito due casi. In un primo caso la maggioranza dei caratteri antichi scorgesi coadunata in alcune di esse, e la maggioranza dei caratteri postumi nelle rimanenti. È legittimata allora la conclusione che le prime sono forme primigenie, e le seconde forme secondogenite derivate dalle primigenie.

10. Ma frequentissimo é pure l' altro caso, dove in tutte le stirpi affini poste a confronto, appariscano distribuiti e frammisti, sovente in pari misura, caratteri antichi e caratteri postumi.

Questa occorrenza che a prima vista pare implichi una contradizione inconciliabile colla teorica della evoluzione; poi, ben pensando, si risolve nel probabile fatto che doveva in altra epoca esistere una forma prototipica, oggidi estinta, la quale in sè riuniva tutti i caratteri antichi, che nell'epoca attuale si veggono spartiti nelle diverse stirpi da essa generate.

Attesa la eccezionale importanza di questo canone, giovi addurre alcuni esempi pratici.

Si pongano a confronto i generi *Ranunculus* e *Caltha*. Il primo ha un carattere antico nella presenza de' suoi petalo-nettarii, unito al carattere postumo dei carpidii monospermi. Il genere *Caltha* per contrario ha un carattere antico ne' suoi carpidii polispermi e follicolari, unito al carattere postumo dell' aborto dei petalo-nettarii.

Ció importa che le due forme siano discendenti da una stirpe prototipica fornita e di petalo-nettarii e di carpidii follicolari polispermi. Per sorte questo prototipo forse esiste ancora oggidi ed é il genere *Trollius* (1).

11. Prima operazione d' un tassonomo filogenista é di costituire ottimamente i generi, le tribù, le famiglie, in modo che sia rigorosamente eliminata ogni forma estranea.

In tutti i rappresentanti poi dei singoli gruppi deve accuratamente studiare tutte le variazioni dei caratteri omologhi, e per alcune almeno, se non per tutte, rendersi ragione della teoretica loro evoluzione.

In ogni gruppo per solito si danno uno o più caratteri variabili, i quali prestano il fianco a una fondata induzione sulla successione ed evoluzione

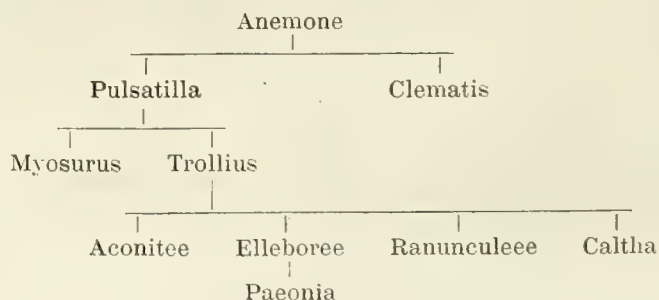
(1) Anche i generi *Helleborus*, *Eranthis*, *Isopyrum*, *Nigella* ed altri sono provvisti di carpidii follicolari e di petalo-nettarii. Ma abbiamo accordato al genere *Trollius* la primazia per altre ragioni che qui sarebbero fuori di posto.

delle loro varianti. È chiaro che questa evoluzione è uno specchio di quella delle forme del gruppo.

12. Assai sovente nei gruppi naturali ben circoscritti, anche in quelli nei quali la struttura fiorale è più monotona, si scorge qualche organo dotato d'una somma plasticità e variabilità. La disquisizione filogenetica deve principalmente rivolgersi allo studio delle variazioni di quest'organo. Si possono citare ad esempio le crucifere e le ombrellifere. La struttura dei loro fiori è eccessivamente monotona, ma i frutti sviluppano una grande ricchezza di forme diverse.

13. Meglio ancora se queste varianti, a vece che d'ordine morfologico, siano d'ordine biologico, e implichino una complicata rete di rapporti biologici con esseri svariati. In tal caso, poichè si può avere una esatta conoscenza delle loro cause finali, con maggiore certezza si può stabilire uno schema razionale della loro evoluzione. Sovente l'organo in questione, per entro alla circoscrizione medesima del gruppo che si studia, ha la sua nascita, i suoi sviluppi, le sue degenerazioni ed abolizioni, segnando così certissime epoche nella evoluzione del gruppo.

È calzante l'esempio del petalo-nettario nella famiglia delle ranuncolacee. Non esiste nei generi *Clematis* ed *Anemone*. Fa la sua prima comparsa nel genere *Pulsatilla*, ove gli stami delle quattro o cinque circonvoluzioni esterne modificano l'antera in un organo nettarifero. Quest'organo si perfeziona nei generi *Trollius* e *Myosurus*, ove riceve la forma d'una piccola laminetta, munita nella sua pagina superiore d'una foveola nettarifera. Da questo punto iniziale quest'organo prende due diversi svolgimenti. O questa foveola nettarifera sempre più si rende profonda fino al punto da commutarsi in speroni nettariferi, caratterizzando così i generi *Aquilegia*, *Aconitum*, *Delphinium*; oppure dal margine opposto alla lamina sviluppa una escrescenza ligulata, in modo da costituire i bicchieri nettariferi proprii dei generi *Helleborus*, *Eranthis*, *Nigella*, *Isopyrum*, e le unghie nettarifere proprie dei petali di *Ficaria*, *Ranunculus*, *Ceratocephalus*. Finalmente quest'organo è abolito in alcuni generi, per es. *Caltha* e *Paeonia*.

Veggasi pertanto quanta importanza le modificazioni d'un organo unico abbiano nella storia dell'evoluzione delle ranuncolacee. Esse da sole giustificano il seguente schema genealogico

che abbraccia già una gran parte dei generi di detta famiglia.

14. In alcune famiglie, tribù e generi di piante l'apparecchio florale, sovente assai complicato, a seguito di successivi multilaterali adattamenti, presenta ricchissima serie di variazioni. Qui le variazioni si attuarono, non in un organo soltanto, come nei casi sopra contemplati, ma in tutti gli organi dell'apparecchio. Così si hanno molti dati utili a comporre un'ottima teorica della genealogia del gruppo.

Se nella maggior parte delle famiglie cotesti complicati apparecchi non esistono, non poche per altro sono di essi fornite. Citiamo le apocinee (*latiori sensu*), le orchidee, aroidee, aristolochiacee, passifloracee, onagrariacee ed altre. Nel genere *Lilium* vi sono per lo meno quattro diverse modificazioni dell'apparato florale. Svariati pure sono gli apparati florali nei generi *Ribes*, *Erica*, *Tropaeolum* ed altri.

Utili per la loro variabilità sono pure presso qualche famiglia gli apparecchi della fruttificazione e disseminazione, per altro in un grado assai minore dei florali.

15. Nei singoli gruppi di piante affini posto a fronte il carattere della schizofillia con quello della gamofillia, si ha un valido criterio per giudicare della relativa antichità o modernità delle stirpi schizofille o gamofille. Ma questo criterio vuol essere adoperato con gran discernimento, per evitare il pericolo d'incorrere in false conclusioni.

Non vi ha dubbio che, generalmente parlando, la schizofillia è un carattere antico e la gamofillia un carattere postumo: ma qualche volta, contemplato il fenomeno in singole stirpi, accade l'opposto.

Conviene distinguere due sorta di schizofillia, la primaria e la secondaria. La primaria è un carattere antichissimo, primigenio. La secondaria è un carattere postumo. Le piante colpite dalla schizofillia secondaria discesero da piante gamofille.

Nei pteridofiti già notammo come, dominando assoluta la schizofillia nella massima parte delle famiglie (filicine, ofioglossee, licopodiacee), l'equisetacee siano caratterizzate da una generale gamofillia, dando a divedere di essere discendenti da una filicina schizofilla.

Lo stesso fenomeno si ripete identicamente nelle gimnosperme ove le gamofille gnetacee divergono dalle schizofille cicadee, salisburiee e conifere. La posteriorità delle gnetacee è confermata pure dalla consociazione di molti altri caratteri postumi.

Presso le fanerogame la schizofillia nelle foglie di vegetazione è un fenomeno frequentissimo. Appena si contano poche eccezioni (nel genere *Chlora* tra le genzianaceè, *Sylphium* tra le eliantee). Cotal gamofillia è certamente un carattere postumo; tanto più che qui non trascende gruppi di comprensione generica. Può per altro in qualche caso estendersi a

famiglie intiere, quali sarebbero le silenee e le mesembriantemee. Anzi questa concordanza in un carattere tanto raro é per me non lieve indizio della stretta affinità che collega dette due famiglie. E nel caso che si dessero stirpi alternifogliate, le quali per altri caratteri si palesassero discendenti da esse, si avrebbe allora un fenomeno di schizofillia secondaria. Anche nelle dipsacee si ha una gamofillia persistente.

I caratteri antagonisti, schizofillia e gamofillia, possono darsi nelle brattee delle infiorescenze. Citiamo ad esempio i generi *Lonicera* ed *Euphorbia*. Resta per questi aperta l'indagine se la loro schizofillia bratteale sia primigenia o secondaria.

Quest' antagonismo si dà pure non infrequentemente nei calici di piante affini. In generale la gamofillia calicina é un carattere postumo. Ma la schizofillia del calice nelle convolvulacee, poiché queste sono correlate con parecchie famiglie aventi calice gamofillo (solanacee, boraginee, idrofillee ecc.), é verisimilmente secondaria e postuma.

Notevoli sono le varianti nel perigonio delle asfodelee. In alcuni generi i filli sono liberi (*Allium* ecc.), in altri sono uniti (*Hyacinthus, Muscari* ecc.). È verisimile che qui si tratti di gamofillia secondaria, poiché nei gruppi affini predomina la schizofillia perigoniale.

La gamofillia corollina é pure per solito un carattere postumo. A testimonianza di ciò sta l' intiero gruppo delle corolliflore che rispetto alle dicotiledoni schizopetale ed apetale sono piante di posteriore formazione ed evoluzione.

Ma nel gruppo delle corolliflore quà e colà si danno esempi di generi o specie aventi corolla schizofilla. Questi sono certamente casi di schizofillia secondaria. Spettabile esempio n'é offerto dalla famiglia delle oleacee. Appartenendo queste alle corolliflore, la gamofillia corollina (nei generi *Syringa, Ligustrum, Olea*) é carattere prototipico. Per lo che nel genere *Picconia* tanto affine all'*Olea*, la scissione in due della corolla quadripetala é carattere posteriore. Ed é poi carattere affatto postumo la completa schizofillia della corolla nel genere *Ornus*.

Anche nel gruppo predominato dalle campanulacee si é in varie stirpi conseguito il carattere della schizofillia corollina secondaria. Già questo fenomeno é preannunciato da un caso teratologico osservato nelle campanule, ove i cinque petali sono completamente liberi gli uni dagli altri. Nelle lobeliacee e goodeniacee infatti il tubo corollino é scisso unilateralmente per tutta la sua lunghezza, in guisa che la corolla ne riesce appianata e ligulata. Lo stesso fenomeno si é reso continuativo in una gran parte delle composte. Così nelle cicoriacee la corolla in tutti i flosculi é ligulata, e soltanto le corolle del raggio nelle asteree, senecionee, eliantee, calendolacee, artotidee.

La evoluzione degli androcei subisce analoghe fasi. Quando gli stami presentano adelfie, generalmente si tratta di carattere posteriore. Ma nelle ipericinee schizostemoni tale schizofillia deve essere secondaria, perchè la maggior parte delle specie presentano adelfie staminali.

È soggetto a dubbia interpretazione il comportarsi delle papiglionacee. Nella maggior parte delle specie domina l' adelfia staminale. L' *Anagyris foetida* ed altre podaliriee hanno invece dieci stami liberi. Verisimilmente questa libertà è prototipica, perchè rannoda le cesalpinee alle papiglionacee.

Finalmente anche rispetto ai ginecei è frequente nelle singole famiglie l' alternarsi di carpidii schizofilli e gamofilli. Questi ultimi allora quasi sempre suppongono un carattere postumo. Così tra le elleboree, il genere *Nigella* mostra di essere una forma postuma; locchè è confermato da altri caratteri, per esempio dalla singolare perfezione ed elaborazione dei petalonettarii e dell' apparecchio staurogamico intiero (tipo perambulatorio).

Assai rara sembra essere la schizofillia carpidiale di acquisizione postuma. Forse è il caso delle colchicacee, presso le quali il pistillo schizocarpico è verisimilmente derivato dal pistillo sincarpico delle gigliacee.

Anche le stipule presentano fenomeni analoghi di libertà e di aderenza. La libertà suol essere un carattere anteriore e l' aderenza un carattere posteriore. Così il *Melianthus major* che ha stipule aderenti vuol essere considerato come una forma posteriore al *M. minor* che ha stipule libere.

Ma talvolta è la libertà stipulare che si presenta come carattere secondario. Di ciò abbiamo un lucido esempio in più specie di *Rubia* e di *Gàlium,* ove le stipule, che nelle altre rubiacee sono più o meno saldate, si veggono libere, ed oltre ciò elaborate in guisa da emulare una lamina fogliare. Egli è per questo che tutta intiera la tribù delle stellate vuol essere considerata di postuma formazione di fronte alle altre tribù delle rubiacee.

Parimente le foglie composte vogliono essere, nei singoli gruppi di piante, considerate come forme posteriori alle foglie semplici. Ma non bisogna perdere di vista potersi dare anche il caso che una foglia composta ridiventi semplice per fusione laterale di foglioline (prenunziata già da frequenti casi teratologici). Questo verisimilmente accade nella famiglia delle rosacee, presso cui la foglia semplice delle amigdalee (e quella fors' anche delle pomacee) a più segni esprimerebbero una contrazione di foglia composta. Domina infatti nella famiglia il carattere delle foglie composte giusta il tipo pinnato (nelle rosee, sanguisorbee, rubee, driadee, e nel genere *Sorbus* delle stesse pomacee).

16. Più significativi ancora sono i caratteri delle aderenze d' un organo coll' altro nel senso radiale. Infatti queste, in confronto delle aderenze tangenziali considerate nel paragrafo precedente, con maggiore difficoltà si

assumono, e una volta che sieno assunte con maggior difficoltà si depongono. Queste aderenze pertanto debbono quasi sempre indicare un' acquisizione postuma. Di quattro sorta sono. L' una è quella incontrata dagli stami coi petali e sepali efficiente i diversi gradi di periginia; l' altra è quella contratta dagli stami col tubo corollino, caratteristica delle corolliflore. In terzo luogo abbiamo quella complicazione di fusioni radiali di tutti i fillomi florali, efficienti l' ovario cosidetto infero o aderente, e in quarto luogo, in piante ad ovario infero, l' aderenza dei filamenti cogli stili, efficiente il fenomeno della ginandria.

La periginia è un carattere che suole avere una grande costanza, estendendosi a intere famiglie e qualche volta a gruppi di famiglie. In tesi generale, considerato il suo antagonismo colla ipoginia, si rivela come un' acquisizione postuma. Ma in qualche stirpe procedente da un archetipo perigino può eventualmente obliterarsi la periginia, dando così luogo a una ipoginia secondaria. Le papiglionacee sono perigine, ma l' intero gruppo delle genistee è, per ragione biologica (obliterazione dell' apparato nettarifero), diventato ipogino. Così dalle ramnacee perigine dovettero verisimilmente procedere le ampelidee e non viceversa. Si potrebbe citare qualche altro caso analogo.

Costante è pure il carattere dell' ovario infero, e non solo persevera inalterato in singoli generi e in singole tribù, ma spesso domina assoluto, per intere famiglie, come accade per esempio nelle coorti capitanate dalle araliacee, dalle campanulacee, dalle musacee. Ma in qualche famiglia esso alterna coll' opposto carattere dell' ovario libero, come si vede nelle ninfeacee, nelle gesneriacee, nelle sassifragacee. Anzi nel genere *Saxifraga* abbiamo specie ad ovario supero, specie ad ovario infero e specie di transizione cioè ad ovario semisupero. È verisimile che nel caso delle ninfeacee e gesneriacee, le specie superovariate siano prototipiche rispetto alle inferovariate. E forse la stessa cosa è per le sassifragacee.

Più costanti che mai sono i caratteri della epicorollia e della ginandria, e una volta assunti non sono più deposti. Almeno per ora non rammento nessun caso certo di siffatta deposizione. Adunque si tratta di caratteri sempre postumi. Così le sapotacee, mirsinee, primulacee mostrano di essere forme postume rispetto alle stiracacee, il genere *Aristolochia* rispetto al genere *Asarum,* le stilidiee rispetto alle campanulacee, le orchidee rispetto alle musacee e scitaminee.

17. La placentazione può fornire un criterio genealogico in certi casi assai fiducievole, perocchè la evoluzione delle placente presenta dati evidenti e sicuri d' anteriore o posteriore comparsa.

È senza dubbio prototipica la placentazione suturale propria di quelle piante ove i carpidii sono separati (ranuncolacee, anonacee ecc.).

Disponendosi più carpidii in verticillo, e fondendo in una colonna le loro rispettive placente, ne deriva la placentazione assile propria di tante piante (*Nigella* ecc.).

La placentazione parietale procede indubbiamente dalla placentazione assile, ed ebbe luogo dall' incompleto sviluppo dei septi ovuliferi, i quali non raggiunsero l' asse dell' ovario (*Hermodactylus*, salici ecc.). Questa placentazione così accusa la posteriorità delle orchidee rispetto alle scitaminee, delle orobanchee rispetto alle rinantacee, delle datiscee rispetto alle begoniacee.

Dalla placentazione assile dipende pure quella profonda modificazione che è la placentazione centrale. Così le primulacee, le mirsinee, le plumbaginee sono postume rispetto alle sapotacee.

18. Anche il parassitismo, tuttavolta che si presenta presso le fanerogame, è un criterio di somma importanza per la filogenia.

L' abitudine parassitaria nelle stirpi che ne sono affette si suole sviluppare in diversi gradi, per cui si ha una scala di evoluzione, i cui gradini sono convertibili in gradi di affinità.

Il criterio genealogico fornito da questa scala è tanto più fiducievole e sicuro, in quanto che il parassitismo non retrogredisce. Una stirpe vegetale, avviata che sia nel sentiero del parassitismo, non può tornare indietro; o rimane stazionaria nel grado di parassitismo a cui è pervenuta, o continua la progressione fino al più completo parassitismo, o altrimenti si estingue. L' abitudine parassitica è troppo dolce per poter essere tralasciata.

E per verità nella grande controversia ch' ebbe luogo in lichenologia, cioè se i gonimii siano alghe imprigionate entro la gabbia degl' ifi lichenici, oppure siano cellule verdi prodotte dagl' ifi stessi, il solo pensare che i licheni morfologicamente sono ascomiceti, che gli ascomiceti sono parassiti inveteratissimi, che il parassitismo non retrocede, avrebbe dovuto sciogliere la lite. Anzi appena enunziata la tesi schwendeneriana, io non esitai un momento a riconoscerne la verità, mosso dalle sovradette ragioni.

Dei molti gradi in cui si manifesta presso le angiosperme il parassitismo possiamo comodamente distinguerne almeno tre; cioè un parassitismo iniziato, un inveterato e un inveteratissimo. Così dato un gruppo di piante affini si può stabilire che le forme a parassitismo inveteratissimo provengono dalle forme a parassitismo inveterato, queste dalle forme a parassitismo iniziato, e finalmente queste da prototipi non parassitici.

Nelle angiosperme il parassitismo si rivela iniziato in quelle specie che dalla pianta nutrice sottraggono soltanto succhi greggi; epperò si trovano ancora provviste di foglie e di tessuti clorofillofori (santalacee, lorantacee).

In altre il parassitismo è inveterato. Le foglie, perduta la funzione amilogena, prive di clorofilla, sono già molto ridotte nelle dimensioni e avviate verso la condizione di organo rudimentale squamiforme.

In altre infine il parassitismo si rivela inveteratissimo, sia perché completamente si atrofizzano gli organi fogliari e florali, sia per altri caratteri di riduzioni e deformazioni organiche provocate dall' abito parassitico.

Istruttivi esempi di cosifatta scala del parassitismo sono date da parecchie stirpi angiospermiche. Nel gruppo delle santalacee abbiamo una sequela di generi sempre più alterati dal parassitismo, giusta l' ordine seguente : *Thesium, Osyris, Mizodendron, Loranthus, Arceuthobium, Viscum*. Nel gruppo delle rinantacee abbiamo le pedicularinee ancora munite di organi fogliari clorofillofori, i generi *Lathraea* e *Orobanche* ove il parassitismo é perfetto, e le foglie sono ridotte allo stato di rudimento.

Nel gruppo delle Rafflesiacee la scala del parassitismo é manifestata dalla successione delle tribù citinee, rafflesiee, idnoree, e questo gruppo poi verisimilmente dipende dalle non parassitiche aristolochiacee.

Né mancano generi aventi parassitismo perfetto, isolati in singole famiglie; la isolazione essendo senza dubbio dovuta alla estinzione e scomparsa delle forme interposte. Citiamo i generi *Cuscuta* pelle convolvulacee, e *Cassytha* per le laurinee.

Fenomeni analoghi hanno luogo anche presso le piante saprofitiche, presso le quali anche si può sovente rilevare la scala del saprofitismo. Le tismiee e le triuridee per esempio sono forme dipendenti dalle clorofillofore burmanniacee; e, nelle orchidee, il genere *Naeottia* é manifesta discendenza da un tipo clorofilloforo affine al genere *Listera*.

19. Analogamente alle parassitiche si comportano le piante cosidette carnivore; se non che trattasi di un fenomeno più raro. Anche l'abito della sarcofagia presso certi gruppi di piante si perpetua nelle stirpi; e a quanto pare non é capace di retrocedere. Dalle forme (prototipiche) ove quest' abito manca, a quelle ove la sarcofagia é iniziata, inveterata od inveteratissima, si hanno parecchie gradazioni, che possono convertirsi in vincoli di affinità e parentela.

Le droseracee e le lentibularie sono particolarmente interessanti per questo proposito. Presso le prime i generi *Drosera, Aldrovanda, Dionaea* formano una serie catenaria, solo che si ponga mente allo sviluppo della lamina fogliare sarcofaga, la quale poco differenziata presso il genere *Drosera*, é singolarmente perfezionata nei generi *Aldrovanda* e *Dionaea*.

La evoluzione dell' analoga lamina sarcofaga presso le lentibularie mette fuori dubbio la discendente sequela dei generi *Pinguicula, Genlisea, Utricularia;* poco differenziata essendo nel genere *Pinguicula*, molto di più nella *Genlisea* ove é foggiata a un tubo incarceratore munito di setole introflesse, e conseguendo un sommo grado di elaborazione nei singolari ascidioli delle utricolarie.

E finalmente il successivo perfezionarsi delle lamine sarcofaghe in una

stirpe di asclepiadee rivela la sequela discendente delle seguenti forme;

Conchophyllum
|
Dischidia nummularia
|
Dischidiae ascidiophorae.

Nelle nepentacee invece, nelle sarraceniacee e nel genere *Cephalotus*, le forme precessive sono incognite, e probabilmente scomparse senza lasciar traccia di sè.

20. Le varianti nel numero degli organi omologhi sono suscettibili di diversa interpretazione nei diversi casi. Possono talvolta offerire dei preziosi dati per l' ottima ordinazione genealogica, a condizione che non vengano detorte a erronee interpretazioni.

Sopratutto occorre di essere previamente istruiti delle loro vere causali. Infatti il numero degli organi omologhi, nelle stirpi che si mettono a paragone, può variare

1° per aumento dovuto a maggior vigore vegetativo;

2° per aumento dovuto a fenomeni di sdoppiamento e moltiplicazione;

3° per decremento dovuto a diminuzione del vigor vegetativo;

4° per decremento dovuto ad atrofia e ad aborti.

Quando il variare del numero di detti organi dipende dall' aumento o dalla diminuzione del vigor vegetativo, in tali casi le varianti sogliono essere malsicuri indizii della sequela genealogica.

Infatti nei generi *Ranunculus, Clematis, Anemone,* nelle magnoliacee, anonacee ecc. chi, fondandosi unicamente sul variabilissimo numero dei membri androceali e gineceali, delle forme affini messe a paragone, potrà asserire questa è più antica, quest' altra è più recente? Ben si comprende che con pari probabilità una stirpe oligandra e oligogina può produrre una stirpe poliandra e poligina come viceversa. Ma *est modus in rebus.* Quando in singole stirpi il numero degli organi si trova eccessivamente moltiplicato o ridotto di fronte alla cifra media del gruppo, allora così fatta esagerazione in più o in meno può essere considerata come un carattere di postuma acquisizione. Tali devono essere considerati a nostro parere l' androceo pentandro del *Myosurus,* il pistillo penta-monogino dell'Elleboree, il pistillo centicarpico di *Ranunculus sceleratus* ecc.

Miglior indizio genealogico suol essere fornito dal ridotto numero degli ovuli, partendo dal criterio che in generale un carpidio prototipico dovrebb' essere pluriovulato. Per esempio ponendo a paragone le pluriovulate solanacee e polemoniacee colle pauciovulate idrofillee, boraginee e convolvulacee, le prime mostrano maggiore antichità delle tre rimanenti.

Analogo fenomeno di riduzione quadriovulata ebbe luogo, in altra di-

rezione, nelle labiate e verbenacee. Ma le affini scrofulariacee mostrano appartenere a un tipo più antico, perchè sono costantemente pluriovulate.

Medesimamente le uniovulate composte e goodeniacee appartengono a un tipo assai più recente in confronto delle affini pluriovulate lobeliacee e campanulacee. E si potrebbero addurre altri esempi.

È raro il caso che, viceversa, alcune piante, fornite di una ricchissima provvigione di ovuli, siano per questo da reputarsi più recenti, a fronte di altre piante affini aventi un numero d' ovuli di gran lunga minore. È questo certamente il caso delle orchidee, tenendo presente che in un solo ovario di *Apera* vennero calcolati oltre 10 mila semi.

Quando l' aumento degli organi omologhi è dovuto a sdoppiamento o moltiplicazione, il fatto stesso dello sdoppiarsi o moltiplicarsi implica un carattere postumo. In tal caso le stirpi che soggiacquero all' operazione sarebbero discendenza di stirpi munite di organi non sdoppiati nè moltiplicati. Ma non bisogna perdere di vista che gli organi sdoppiati o moltiplicati in un stirpe possono semplificarsi nella sua progenie. Allora si avrebbe inversamente il fenomeno di organi semplici (semplificati) provenienti da organi doppi o multipli. Quindi siffatte varianti sono soggette a dubbia interpretazione, e devonsi consultare altri caratteri.

Vogliamo addurre un esempio. Le crucifere hanno un apparecchio florale che sotto i due rapporti morfologico e biologico mostra le più grandi simiglianze con quello delle *Dielythrae*. Ma nel ciclo interno è intervenuto il fenomeno dello sdoppiamento. Ecco un segno sicuro o di discendenza o di collateralità. Ora si dà qualche crucifera (*Lepidium ruderale*) dove ciascuna delle due coppie di stami tetradinami sono surrogate da uno stame soltanto. Ecco un segno sicuro di stami semplici (semplificati) provenienti da stami sdoppiati.

Meno che mai significativi per la teoria filogenetica sono i casi di pleiomerismo e meiomerismo. Così in un' ajuola ove erano centinaja di fiori di *Crocus vernus,* la cui architettonica pentaciclica trimera importa 15 organi, rinvenni un fiore che era pentaciclico dimero cioè con 10 organi, ed altro fiore che era pentaciclico tetramero, fornito così di venti organi. Entrambi erano regolarissimi e somministrano la più calzante testimonianza che il pleiomerismo può ingenerare il meiomerismo e viceversa, con presso a poco pari probabilità, e perciò senza poter con sicurezza decidere dei loro rapporti di antecedenza o conseguenza, salvochè non si ricorra ad altre considerazioni.

Così nella famiglia delle onagrariacee abbiamo cicli florali dimeri (*Circaea, Lopezia*), trimeri (*Prieurea*), tetrameri (*Epilobium, Oenothera, Fuchsia* ecc.), pentameri (alcune specie). La forma predominante nella famiglia è per altro la tetramera, per cui pare lecito d' arguirne la prototipia.

Come si deve interpretare il caso della *Ruta,* del *Philadelphus*, della *Tormentilla,* dove i fiori centrali sono pentameri e tetrameri i restanti? Questo fenomeno é dovuto al maggior vigore vegetativo degli assi principali, oppure é un segno di discendenza da stirpi a fiori pentameri? Questa seconda interpretazione é plausibile; anzi per la *Ruta* e per la *Tormentilla* è una quasi certezza, perchè i fiori delle rutacee e delle driadee sono tipicamente pentameri.

Le varianti nel numero hanno per la dottrina filogenetica un massimo valore, quando implicano diminuzione di membri omologhi per causa di atrofia e di aborto; ma di ció discorreremo altrove, discutendo in generale il valore degli organi rudimentali (v. infra).

21. La evoluzione delle infiorescenze in qualche caso può fornire un buon criterio filogenetico.

Quando le infiorescenze sono indefinite abbiamo i seguenti stadii di evoluzione.

A. Fiori isolati, pedicellati, posti all' ascella di foglie non mutate, attorno ad un asse agamico, dotato d' un incremento potenzialmente indefinito. Sono indiscutibilmente forme archetipe.

B. L' apice dell' asse agamico resosi defunto, le foglie vegetative ridottesi a brattee, si hanno le infiorescenze racemo, tirso, pannocchia, corimbo. Sono forme secondarie che presuppongono la preesistenza delle forme **A**, di cui sono immediata modificazione.

C. Abolite lungo l' asse fiorente le distanze internodali, si hanno l'ombrella e il capolino (forme terziarie).

D. Mantenute più o meno le distanze internodali, aboliti i pedicelli si hanno la spiga e lo spadice semplici (forme terziarie).

E. Abolite le distanze internodali, aboliti i pedicelli, si hanno gli antodii, le calatidi, le urne (forme terziarie o anche quaternarie).

F. Ripetuto il tipo **A** in assi di seconda, terza generazione ecc. si hanno erbe ramificate, o fiori isolati, ascellari (forme archetipe).

G. Ripetuto analogamente il tipo **B**, si hanno racemi, pannocchie, tirsi e corimbi composti (forme terziarie).

H. Ripetuto analogamente il tipo **C**, si hanno ombrelle composte.

I. Ripetuto analogamente il tipo **D**, si hanno le spighe e gli spadici composti.

K. Nel tipo **F** sostituendo a fiori semplici infiorescenze del tipo **B** o **C**, si hanno piante a racemi, ombrelle o capolini ascellari.

Si tralasciano altri stadii di evoluzione che meno frequentemente occorrono e che offrono maggior grado di complicazione.

Giova applicare questo schema a qualche caso particolare.

Nel genere *Veronica* abbiamo specie che realizzano i tipi infiorescen-

ziali **A** ed **F** (primordiali), altre il tipo **B** (secondogenito) ed altre il tipo **K** (terziario).

Nel genere *Linaria* abbiamo rappresentati i tipi **A** ed **F** (sez. *Elatine* e *Cymbalaria*), il tipo **B** (sez. *vulgaris*), il tipo **G** (terziario).

Nelle apocinee abbiamo i tipi **A** ed **F** (*Vinca*), oppure il tipo **K** (altri generi). Il genere *Vinca* deve essere reputato molto antico.

Nel genere *Lysimachia* abbiamo i tipi **A** ed **F** (*L. nummularia*), il tipo **B** (*L. punctata*), il tipo **G** (*L. vulgaris*).

In questi ed in altri moltissimi casi che si omettono appare manifesto quale valore possa avere per la filogenia la considerazione delle infiorescenze indefinite.

Nè meno importanti sono i dati che si possono desumere dalla evoluzione delle infiorescenze definite, centrifughe, simpodiali.

Il caso più semplice (archetipo) è dato da fiori terminali isolati, e non è un trascurabile motivo per credere alla grande antichità delle ranuncolacee, papaveracee, magnoliacee, calicantee ecc., questa caratteristica produzione di fiori terminali.

Le fumariacee tanto affini alle papaveracee mostrano però di essere una forma posteriore, perchè nel luogo dei fiori hanno racemi terminali. La infiorescenza in ombrella definita accusa per il tipo generico *Chelidonium* una comparsa più recente di quella del genere *Glaucium*.

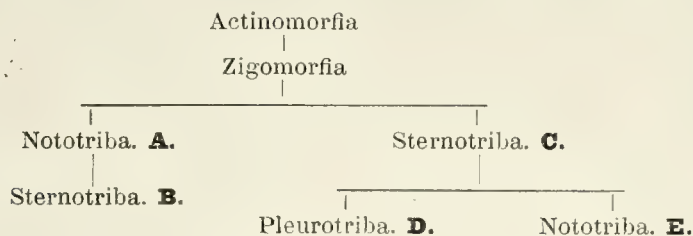
Il genere *Asarum*, di cui è stata fin qui disconosciuta la grande antichità, per la composizione simpodiale d'individui unifiori, mostra stretta affinità colle ranuncolacee e papaveracee. Altri caratteri confermano, segnatamente il trimerismo dei cicli ne' suoi policiclici fiori. A fronte del genere *Aristolochia* mostra di essere archetipo. Altri caratteri confermano.

Si possono utilizzare a parer nostro molte considerazioni di tal genere in schemi genealogici parziali di dati generi, tribù e famiglie.

Ancora, parlando d'infiorescenze, è da por mente se siano bratteate o nude. Dandosi il secondo caso è certo che ha avuto luogo l'aborto delle brattee. In tale stato si trovano le infiorescenze delle crucifere, di molte boraginee, solanacee ecc. Ma vi sono alcune specie di crucifere californiche che presentano infiorescenze bratteate, e parimente parecchie boraginee (*Cerinthe*) e solanacee *Hyoscyamus*). Ciò costituisce un carattere primitivo da dette piante conservato.

22. I fiori zigomorfi procedono senza dubbio da fiori actinomorfi. La zigomorfia florale sotto l'aspetto morfologico non è che un orientamento degli organi florali simmetrico rispetto a un piano verticale, e determinato dal senso di gravità posseduto dalle piante. Sotto l'aspetto biologico è un adattamento speciale per la impollinazione, nototriba in alcuni casi, sternotriba in altri, pleurotriba in altri. Quando quest'ultimo caso ha luogo i fiori sono zigomorfi assimmetrici.

La impollinazione nototriba in alcuni casi precede la sternotriba, in altri è viceversa. La pleurotriba procede sempre dalla sternotriba.

Laonde pella filogenia si ha la seguente discendenza di forme.

Esempi di **A.** Scrofulariacee. La forma prototipica actinomorfa è ancora percettibile nei generi *Verbascum* e *Celsia*, iniziati per altro già alla zigomorfia. Labiate. Verbenacee (alcuni generi sono presso a poco actinomorfi). Acantacee. Gesneriacee. Rinantacee. Orobanchee.

Esempi di **B.** Nelle scrofulariacee i generi *Scrophularia*, molte salpiglossidee (dato che non siano solanacee come sospettiamo), molte emimeridee. Nelle labiate i generi *Ocymum*, *Prostanthera* ed altri.

Esempi di **C.** Poligalacee. Papiglionacee ecc. Per queste ultime la forma prototipica actinomorfa è da ricercarsi in alcun genere di cesalpinee.

Esempi di **D.** *Lathyrus sylvestris*, *Phaseolus* nelle papiglionacee. *Polygalae* spec. nelle poligalacee.

Esempi di **E.** Più specie di *Erythrina* (procedenti dalle faseolee). *Clitoria*. *Canavalia* ecc.

Per altro non è da perdere di vista che da una forma zigomorfa nototriba può procedere una forma florale actinomorfa. Allora si tratta di actinomorfia secondaria. Già questo caso non è infrequente in teratologia, ed è stato distinto col nome di *Peloria*. Ma normalmente si verifica nel genere *Mentha* tra le labiate. Abbiamo poi una razza di *Gloxinia speciosa* perfettamente actinomorfizzata nella coltura (carattere recentissimo).

23. Gli organi degenerati ed abortivi procedono senza dubbio da organi normali. Un organo è degenerato quando, lasciata la funzione e forme originarie, altra funzione assunse e congruamente modificò la sua forma. Organo abortivo invece è quando, lasciata la funzione primiera, è destituito d' ogni ufficio. La legge di risparmio di materia, che governa tutti gli organismi, tende senza posa a diminuire gradualmente, di generazione in generazione, di stirpe in stirpe, il volume degli organi abortivi, comecchè affatto inutili, fino a tanto che essi scompariscono completamente. Così dall' aborto iniziato fino all' aborto completo vi è una indeterminabile serie di stazioni intermedie.

Non vi ha dubbio che lo studio di siffatti organi degenerati ed abortivi

sia della massima importanza per la filogenia; e il tassonomo si vale di questo studio per fondare su base reale parziali schemi filogenetici.

Citiamo alcuni esempi. Nel genere *Verbascum* lo stame posteriore benché fertile e pollinifero, per altro comincia ad incamminarsi verso la degenerazione e l'aborto.

Nel genere *Scrophularia* lo stame omologo è degenerato in una piastra, che qualche uffizio presta ancora in ordine alla visita dei pronubi. Nei generi *Chelone* e *Pentstemon* è degenerato in organo che serve allo scopo di apprestare un fulcro ai pronubi, e fors' anco come vuole Errera, di proteggere i nettarii dalla intrusione d'insetti non chiamati. Nei generi *Antirrhinum* e *Linaria* è ancora visibile sotto forma d'inutile tenuissimo rudimento. Nel genere *Digitalis* è scomparso affatto.

Interessante è nelle labiate lo studio della degenerazione e degli aborti a cui sottostanno parecchi stami. Già è carattere generale della famiglia l'aborto totale dello stame posteriore. Ma nel genere *Salvia* i due stami superiori sono abortivi e ridotti allo stato di tenuissime emergenze.

Negli altri due stami il connettivo, straordinariamente dilatato nel senso trasverso in due braccia, porta due loggie d'antera, la superiore sempre fertile, l'inferiore avviata verso la degenerazione e l'aborto. Confrontando le diverse specie di *Salvia*, possiamo sanamente proporre la seguente successione di forme.

A. *Salvia officinalis.* La loggia anterale inferiore è perfettamente fertile e pollinifera; ma, in confronto colla superiore, è già molto ridotta nelle dimensioni.

B. *Salvia pratensis*, *glutinosa* e molte altre specie. La loggia inferiore delle antere è affatto sterilizzata e degenerata in una paletta, che ha un ufficio particolarissimo diretto alla staurogamia, quello cioè di occludere l'accesso al nettario e di prestare punto di resistenza pel curioso movimento ad altalena del connettivo, avente luogo quando i pronubi visitano i fiori.

C. *Salvia verticillata.* La loggia inferiore delle antere è totalmente scomparsa, ma ancora persiste (tenuissimo) il braccio inferiore del connettivo.

D. *Rosmarinus officinalis.* Non solo è scomparsa totalmente la loggia inferiore dell'antera, ma è scomparso ancora il relativo braccio del connettivo.

Questi esempi, fra i moltissimi che si potrebbero citare, dimostrano il grande ajuto che il tassonomo filogenista può ricavare dallo studio degli organi degenerati ed abortivi.

24. Lo spirito umano nell'ordinare lo scibile tende dal semplice al composto. La natura nel formare gli organismi ha seguito un processo analogo. Cosifatta coincidenza rende vieppiù intelligibile, non come un'idea

subiettiva ma come una realtà, la scala della composizione organica nelle due grandi serie, dei vegetali e degli animali.

I gradini di questa scala per la dottrina filogenetica si convertono in gradi di parentela, e le forme che rispondono ai più bassi, sono quelle che vantano una maggiore antichità.

Adunque la semplicità nella struttura organica è il miglior indizio di antichità, come, per converso, un crescente grado di composizione indica via via una comparsa più recente.

E veramente se noi con questa misura valutiamo la relativa antichità dei sei o sette tipi fondamentali, in cui si è esplicato il regno vegetabile, antichissime forme riconosciamo nelle alghe e nei funghi di struttura semplicissima, via via forme più recenti nei briofiti, poi nei pteridofiti, poi nelle gimnosperme, da ultimo nelle angiosperme.

Questo grande criterio della semplicità organica, tanto importante per la filogenia, apre per altro fatalmente l'adito al massimo e pessimo errore che sia stato commesso nei quadri genealogici fin qui proposti

Data una forma archetipa di elevatissima composizione organica, può darsi frequentemente il caso che da essa si diparta una stirpe avviata nel sentiero del depauperamento organico e strutturale. Gli organi omologhi possono decrescere nel numero fino a ridursi a pochi o pochissimi; possono diminuire le dimensioni fino a scomparire totalmente; la struttura intima può non solo diminuire il numero degli organi elementari o istologici, ma eziandio eliminare una gran parte delle loro differenziazioni. Ne verrà da ultimo una progenie che, quasi fino alla illusione, porterà il falso marchio della semplicità: e invece di essere una progenie antica, nel fatto è una delle più recenti.

Non bisogna adunque confondere la semplicità colla semplificazione. È inutile citare qui quanti filogenisti siano improvvidamente caduti in tale errore, proponendo quadri genealogici con ordine affatto inverso dal vero.

Così, fra le monocotiledoni, le famiglie delle graminacee, ciperacee, restiacee, eriocaulonee, e, fra le dicotiledoni, le famiglie delle casuarinee, miricacee, amentacee, urticacee vennero ritenute da non pochi come le forme più semplici e più antiche; mentre in fatto esse meglio rappresentano altrettante stirpi recenti, che procedono da forme antichissime, i cui fiori apparentemente sono più complicati, mediante un lunghissimo processo di riduzione.

Ma l'esempio più istruttivo di semplificazione spinta all'ultimo eccesso, l'abbiamo nella circoscrizione delle aroidee. A partire dalle forme archetipe, ove si nota uno spadice equabilmente profuso in tutta la sua superficie di flosculi eguali, ermafroditi, exapetali, exandri, tricarpidiali, a poco a poco si passa a forme, ove i flosculi si localizzano in regioni diverse e distinte

nello spadice, a forme ove i sessi si scindono per flosculi e per regioni, costituendo fiori femminei in basso, fiori maschili in alto; a forme gradatamente depauperate di perigonio, di parecchi stami e parecchi carpidii; a forme gradatamente depauperate di flosculi e diminuite nelle dimensioni dello spadice (*Arum, Arisarum*); a forme ove ogni spadice porta un sol pistillo e pochi stami (fiori monandri; *Ambrosinia*); a forme ove sopra uno spadice quasi nullo si danno pochi stami e un pistillo soltanto (*Pistia*); finalmente a forme ove lo spadice è scomparso e tutta la pianta è ridotta a un piccolo corpuscolo parenchimatico, destituito di fasci fibroso-vascolari, sprovvisto di foglie e radici, munito di una fossetta albergante uno stame e un carpidio (*Wolfia arrhiza* delle lemnacee).

In tutta la circoscrizione delle angiosperme, anzi delle fanerogame, anzi delle piante fibroso-vascolari, non vi ha l' esempio di altrettanta semplicttà organica e strutturale. Ma non è punto semplicità, è semplificazione. Ben v' è stato qualcuno che si è lasciato illudere fino al segno di ritenere le lemnacee come le forme archetipe di tutte le angiosperme, mentre invece le medesime sono da ritenersi come l' ultima e più recente riduzione organica nella vasta famiglia delle aroidee; famiglia per verità antica assai; ma ad essa sovrastanno per antichità le gigliacee, alle gigliacee le butomacee, alle butomacee le dicotiledoni prototipiche (lardizabalee ecc.).

Non è fuori del probabile che un consimile errore sia stato commesso dai filogenisti zoologi, quando proposero il ridottissimo pesce *Amphioxus* come il prototipo dei vertebrati.

Del resto le cause delle accennate semplificazioni organiche sono quasi sempre biologiche; cioè adattamenti alla staurogamia anemofila (graminacee, amentacee ecc.); oppure adattamento alla vita acquatica (lemnacee, podostemacee, ceratofillee, aloragee, ippuridee, callitrichinee, idrocaridee, najadee ecc.).

25. Come gli anteriori botanici, indipendentemente da considerazioni filogenetiche le quali non potevano essi fare, pure, per mero senso empirico, videro nelle varianti degli organi florali essere riposte le più intime e valevoli ragioni della scientifica ordinazione delle piante, così ai moderni naturalisti non sfuggirà la grande importanza che per detta classificazione ha lo studio e la comparazione degli apparecchi staurogamici, quali dovettero succedersi gli uni agli altri e commutarsi gli uni negli altri per determinate ragioni di tempo e di luogo.

Dapprima è da por mente che essi si distinguono in due grandi categorie, in apparecchi anemofili, ove l' agente designato alla staurogamia è il vento, e in apparecchi zoidiofili, ove gli agenti designati sono speciali animalcoli.

Si presenta tosto il quesito: quale delle due è fenomeno più antico, l' anemofilia o la zoidiofilia?

L' anemofilia senza dubbio. In tempo che si venivano costituendo i primi tipi di piante superiori, ancora non esistevano stirpi di animalcoli antofili; laddove il vento è un agente generale, di tutti i tempi e di tutti i luoghi.

A questa veduta teorica risponde appieno la realtà; poichè infatti tutte le gimnosperme, senza eccezione, sono anemofile. E presentano quindi il fenomeno dell' anemofilia primigenia e veramente archetipa.

Ma chi trasferisse quest' archetipia alle angiosperme anemofile, incorrerebbe in gravissimo errore, nel quale non pochi incapparono, tutti i tassonomi per esempio che mettono a capo delle dicotiledoni le amentacee e famiglie affini, e a capo delle monocotiledoni le graminacee e famiglie prossime.

L' anemofilia è causa di somma riduzione, e imprime un falso marchio di semplicità alle stirpi che sono da essa modificate. Così quando da una stirpe zoidiofila esce una progenie che si viene adattando all' agenzia del vento, semplifica essa straordinariamente l' apparecchio florale. Sono eliminati gli organi appariscenti (corolla, perigonio), gli organi odoriferi e melliferi (nettarii, nettaroconche, nettarindici, nettarovie), gli organi che servono di fulcro all' appulso dei pronubi ecc.

Di più nelle progenie anemofile rientrando in pieno dominio la legge della divisione del lavoro (poichè il vento è una forza pronuba esuberante, indefessa, indefettibile, davanti alla quale riuscirebbe inutile l' ermafroditismo, che tanto invece giova alle stirpi zoidiofile, arrecando un ingente risparmio di materia e di forza), i sessi tendono a separarsi primamente per fiori, poi per infiorescenze, poi per regioni, poi per individui. Quindi è che nelle stirpi anemofile per solito si riscontrano fiori unisessuali, infiorescenze poligamiche, androgine, unisessuali, individui monoici e finalmente (ultimo termine della scissione dei sessi) dioici. Anche questo è causa di grande depauperazione e semplificazione.

Ma non basta. Nelle stirpi anemofile, per assicurare la staurogamica impollinazione a fronte dell' enorme spreco pollinico richiesto dalla condizione anemofila, giovando una crescente sproporzione tra la superficie stimmatica e il numero degli ovuli da fecondare, non solo si trova che gli stimmi sono amplissimi a sviluppatissimi, ma eziandio che i pistilli sono ridotti a uniloculari e monospermi (casuarine, amentacee, aloragee, graminacee ecc.). Adunque estrema riduzione nel numero dei carpidii e degli ovuli.

Questo complesso di cause fa si che le specie anemofile angiospermiche hanno fiori eccessivamente ridotti e depauperati, in guisa da simulare una falsa apparenza di semplicità, mentre si tratta di mera semplificazione.

Alcuni potranno objettare che le angiosperme archetipe dovessero essere

in ogni caso anemofile. Ai quali rispondiamo non esserci nessuna ragione perentoria per dover ammettere questo. Anzi vi sono ragioni non trascurabili per congetturare già zoidiofile le prime angiosperme. Ma non vogliamo entrare in questo astruso argomento, che troppo in lungo ci trarrebbe, solo limitandoci ad accennare che già altrove indicammo come la stirpe gimnospermica delle gnetacee a più indizii mostrerebbe di essere una discendenza di uno stipite zoidiofilo.

E, dato anche che le prime angiosperme fossero anemofile, si soggiunge che in ogni caso si tratterebbe di forme estinte, oggidì non più reperibili. Infatti quelle angiosperme che fra le forme oggidì esistenti hanno caratteri di maggiore antichità (magnoliacee, anonacee, monimiacee, laurinee ecc.) hanno fiori costantemente zoidiofili; soltanto cominciando a manifestarsi l'anemofilia in poche ranuncolacee (alcune specie di *Thalictrum*), in una menispermacea (*Rameya*), in una papaveracea (*Bocconia frutescens*), e non saprei addurre altri esempi. Nessuno vorrà ammettere poi che gli addotti *Thalictrum, Bocconia, Rameya* siano forme prototipiche, neanco entro la giurisdizione della propria rispettiva famiglia, giacchè offrono i più evidenti segni e caratteri di riduzione. Adunque si tratta di anemofilia secondaria.

Esempi indubbii pure di anemofilia secondaria sono dati dall'*Erica scoparia* nel genere zoidiofilo *Erica,* dal genere *Dodonaea* nelle sapindacee, *Trianaea* nelle idrocaridee, *Pistacia* nelle terebintacee, *Populus* nelle salicinee, *Datisca* nelle begoniacee, *Myrsine* nelle mirsinee; inoltre dai generi *Fraxinus* e *Forestiera* nelle oleacee, *Triglochin* e *Potamogeton* nelle najadee, *Rumex, Acetosa, Oxyria* nelle poligonacee; inoltre dalla intiera tribù delle sanguisorbee nelle rosacee, antospermee nelle rubiacee, tifacee nelle aroidee, acalifee nelle euforbiacee, aloragee e ippuridee nell'enoteracee, juglandee nelle terebintacee, dalle ambrosiacee nelle composte, da non poche palme, commelinacee ecc.

Considerando poi che anche in quelle famiglie angiospermiche, ove ha dominio assoluto l'anemofilia (graminacee, ciperacee, giuncacee, eriocaulonee, restiacee, amentacee, miricacee, urticee, cannabinee, ulmacee, piantaginee, chenopodiacee, cinocrambee, coriariee, callitrichinee, garriacee, gunneracee), si constatano numerosi caratteri di depauperamenti florali, si riesce necessariamente alla conclusione che in tutto il vasto campo delle angiosperme odierne l'anemofilia è sempre secondaria, giammai primigenia nè comparabile a quella delle cicadee e conifere; e che perciò tutte le angiosperme anemofile sono in ogni caso da considerarsi discendenti da antenati zoidiofili.

Infine si presenta il quesito: da una stirpe anemofila potè quandochessia risorgere la zoidiofilia, emanare cioè una progenie affetta da zoidiofilia secondaria?

Il fenomeno è raro; per altro ne conosco tre sicuri esempi. Nelle urticacee il genere *Ficus* è diventato zoidiofilo, incontrando uno stranissimo adattamento agl'imenotteri del genere *Psenes*. Inoltre abbiamo zoidiofili il genere *Sanguisorba* nelle sanguisorbee, la *Plantago media* nelle piantaginee. In questi tre esempi è meritevole di profonda considerazione che non si tratta punto di risurrezione d'un carattere atavico, ma di un adattamento zoidiofilo di nuovo genere, affatto diverso dall'atavico. La qual verità è manifesta sol che si ponga mente alla maniera come viene eseguita la staurogamia nei tre generi succitati.

26. Ora è debito precisare l'utile che si può ricavare per la classificazione delle piante dallo studio approfondito degli apparecchi florali zoidiofili; argomento questo non meno importante che difficile.

Cotali apparati si possono ordinare e distinguere sotto due punti di vista; cioè secondo i diversi pronubi a cui sono designati; e secondo la figura, le parti, il modo d'agire degli apparati stessi.

Sotto il primo aspetto abbiamo apparecchi designati a Cetonie ed altri coleotteri antofili (apparecchi *cantarofili*); ad apidi di media e grande statura (melittofili); ad apidi di piccola statura (micromelittofili); a mosche comuni di grossa e media statura (miofili); a mosche carnarie e a coleotteri saprofagi (sapromiofili); a moscherini (micromiofili); a sfingi e falene (sfingofili); a farfalle diurne (psicofili); a uccelli mellisugi (ornitofili). Vi sono frequentemente apparecchi misti (miomelittofili) ecc.

Riflettendo su queste differenze può alla mente presentarsi l'idea che la diversa età in cui comparvero siffatti apparecchi corrispondere debba alle epoche diverse in cui succedette la evoluzione di dette stirpi pronube. Certo è che ad esempio niun apparecchio sfingofilo poteva formarsi prima della comparsa delle sfingi e così via dicendo.

Ma questa via non è punto utilizzabile, poichè lo studio degli apparati florali in qualche famiglia di recente evoluzione dimostra incontestabilmente che siffatti apparati si cambiano l'uno nell'altro senza nessuna regola fissa di antecedenza o conseguenza.

Citiamo alcuni esempi. Nella famiglia delle asclepiadee, abbiamo apparecchi melittofili (*Asclepias*), micromelittofili (*Vincetoxicum*), miofili (*Periploca*), sapromiofili (*Stapelia*, *Heurnia* e generi affini), micromiofili (*Ceropegia*), sfingofili (*Stephanotis*). Nelle orchidee abbiamo miofili gli apparati florali delle *Ophrys*, melittofili delle *Orchis*, falenofili della *Gymnadenia* e dell'*Orchis pyramidalis*, sfingofili delle *Platanthera*, ornitofili in molti generi esotici; anzi abbiamo perfino apparecchi specialissimi, destinati alle vespe nelle *Epipactis*, agl'icneumonidi nelle *Listera*. Potremmo moltiplicare questi esempi, adducendo varianti analoghe nelle aroidee, gigliacee, asparaginee, ranuncolacee ecc. In tanto fluttuare d'indirizzi a diversi pronubi, è chiaro

non essere possibile desumere sicure induzioni circa l'età relativa e la successione degli apparecchi succitati.

Malgrado ciò non posso tacere un interessante rilievo che confermerebbe la congetturale prototipia d'alcune angiosperme (euante policicliche).

Fra tutti i diversi rapporti e indirizzi succitati quello che deve essersi di gran lunga concretato prima degli altri è certamente il cantarofilo, perchè i coleotteri, a quanto si può arguire dalla loro morfologia, dovettero precedere di molto le altre stirpi d'insetti pronubi. Ora se si osservano gli apparecchi delle magnoliacee (*Magnolia, Michelia, Ilicium*), delle monimiacee, menispermacee e Lardizabalee, verisimilmente son tutti cantarofili. E ancora la cantarofilia vedesi predominante in alcune famiglie affini, quali per esempio le ninfeacee (*Euryale* ecc.), le calicantee (*Calycantus*).

All'infuori di questo gruppo antico, la cantarofilia è un fenomeno rarissimo. Citiamo i fiori, verisimilmente cantarofili, della *Calla aethiopica*, dell'*Alocasia macrorrhiza;* forse anche quelli del *Lilium candidum*.

Per altro già in parecchie famiglie che appartengono al gruppo delle euante policicliche si trovano apparecchi designati a diversi pronubi. Così nelle ranuncolacee e berberidee predomina il tipo melittofilo. Le anonacee sono forse tutte miofile e sapromiofile. Le laurinee infine, le papaveracee e fumariacee sono melittofile. Di apparecchi ornitofili in tutto quanto il gruppo non ho che un unico esempio indicatomi dal sig. Mattei; i fiori cioè d'una specie esotica di Clematis, conformati al tipo pendolino microstomo (esclusivamente ornitofilo). Qui si tratta verisimilmente d'un adattamento recente.

Se gli apparecchi florali distinti secondo i pronubi non forniscono dati utili per la classificazione delle piante, ne forniscono per contro utilissimi e prestantissimi una volta che li consideriamo sotto l'altro aspetto della loro distinzione secondo le loro conformazioni e il loro modo d'agire.

Devo a questo proposito richiamare la classificazione che ne diedi nelle « Ulteriori osservazioni sulla dicogamia nel regno vegetale, parte II, fasc. II, 1873-1874. » Distinsi 13 classi di apparecchi cioè; 1°, a carcere temporario; 2°, a ricovero; 3°, a tromba; 4°, pendolini; 5°, microstomi; 6°, labiati; 7°, papilionacei; 8°, sifonofori; 9°, circumvolatorii; 10°, perambulatorii; 11°, reptatorii; 12°, prensili; 13°, aperti regolari.

Ora presso quelle famiglie, anzi presso quelle tribù e quei generi, ove si osservano da due a cinque o più sorta di apparecchi, lo studio delle maniere come gli uni vanno trasformandosi negli altri, espone in certo qual modo la storia della evoluzione dei gruppi medesimi, e non soltanto rispetto alle forme, ma eziandio rispetto alle cause funzionali.

Si possono addurre ad esempio le varianti negli apparati florali del genere *Lilium*. Abbiamo quattro tipi distintissimi. L'uno è del *L. candidum* e veri-

similmente si tratta d' un tipo cantarofilo. L' altro è del *L. longiflorum*, e si tratta d' una forma appartenente al nostro 19° tipo (amarillideo), forse in pari grado melittofilo-ornitofilo, per cui il genere *Lilium* mostra una tal quale affinità colla emerocallidee. Il terzo è del *L. croceum*, ed appartiene al nostro 26° tipo, supervolatorio, adatto esclusivamente alle sfingi. Il quarto appartiene ai *L. Martagon*, *L. Pomponium* ecc. e va fra gli apparecchi circumvolatorii esclusivamente sfingofili. Quest' ultimo tipo è singolarmente interessante per la dottrina filogenetica, in quanto che ripetendosi completamente nel genere *Methonica* mostra che le metoniche e le gloriose indubbiamente sono discendenti da una forma di siffatti gigli della sezione *Martagon*.

27. L' eterofillia talvolta è un preziossimo e sicuro indizio di discendenza, segnatamente in quelle stirpi che constano d' individui, la cui vita è divisa in due periodi, giovanile ed adulto, contrassegnati ciascuno dalla produzione di foglie aventi caratteri differentissimi. Allora è certo che le foglie dello stadio giovanile ripetono affatto il tipo fogliare delle forme archetipe.

Numerosi sono già gli esempi di cosifatte stirpi eterofille.

Nel genere *Pinus* le foglie primordiali, affatto diverse dalle foglie secondarie squamiformi, nonchè dagli aghi prodotti nel periodo adulto, rivelano con sicurezza l' ordine genealogico che segue: *Abies*, *Larix*, *Pinus*.

Nei generi *Cupressus*, *Thuja* ecc. le foglie aghiformi delle pianticelle germinanti affatto diverse dalle squamiformi del periodo adulto, additano con sicurezza la catena filogenetica che segue: *Oxycedrus, Sabina, Phoenicia, Cupressus, Thuja.*

Nelle acacie fillodiate dell' Australia le pianticelle germinanti producendo foglie bipinnate del tipo normale proprio delle Acacie afro-asiatico-americane, più tardi foglie miste, aventi cioè lamina bipinnata ridotta e fillodii incipienti, più tardi ancora (nel periodo adulto) esclusivamente fillodii, accusano per tal maniera di essere la discendenza di una forma archetipa bipinnatifoglia.

Negli *Eucalyptus*, pur dell' Australia, le foglie giovanili differentissime dalle adulte per fillotassi, per figura, per orientazione, conformi per altro al tipo generale delle foglie presso le mirtacee, dimostrano quali possano essere gli antenati di detto genere.

Nella *Semele androgyna*, la pianticella germinante sviluppa foglie affatto simili per la figura a quelle di *Dracaena*, mentre la pianta adulta non sviluppa che fillocladii ascellari a squame rudimentarie. Così è manifesta la discendenza di tutte quante le ruscee da una forma archetipa affine alle dracene.

Omettiamo per brevità altri esempi consimili, egualmente utili per le disquisizioni filogenetiche.

28. Da ultimo raccomandiamo un canone che ha una grande importanza pratica, quantunque non si riferisca punto a considerazioni di forme e funzioni, e a riguardi di luogo e di tempo. È un canone affatto empirico.

Dato un gruppo naturale di piante, qualunque siasi la sua comprensione o generica o di tribù o di famiglia, deve essere considerato come un'acquisizione postuma qualsiasi carattere eccezionale. Tanto più spiccata è la eccezionalità, tanto maggiore è la probabilità che si tratti di carattere postumo.

Citiamo ad esempio la convoluzione o volubilità dei cauli in piante rampicanti.

Nel *Convolvulus cantabrica* il caule è eretto, quasi suffrutescente. Ecco un carattere senza dubbio postumo rispetto al carattere opposto della volubilità caulina, predominante non solo nel genere *Convolvulus*, ma altresì in tutte le convolvulacee.

Nel *Polygonum Convolvulus* per l'opposto la volubilità caulina è un carattere postumo rispetto al carattere opposto del caule non volubile, che è quello non solo del genere *Polygonum*, ma eziandio della massima parte delle poligonacee.

Così il caule eretto del *Vincetoxicum officinale* è un carattere postumo, perchè la volubilità dei fusti è il carattere predominante non solo delle asclepiadee ma dell' intero gruppo delle apocinee. E a conferma di questo si scorgono talvolta alcuni tralci di *Vincetoxicum* che ancora presentano un residuale istinto di avvolgersi attorno a punti di resistenza, fosse anco una foglia di graminacea come una volta osservai.

Altro carattere eccezionale è per esempio nelle *Borago* la presenza di fulcri addossati agli stami: laonde certamente questo genere non potrebbesi ammettere come prototipo nella famiglia. E così di mille altri casi analoghi che si potrebbero citare.

Dobbiamo pertanto prestare massima attenzione alle *formae abnormes* che si presentano in qualsiasi gruppo naturale di organismi.

DI ALCUNE REAZIONI

DELLA

COCAINA ED ECGONINA

E DELLA LORO RICERCA CHIMICO-TOSSICOLOGICA

MEMORIA

DEL PROF. DIOSCORIDE VITALI

CON UNA TAVOLA

(Letta nella seduta del 7 Dicembre 1890).

Dacchè l'uso terapeutico della cocaina incominciò ad estendersi, le effemeridi scientifiche non tardarono a registrare non pochi casi di veneficio, avvenuti accidentalmente mediante questo alcaloide, dotato di tanta e ammirabile azione fisiologica.

Già fin dal 1886 il Mannheim fece una communicazione di un grave caso di veneficio per cocaina alla Società Medica di Berlino (1); quella era stata somministrata per iniezione sottocutanea, prima alla dose di gr. 0,10, e nel giorno successivo di gr. 0,20 in due volte. Nel 1888 il Dott. Moizard (2) riferì un altro caso interessante pei sintomi osservati, nel quale per errore erano stati somministrati ad un fanciullo di quattro anni gr. 0,25 di cloridrato di quella base. Il Dottor Wichelkiemes (3) narra di un caso di veneficio seguito anch' esso da guarigione, col quale si dimostra che anche piccole dosi di cocaina instillate nell'occhio, possono per speciale idiosincrasia produrre gravi fenomeni morbosi; fenomeni morbosi si manifestarono perfino in qualche caso, certamente di speciale idiosincrasia, in seguito ad iniezioni sottocutanee di gr. 0,01 di cocaina (4). Il Magnan osservò tre casi di veneficio cronico in seguito a dosi di cocaina varianti da 1 a 2 grammi (5).

---

(1) Annali di Chimica e Farmacologia, 1886. Vol. IV, Serie IV, pag. 248.
(2) Revue des maladies de l' eñfance, Novembre 1888.
Annali di Chimica e Farmacologia, 1890. Vol. XI, pag. 58.
(3) Terapeutische Monathefte, 1888. Fascicolo II.
(4) Wien med. prep. N. 12, pag. 478.
(5) Progrés Medical, 1889, pag. 478.

Il Dott. J. Stein (1) riferisce di fenomeni tossici imponenti verificatisi in una bambina di ventisette mesi, alla quale era stato applicato un solo di tre suppositori composti di gr. 0,50 di cloridrato di cocaina e di sufficiente quantità di burro di cacao.

Altri due casi di avvelenamento sono citati dal M. Simes (2). Nel primo egli, dovendo procedere ad un'uretrotomia, aveva iniettato nel canale uretrale gr. 3,60 di una soluzione al 20 % di cocaina per anestetizzare la mucosa. La morte, in mezzo a convulsioni epilettiformi, sopraggiunse in venti minuti; anche l' altro caso, nel quale un grammo di cocaina disciolto in trenta di acqua e preparato per iniezioni vescicale venne, per equivoco ingoiato, fu seguito da morte.

Si comprende quindi come il Dragendorff nella 3ª edizione del suo trattato di Tossicologia Chimica (3) annoveri la cocaina fra gli alcaloidi venefici, e, coordini la sua ricerca chimico-tossicologica col suo metodo generale di ricerca e di separazione dei veleni, specialmente alcaloidei (4). Egli in questo metodo suggerisce di isolare la cocaina dall' estratto acquoso depurato e reso alcalino coll' ammoniaca mediante la benzina. Ma in quanto alle reazioni, con cui riconoscere quest' alcaloide, ecco come si esprime: « Güte Farbenreationen des Cocains kennen wir noch nicht; die Reactionen « mit den meisten Fallungsmitteln für Alkaloide giebt es bereits bei starker « Verdünnung. »

Tra questi precipitanti egli dà la preferenza al permanganato di potassio, il quale nelle soluzioni di cocaina produce un precipitato rosso-violetto (5). Altro carattere secondo lui, non molto sensibile peraltro, è la colorazione variante dal giallo-verdiccio al rosso-azzurrognolo, che presenta la cocaina quando sia fusa con idrossido di potassio; parimenti egli utilizza lo sdoppiamento, cui quell' alcaloide va soggetto quando venga scaldato con acido solforico concentrato. Ma questo Tossicologo accorda la più grande importanza agli esperimenti fisiologici, sopratutto alla anestesia che la cocaina, applicata alle singole parti del corpo, produce, e specialmente alla dilatazione della pupilla (6). Della ricerca chimico-legale della cocaina si è anche occupato il Dottor Ubaldo Mussi di Firenze (7).

Egli si era proposto di vedere, se era possibile rintracciare quest'alcaloide

---

(1) Ther. Monat., Ottobre 1889, pag. 485.

(2) Rundschan für die interessen der Pharma, Hygien. etc., 1889. N. 23, pag. 486.

(3) Die gerichtlich-chemische Ermittelung von Giften. Dritte Auflage, Göttingen, 1888.

(4) Dragendorff — Ibid., pag. 148.

(5) Dragendorff — Ibid., pag. 214.

(6) Dragendorff — Ibid., pag. 214-215.

(7) Ricerche chimico-legali sull'avvelenamento per cocaina. Firenze, Tipografia della Pia Casa di Patronato, 1888.

inalterato, oppure se subiva trasformazioni nell' organismo. Il metodo da lui seguito è quello di Otto modificato dallo Stas, al quale ha per altro arrecato alcune varianti. La principale si è la sostituzione all' acido tartarico od ossalico, con cui si acidificano i materiali di ricerca, dell' acido cloridrico. Questa sostituzione fu suggerita all' Egregio Autore forse dalla considerazione che il cloridrato di cocaina è affatto insolubile nell' etere, col quale l' estratto acquoso ed acido deve essere dibattuto onde purificarlo dalle materie grasse, coloranti e di natura resinosa, da cui suole essere accompagnato. Se non che a mio avviso anche nella ricerca della cocaina è da preferirsi l' uso degli acidi organici, innanzi tutto, perchè il tartrato ed ossalato di cocaina non sono meno del cloridrato insolubili nell' etere; basta infatti ad una soluzione eterea estremamente diluita di cocaina, aggiungerne altra pure eterea di acido tartarico o di acido ossalico per ottenere forte intorbidamento, e, dopo conveniente riposo, un sedimento costituito dall' ossalato e tartrato di quella base; di modo che si ha in questa insolubilità un mezzo di separazione della cocaina dalle impurità, che non sono precipitabili dalla soluzione eterea di questi acidi. In secondo luogo è noto che il metodo di separazione degli alcaloidi dai visceri cadaverici di Erdmann ed Uslar e quello di Dragendorff non sono i più adatti per ottenere gli alcaloidi stessi in uno stato di purezza tale da potere, senza equivoci, identificarli, e ciò perchè in essi si fa uso di acidi minerali che nel primo metodo è il cloridrico, e nel secondo il solforico. Infatti, come dimostrarono il Guareschi, il Mosso, il Copola, il Marino-Zuco, seguendo quei metodi nella ricerca dei veleni nei visceri cadaverici, si produce una quantità di gran lunga maggiore di ptomaine, le quali accompagnano l' alcaloide, e ne impediscono il riconoscimento o ne mascherano la presenza; e questo inconveniente è tanto più a temersi nel caso della cocaina, per la quale fin qui non si conoscevano reazioni tanto caratteristiche da poterla identificare senza equivoci. Se poi a ciò si aggiunga che la cocaina è facilmente sdoppiabile in acido benzoico ed in ecgonina anche per l' azione dell' acqua e sotto l' influenza del calore, e se si rifletta che gli acidi cloridrico e solforico diluiti, come idratanti, sono forniti di azione sdoppiante, si comprenderà come l' impiego degli acidi organici sia preferibile a quello degli acidi minerali nella estrazione della cocaina. Anche il Dottor Mussi lamentò la mancanza di reazioni caratteristiche della cocaina, e perciò nelle sue ricerche si limita, per dimostrarne la presenza nell' urina, nell' umor vitreo, nel cervello e cervelletto, nel fegato e nei reni, nel cuore, nel sangue e nei polmoni di un coniglio avvelenato, all' uso dei reattivi generali (ioduro di potassio iodurato, acido picrico, cloruro d' oro e di potassio, cloruro mercurico, acido tannico, acido fosfomolibdico, ammoniaca, carbonati e bicarbonati alcalini, alcali caustici e soluzione di permanganato

di potassio, e lo sdoppiamento col mezzo dell' acido solforico in acido benzoico ed ecgonina). Ma questi due ultimi mezzi di riconoscimento richieggono quantità non estremamente piccole di alcaloide, e sempre maggiori di quelle che si sogliono rinvenire negli ordinarii casi di veneficio; infatti il BIEL, che propose il secondo di questi mezzi, eseguisce la reazione con gr. 0,03 di cocaina, ed il FLÜCKIGER, raccomandando l' uso della soluzione di permanganato di potassio, già proposto da GIESEL, impiega per ottenere la reazione non meno di gr. 0,01 di cloridrato di cocaina; gli altri mezzi di riconoscimento non sono caratteristici, ma comuni ad altri alcaloidi ed alle ptomaine. Lo stesso autore conchiude quindi che « la ri-« cerca della cocaina pel Chimico-legale si rende delle più imbarazzanti.... « tanto più che per essa non si conoscono reazioni specifiche e caratte-« ristiche ». Egli stesso dichiara la necessità di nuovi studi che si propose di fare.

I Chimico-tossicologi, prima di accingersi alla soluzione dei quesiti relativi al veneficio per cocaina, e specialmente di quelli rivolti a constatare se questo alcaloide passa inalterato alle secrezioni ed escrezioni dell' organismo, oppure vi subisce trasformazioni che ne rendano impossibile il riconoscimento, sentirono la necessità di studiare nuove reazioni atte a meglio caratterizzarlo.

Ben presto il GOELDNER (1) annunciò di averne trovata una cromatica bellissima. Essa si manifesterebbe, secondo l' autore, allorquando, mescolata la cocaina con un cristallo di resorcina, si agiti il miscuglio con acido solforico concentrato: si ha, sempre a detta di quell' Autore, dapprima colorazione gialla, che passa all' azzurro, il quale alla sua volta volge al rosso per aggiunta di sufficiente quantità di soda caustica. Ma se il GOELDNER non avesse ignorato che già prima del 1874 il KOPP aveva ottenuto la stessa reazione, impiegando solo la resorcina e l' acido solforico; se fosse stato pure a sua cognizione che il LIEBERMANN (2) aveva subito dimostrato che questa reazione, ottenuta la prima volta dal KOPP, non era dovuta all'azione dell'acido solforico puro sulla resorcina, ma bensì dovuta all'acido solforico contenente acido nitrico o nitroso, egli certamente non avrebbe dato importanza alla medesima, nè si sarebbe sentito ripetere dal HIRSCHSOHN (3) che la cocaina purissima non dà detta reazione, ma che questa è invece dovuta a traccie di nitrati provenienti dal modo di fabbricazione della cocaina. Ma, pur rimanendo fermo il fatto che la colorazione azzurra è dovuta all' azione dell' acido nitrico e nitroso sulla resorcina in presenza

(1) Amer. journ, of Pharm., 1889, pag. 4911.
(2) Bullet. Société Chimique, Paris. Tom. XXII, pag. 192.
(3) Journal de Chimie et Pharmacie, 1889, Tom. XX, pag. 501.

dell' acido solforico, a mio avviso la provenienza dell' acido nitrico e dell' acido nitroso è piuttosto a ripetersi dall' acido solforico, che ne è spessissimo impuro. Io poi ho constatato che, anche allorquando la reazione non avvenga trattando la resorcina con acido solforico per essere questo purissimo, essa sopravviene nel secondo periodo, allorchè alla soluzione solforica si aggiunge la soda: questa, quando non è purissima, contiene sempre traccie di nitrati e di nitriti, ragione per cui, impiegando di questa soda, nel primo momento dell' aggiunta, quando gran parte dell' acido solforico è tuttavia libero, si svolge acido nitroso ed acido nitrico, i quali reagendo sulla resorcina colorano il liquido in azzurro.

O. Lerch (1) e C. Schoerges hanno preconizzato, come mezzo di riconoscimento della cocaina lo sdoppiamento della medesima in acido benzoico, ecgonina ed alcol metilico. Essi utilizzano tale sdoppiamento ponendo un po' di soluzione acquosa di cocaina in vetro da orologio ed aggiungendo una goccia di soluzione officinale di percloruro di ferro; alla colorazione gialla del liquido, scaldando all' ebollizione, ne succede una rossa. Ma questa reazione oltre al richiedere quantità relativamente grandi di cocaina, non è poi esclusiva di quest' alcaloide, ma propria anche della benzoilecgonina. Anche la reazione proposta fin dal 1886 da Flüchiger è fondata sullo sdoppiamento della cocaina in acido benzoico, e perciò anche per essa cadono in acconcio le osservazioni già fatte (2). Essa si eseguisce scaldando con acido solforico della densità di 1,84 una piccola quantità di cocaina: si svolgono vapori acri e bianchi che sublimansi sulle pareti della provetta in cristallini.

Altra reazione colorata fu proposta dal Greitthen (3) che avviene quando si mescolino due o tre goccie di una soluzione di cocaina con due-tre cmc. di acqua di cloro, e si aggiungano al liquido due o tre goccie di una soluzione al 5 % di cloruro di palladio: producesi un precipitato rosso-mattone. Sebbene questa reazione si manifesti in soluzioni abbastanza diluite, nelle dilutissime non si produce in modo molto evidente, poichè l' intorbidamento non è molto sensibile, mentre d' altra parte la soluzione di cloruro di palladio colora già per sè in modo molto equivoco il liquido.

Ha importanza molto minore sia per la sensibilità, come per la non esclusività, la reazione proposta da Karl-Mezger (4). Infatti essa consiste in un intorbidamento di color giallo, che in una soluzione all' 1 % di clo-

---

(1) Pharm. Zeitschr. f. Russland XXVII, 1889, pag. 518.
(2) Union Pharm., 1886, pag. 156.
(3) Identitasreaction für Cocain. Pharm. Ztg., 1889, pag. 617.
(4) Pharm. Ztug., 1889, n. 92, pag. 697.

ridrato di cocaina producono alcune goccie di una soluzione al 5 % di acido cromico; intorbidamento, il quale scompare per ulteriore aggiunta di soluzione reattiva. Si ha invece precipitato giallo amorfo, quando si abbia l' avvertenza di prima acidulare la soluzione di cocaina con acido cloridrico concentrato. Altri alcaloidi peró danno precipitato di egual colore nelle stesse condizioni, e d' altra parte una soluzione al centesimo di sale di cocaina, come é prescritto dall' Autore, é abbastanza concentrata e non sempre facile ad aversi in tutte le ricerche chimico-tossicologiche della cocaina.

Recentemente (1) N. A. j Ferreira Silva, professore alla scuola Politecnica e direttore del Laboratorio municipale di Porto. ha proposto una nuova reazione che, secondo l' autore, sarebbe caratteristica della cocaina. Questa é fondata sulla produzione di certi prodotti odorosi, che svolge la cocaina trattata con alcune goccie di acido nitrico fumante, e successivamente, dopo avere evaporato a bagno maria a secchezza, con soluzione alcoolica concentrata di idrossido di potassio; l' odore che si manifesta é distinto e richiama quello della menta piperita. Secondo l' autore questa reazione permetterebbe di distinguere la cocaina da molti altri alcaloidi, specialmente da quelli del medesimo gruppo nella classificazione analitica del Dragendorff. Non dice peró della sensibilitá della medesima. Ma a parte questo, é chiaro il vedere che una reazione fondata unicamente sulla sensazione dell' odore, non puó avere il valore d' una bella e sensibile reazione cromatica. Io ho voluto provarla sulla cocaina pura e mentre posso dichiarare che in realtá si svolge un odore aromatico grato, questo odore in me non ha richiamato quello della menta. D' altra parte é noto, come nelle ricerche chimico-tossicologiche per lo piú si ha a fare con quantitá estremamente piccole di alcaloidi, e queste quasi sempre accompagnate da impuritá d' origine animale, le quali trattate con quei reattivi svolgono spesso odori speciali che non possono non alterare o mascherare l' odore, che da solo produrrebbe l' alcaloide.

Si é per questa insufficienza delle reazioni giá note che prima d' intraprendere lo studio chimico-tossicologico della cocaina, io mi accinsi a studiarne qualcuna, la quale per sé e col concorso delle migliori giá note, fosse atta a meglio identificare questo prezioso quanto energico rimedio, causa di non pochi venefici, che giá a quest' ora si sono verificati. La reazione che io propongo é fondata sull' azione contemporanea dell' acido solforico, dell' acido iodico e del calore sulla cocaina. Ecco come essa si eseguisce e quali sono i fenomeni a cui dá luogo.

(1) Journal de Pharmacie et de Chimie., 1890, n. 8, 15, ottobre, p. 445.

Si prende una quantitá di cocaina tanto piccola che sia appena visibile e, postala in capsulina di porcellana, vi si sopraversa acido solforico concentrato nella proporzione variabile da mezzo ad un centimetro cubico; si agita il miscuglio con bacchettino di vetro perchè l' alcaloide si sciolga, poscia si aggiunge del iodato di potassio o di sodio od anche dell' acido iodico allo stato solido in quantità doppia o tripla della cocaina impiegata. Si scalda leggermente e con molta precauzione; tosto vedonsi comparire nel liquido delle strie di color verde-chiaro, che, continuando a scaldare, passa al verde erba e poscia all' azzurro; aumentando il calore il liquido assume colorazione violetta e svolge vapori pure violetti.

Questa reazione é sensibilissima; si ottiene brillante anche dal residuo dell' evaporazione di una goccia di una soluzione di cloridrato di cocaina all' 1 % cioè da circa gr. 0,00005 di cloridrato delle base, e da gr. 0,000044, quantità di base libera corrispondente all' anzidetta di cloridrato. Quando si operi con molta attenzione essa può anche ottenersi da gr. 0,00002 della base. Per ció che riguarda l' esclusività di questa reazione nella seguente tabella trovansi i risultati ottenuti, operando nelle stesse condizioni sopra molti alcaloidi e principi attivi:

Ecgonina . . — Colorazione gialla che passa prontamente al rosso-vivo, o poi al bruno.
Chinina . . , — Color giallo verdastro pallidissimo, poi giallo più vivo, poi rosso-violetto, infine bruno.
Cinconina. . — Colorazione gialla che passa al rosso, poi al bruno.
Cinconidina — Colorazione gialla che passa al rosso-vivo e poi al rosso-sporco.
Chinidina. . — Color verdognolo a freddo, che passa poi a caldo bruno-caffè, infine nero.
Papaverina — Color bruno a freddo, color rosso-vinoso a caldo, poi color giallo d'oro.
Morfina . . . — Color bruno-caffè a freddo che col calore passa al rosso-bruno, poi al rosso-violetto, al rosso-vinoso, in fine al giallo-bruno.
Narcotina. . — Color bruno rossastro a freddo che col calore passa al violetto e poi al nero.
Tebaina . . . — Color rosso-sangue a freddo, rosso-bruno a caldo, quindi violetto infine nero.
Stricnina . . — Color rosso-bruno a freddo, rosso-violaceo a caldo, e poi nero.
Brucina . . . — Color rosso-ranciato a freddo, violetto a caldo, poi nero.
Atropina. . . — Color giallo-bruno a freddo, giallo-pallido a caldo, poi bruno quindi rosso-violetto, infine rosso-ranciato intenso.
Daturina . . — Come l' atropina.
Digitalina. . — A freddo color giallo-ranciato, poi rosso-bruno, indi violetto, infine nero.
Aconitina . . — Color giallo-bruno, poi verde-azzuro, indi bruno, rosso-violetto che si fa poi più pallido fino a completa decolorazione.
Caffeina. . . — Color verde, poi verde-azzurro, poi verde sempre più pallido; impiegando piccola quantità di iodato alcalino il verde passa al rosso-violetto.
Teobromina — Si comporta come la caffeina.
Solanina. . . — A freddo color giallo e poi violaceo; a caldo color rosa, poi rosso-bruno, infine nero.
Delfina. . . . — A freddo color giallo-ranciato, poi bruno-verdastro, rosso-violetto infine nero.

Oppianina . — A freddo color marrone che tende al giallo, a caldo color marrone con sviluppo di vapori violetti.

Codeina . . . — A freddo color marrone-scuro a caldo marrone-scuro con svilluppo di vapori violetti.

Pilocarpina — A freddo nulla, a caldo color giallo che tende al verde, con sviluppo di vapori violetti.

Solanidina . — A freddo color marrone, e a caldo color marrone-scuro, con svilluppo di vapori violetti.

Cairina . . . — A freddo color marrone-scuro, a caldo colore marrone-scuro con sviluppo di vapori violetti.

Antipirina . — A freddo color giallo che si fa più scuro, a caldo color marrone che passa all' azzurro con sviluppo di vapori violetti, infine colorazione marrone-scuro.

Picrotoxina — A freddo color gialliccio, a caldo color marrone con sviluppo di vapori violetti, infine color giallo pallido.

Berberina. . — A freddo color giallo, e poi verde-bruno, a caldo verde-bruno, rosso-violetto e poi rosso sempre più pallido fino a decolorazione.

Beeberina. . — A freddo color bruno-caffè, a caldo verde, poi rosso-violetto, infine decolorazione.

Asparagina — Color verde-bruno, poi rosso-violetto, infine rosso sempre più pallido fino a completa decolorazione.

Anemonina. — Color giallo-ranciato, poi rosso-violetto, infine nero.

Esculina. . . — A freddo color bruno, poi a caldo color verde, verde-azzurro-bruno, rosso-violetto, infine decolorazione.

Chelidonina — Verde a freddo, a caldo bruno-caffè, giallo-ranciato, verde-azzurro. rosso vinoso, indi giallo-ranciato di nuovo, infine nero.

Colombina . — A freddo color giallo-ranciato, a caldo bruno-caffè, poi rosso-violetto, infine di nuovo bruno.

Coridalina . — A freddo color verde, a caldo bruno-caffè con tinta verde ai bordi, poi color rosso-violetto, infine giallo ranciato.

Da questo specchietto risulta:

1° che l' acido solforico e l' acido iodico costituiscono un nuovo reattivo, col quale si possono caratterizzare meglio e talvolta distinguere tra loro alcuni alcaloidi e principî attivi delle piante; ad esempio la tebaina, l' atropina, la chelidonina, e la coridalina;

2° che sebbene alcuni degli alcaloidi e principî attivi svolgano nella reazione il color verde o verde-azzuro, ció accade o a freddo, mentre la cocaina manifesta quella colorazione a caldo, oppure la producono in una fase della reazione, diversa da quella in cui la produce la cocaina, e ad ogni modo in qualche periodo della medesima, in principio od in fine, presentano qualche fenomeno differenziale. Solo la caffeina, e la teobromina danno sul principio il color verde, e poi l' azzurro; ma quando non s' impieghi quantità troppo piccola di acido iodico, il color verde, o verde azzurro non é seguito, come nel caso della cocaina, dal color rosso-violaceo.

Ma ció che più interessa si è che di fronte a questo reattivo, l' ecgo-

nina si comporta affatto diversamente dalla cocaina. Ciò è importante perchè nel caso che nell' animale organismo la cocaina subisse sdoppiamento in acido benzoico, alcol metilico, ed ecgonina, quando questa presentasse la medesima reazione, non si avrebbe mezzo con cui distinguerla.

Se l' ecgonina non presenta questa reazione cromatica, a quale dunque degli altri due componenti della cocaina è essa dovuta? Per rispondere a questo quesito, eseguî la reazione sopra traccie di alcole metilico, ma senza alcun risultato; ripetuta sopra l' acido benzoico, ottenni gli stessi fenomeni e colla stessa intensità, che operando sulla cocaina, ciò che dimostra come detta reazione sia propria di quest' acido, il che venne confermato coll' esperienza diretta, avendola ottenuta brillantissima da quantità appena percettibili di quest' acido. Di maniera che in questa reazione si ha un nuovo mezzo di riconoscimento dell' acido benzoico stesso.

Si può dunque ammettere che sotto l' influenza dell' acido solforico, la cocaina si sdoppi nei suoi costituenti, fra i quali l' acido benzoico, e che quest' acido, oppure la sua anidride, nella quale può trasformarsi per l' azione dell' acido solforico e del calore, ossidati dall' acido iodico si trasformino dapprima in un prodotto colorato verde, poi in altro colorato azzurro. Che la reazione sia dovuta a fatto di ossidazione è dimostrato dalla circostanza dello sviluppo di vapori di iodo, reso libero per la riduzione dell' acido iodico. Ma vi ha di più. In questo reattivo non si ha solamente un mezzo di ossidazione, ma altresì di introduzione di iodo nelle molecole organiche. Infatti, qualora si prenda dell' acido solforico, gli si aggiunga da $1/3$ ad $1/2$ del suo volume di acqua e quindi della cocaina e si faccia bollire alcuni istanti, alla superficie del liquido si forma una crosta cristallina; allungando coll' acqua, separasi una sostanza bianca.

Questa, lavata perfettamente fino a che le acque di lavature più non intorbidino col cloruro di bario, nè, cimentate cogli opportuni reattivi, presenti le reazioni del iodo; disseccata ed arroventata con calce lascia un residuo che ripreso con acqua dà una soluzione, dalla quale con nitrito di potassio ed acido cloridrico si rende libera forte quantità di iodo. Questa sostanza è presso che insolubile nell' acqua, ha reazione acida, è solubile nell' alcole, dal quale si può per lenta evaporazione ottenerla in cristalli microscopici; è solubile negli alcali e dalla soluzione alcalina è precipitata dagli acidi allo stato amorfo; anche l' ammoniaca la scioglie, ma dalla evaporazione anche spontanea della soluzione, non si ottiene il sale ammonico, ma il composto primitivo. Che questo sia un derivato dell' acido benzoico, ciò è dimostrato dal fatto che lo si ottiene anche facendo agire l' acido solforico, e l' acido iodico sull' acido benzoico libero.

Il presentare che fa quest' acido la reazione stessa della cocaina, potrebbe far supporre che ciò possa esser causa di qualche equivoco nella

ricerca di questa base nei casi di veneficio. Ma tale equivoco non è possibile, perchè per ottenere dagli estratti acquosi purificati la cocaina fa d'uopo, prima del trattamento etereo, alcalizzarli con soda o con barite, nel qual caso l'acido benzoico passerebbe a benzoati di quelle basi, i quali sono affatto insolubili nell'etere.

Fine di questo mio studio essendo non solo la ricerca tossicologica della cocaina, ma altresì quello di vedere se essa si conservi inalterata nell'organismo, oppure si sdoppi in ecgonina, cercai nuovi caratteri differenziali fra questi due alcaloidi. Ed ecco i risultati ottenuti. Sciogliendo un poco di cocaina in circa cmc. 2 d'acido solforico concentrato, ed aggiungendo una goccia o due di una soluzione solforica di permanganato di potassio ($^1/_{200}$) si ha una colorazione violacea, la quale scompare colla agitazione; aggiungendo nuova quantità di reattivo ritorna il colore violaceo che, per prolungata agitazione, scompare di nuovo e così di seguito. L'ecgonina, per aggiunta delle prime goccie di soluzione reattiva, svolge colorazione gialla, e poi violacea con nuovo reattivo; il color violaceo per altro è più stabile che nel caso della cocaina. Questa reazione o consimile venne osservata, per rispetto alla sola ecgonina anche dal dott. Mussi (1). Essa per altro come ebbi ad osservare è data da altre sostanze organiche.

La cocaina solida od in soluzione molto concentrata posta a contatto con nitrato mercurico solido svolge colorazione gialla, ciò che non fa l'ecgonina. Questa reazione avviene anche con soluzione di quel sale mercurico, purchè concentrata o neutra; il che induce a credere che la soluzione gialla sia dovuta ad essido di mercurio. Dal nitrato mercuroso la cocaina precipita l'ossido; altrettanto non fa la ecgonina; se il nitrato mercuroso contenesse del nitrato mercurico, allora si ha prima colorazione gialla che lentamente passa al verdognolo e poi al nero coll'agitazione. La cocaina si differenzia anche dall'ecgonina, perchè la prima, posta a contatto del nitrato d'argento, lo decompone, rendendone libero l'ossido; altrettanto fa col solfato di rame, mentre l'ecgonina non altera questi due composti metallici.

Tralasciando di citare i reattivi generali, che non spiegano azione alcuna sulla cocaina, ecco come i seguenti si comportano tanto colla cocaina come coll'ecgonina.

(1) Ricerche chimiche e tossicologiche sull'ecgonina. Firenze, Tipografia della Pia Casa di Patronato, 1890, pag. 5.

Reattivi	Cocaina SOLUZIONE ACETICA 1 %	Egonina SOLUZIONE ACETICA 1 %
Cloruro di platino.	Precipitato giallo-bruno abbondantissimo	Nulla.
Cloruro d' oro	Precipitato giallo-canarino abbondante	Nulla.
Cloruro mercurico.	Precipitato bianco abbondante.	Nulla.
Cloruro d' oro e ioduro di potassio	Precipitato giallo-rossastro abbondantissimo	Lieve intorbidamento . . . .
Soluzione solforica di cloruro d' oro, e di permanganato di potassio	Precipitato giallo-canarino. .	Nulla.
Cloruro di mercurio e di potassio	Precipitato bianco	Nulla.
Ioduro di bismuto e di potassio.	Precipitato rosso-carota. . .	Precipitato rosso-carota . .
Bromuro d' oro	Precipitato giallo abbondante che si fa rosso agitando . .	Lieve precipitato rosso. .
Cianuro d' argento e di potassio	Precipitato bianco	Nulla.
Cianuro di rame e di potassio.	Precipitato biancastro. . . .	Nulla.
Solfato d' oro.	Precipitato bianco che si fa rosso agitando	Nulla.
Acido tannico	Precipitato abbondante biancastro	Lieve intorbidamento . . .
Acido cromico	Precipitato giallo-canarino abbondante	Nulla.
Acido fosfomolibdico	Precipitato biancastro abbondante ed insolubile in eccesso di reattivo	Precipitato biancastro abbondante, solubile in eccesso di reattivo . . . .
Acido picrico.	Precipitato giallo abbondante.	Nulla.
Nitrato d'argento ammoniacale.	Precipitato biancastro che scompare coll' agitazione. .	Nulla.
Ioduro di potassio iodurato . .	Precipitato abbondantissimo di color rosso-bruno che si depone sotto forma di globuli neri microscopici.	Precipitato rosso-bruno che dopo qualche minuto si mostra formato di bellissimi cristallini microscopici . . . . .
Ioduro di potassio e cloruro di platino.	Precipitato color cremisi che al microscopio si presenta amorfo e nero, mentre il liquido è disseminato di fascetti formati di sottilissimi aghi	Nulla.
Ammoniuro di rame	Precipitato azzurrognolo. . .	Precipitato azzurrognolo . . .
Fosfomolibdato di sodio . . .	Precipitato bianco	Nulla.
Bromuro di potassio iodurato .	Precipitato giallo-canarino, abbondante, insolubile in eccesso di reattivo	Precipitato giallo abbondante solubile in eccesso di reattivo.
Ioduro di ammonio e di mercurio	Precipitato bianco	Nulla.

Di tutti questi reattivi generali quello che ha maggior valore e può servire a distinguere l' ecgonina, si è il ioduro di potassio iodurato. Come risulta dal citato specchietto, questo reattivo nelle soluzioni, acidulate con acido acetico all' 1 % di cocaina ed ecgonina, produce precipitato rosso-bruno. Questo precipitato, nel caso della cocaina, si depone dal liquido, da cui si produce, sotto forma di materia emplastica, che aderisce al vetrino, su cui si eseguisce la reazione; ed osservato al microscopio si mostra formato da una infinità di globuli perfettamente rotondi e neri. Il precipitato invece, nel caso dell' ecgonina, da prima è amorfo, ma ben presto, nel termine talvolta di qualche minuto, diventa cristallino a vista d' occhio, ed osservato al microscopio si presenta costituito da vari cristalli isolati, o riuniti e variamente disposti. Questi cristalli sono tavole e prismi rombici di color giallo-rossastro, talora bruni, riuniti talvolta a rosetta.

Essi formansi anche in soluzioni molto più diluite; il limite di diluzione, a cui produconsi è di $1/_{500}$; in questo caso si formano più lentamente, hanno color rosso-bruno, forma di prismi romboidali, sono riuniti a crocetta od anche isolati, cogli spigoli peraltro dell' asse più corto smuzzati, ed allora presentano la forma di grani di frumento. È tale in questo caso la rassomiglianza loro coi cristalli di emina per la forma e pel colore, che se non fossero tanto diverse le condizioni in cui si formano, si potrebbero scambiare con essi. In mezzo a questi cristalli, quando la prova è disseccata, osservansi altri affatto incolori e di forma cubica, essi sono di ioduro di potassio. Talvolta i cristalli si dispongono come le foglie della rosa, e i cristalli di queste rose sono formati da tavole romboidali, smuzzate agli angoli nel senso dell' asse trasversale più breve. Talvolta queste tavole, specialmente quando sono isolate, sono esagonali, e ciò accade allorchè esse sono nettamente tagliate agli angoli nel senso dell' asse maggiore. Perchè questi cristalli si formino in grande copia, necessita che la soluzione acetica di ecgonina sia di tal concentrazione che, aggiungendo il reattivo si abbia immediato e sensibile intorbidamento, il quale con relativa formazione di cristalli si manifesta già in soluzione all' $1/_{400}$. In soluzione all' $1/_{500}$ l' intorbidamento non è sensibile, ma abbandonando il miscuglio a sè per molto maggior tempo, i cristalli, sebbene in minor abbondanza, si formano. S' intende come anche da soluzioni molto più diluite, essi possono ottenersi, quando, abbandonati all' evaporazione spontanea, vadano concentrandosi. Tali cristalli si formano, sebbene con minore facilità, facendo uso, invece del ioduro di potassio iodurato, dell' acido iodidrico iodurato; il che dimostra che alla loro composizione oltre all' ecgonina prende parte solo il iodo o l' acido iodidrico. La materia onde sono formati, preparata in quantità non estremamente piccola, è una polvere cristallina di color grigio d' acciaio, poco solubile nell' acqua fredda, assai più nella bollente, solubile

nell' alcole e nell' acido acetico. Le soluzioni hanno colore giallo-bruno. La soluzione acquosa, lasciata evaporare spontaneamente, dà un residuo affatto incoloro, nel quale più non si osservano detti cristalli. Le soluzioni alcoolica ed acetica invece, abbandonate alla evaporazione spontanea, danno per residuo i cristalli colla loro forma primitiva. Questi si possono conservare indefinitivamente.

Siccome la loro formazione costituisce un mezzo di riconoscimento dell' ecgonina, così volli accertarmi, se essi sono esclusivi di essa, oppure se altri alcaloidi e principî attivi, siano suscettibili di darne di simili. Cimentai coll' ioduro di potassio iodurato e nelle stesse condizioni soluzioni acetiche di stricnina, brucina, chinina, chinidina, cinconina, cinconidina, atropina, daturina, caffeina, teobromina, sparteina, picrotoxina, giusquiamina, narcotina, papaverina, oppianina, codeina, tebaina, delfina, aconitina, digitalina, solanina, solanidina, kairina, antipirina e pilocarpina. Ottenni in molti casi cristalli per lo più incolori e di forme le più differenti, ma di cui niuna si rassomigliava anche lontanamente a quella dei cristalli ottenuti coll' ecgonina.

Rimanevami a vedere, se questi cristalli che produconsi con tanta facilità nelle soluzioni acetiche di ecgonina pura, produconsi pure in liquidi contenenti sostanze organiche e specialmente nella urina. Questa ricerca era tanto più necessaria in quanto che l' ecgonina non può essere separata dalle materie organiche, colle quali si trova sempre commista nei casi delle ricerche chimico-tossicologiche, perchè insolubile in tutti i veicoli non miscibili all' acqua (etere, cloroforme, solfuro di carbonio, alcole amilico, etere di petrolio, benzolo), ai quali appunto si ricorre per separare gli alcaloidi dai loro estratti acquosi. Il solo solvente non miscibile all' acqua, in cui l' ecgonina è alquanto solubile, è l' etere acetico, specialmente quando contiene libero dell' acido acetico; ma esso colla poca ecgonina scioglie con facilità materie coloranti, resinose ecc.

Presi per l' indicato scopo gr. 300 di carne equina, che tagliuzzai, aggiunsi gr. 0,05 di ecgonina qualche decigrammo di acido tartarico e tant' acqua da farne poltiglia. Trascorse alcune ore, versai nel miscuglio il triplo volume di alcool assoluto, ed il tutto per alcune ore feci digerire a 50° — 60°; dopo di che filtrai, distillai per riavere l' alcol, filtrai di nuovo ed evaporai a consistenza di estratto, che esaurii con poco alcol assoluto. Filtrai ancora ed evaporai fino ad eliminazione di tutto l' alcol; alcune goccie del liquido residuo filtrato ed acidulato con acido acetico intorbidarono fortemente col ioduro di potassio iodurato, ed il precipitato osservato poco dopo al microscopio si mostrò formato da una infinità dei cristalli sopra descritti. Bellissimi li ottenni anche dal residuo dell' evaporazione dell' etere acetico acido, col quale avevo dibattuto parte di quel liquido. Que-

ste esperienze dimostrano come si possa identificare la ecgonina mediante la produzione di questi cristalli caratteristici nei visceri cadaverici. Durante questa esperienza ho osservato, che, quando la ecgonina si trova commista con molte sostanze organiche, bene spesso i cristalli si mostrano formati di sottili prismi romboidali riuniti a fascetti, e questi disposti a croce, a stella, e talvolta a sfera, di color rosso-bruno o bruni. Ma se riesce facil cosa l' ottenere i cristalli dagli estratti acquosi purificati della carne e di altre sostanze animali, altrettanlo non puó dirsi per rispetto all' urina. Infatti, aggiunti gr. 0,05 di ecgonina a 100 cmc. di urina, concentrati questi ad estratto in presenza di poco acido tartarico e trattato l' estratto con alcol assoluto, eliminato questo e dibattuto il liquido acquoso residuo con etere, acidulato con acido acetico, e cimentato con ioduro di potassio iodurato, ebbi bensí precipitato rosso-bruno abbondantissimo, ma nón mi fu possibile distinguere in esso cristalli di sorta; come pure non si poterono ottenere dal residuo della evaporazione dell' etere acetico, con cui aveva dibattuto quel liquido acquoso depurato, e ció in causa delle molte sostanze organiche contenute nell' urina, le quali danno col ioduro di potassio iodurato precipitato rosso-bruno amorfo ed emplastico, e dalle quali non é possibile liberarlo, seguendo i noti metodi di depurazione. Nella speranza di poter meglio raggiungere lo scopo, alcalizzai il liquido acquoso depurato dell' urina, lo ridussi a bassa temperatura a piccolissimo volume, trattai il residuo con alcool assoluto, ed alla soluzione alcoolica, aggiunsi molto etere, nel quale l' ecgonina é insolubile. Dopo conveniente riposo sciolsi il deposito formatosi in alcune goccie di acqua acetica, che cimentai col ioduro di potassio iodurato, ma senza ottenere risultato migliore.

Essendo l' acido fosfomolibdico il miglior precipitante dell' ecgonina, trattai con questo reattivo dell' urina concentrata, a cui aveva aggiunto di questo alcaloide. Il precipitato fu lavato, mescolato con calce caustica, disseccato al calor di stufa ed esaurito con acqua e poi con alcole. Ma tanto dal residuo della soluzione alcoolica come dalla acquosa non mi fu possibile ottenere i soliti cristalli. Né meglio riuscí nello scopo, operando sull' estratto dell' urina, trattato prima con acetato basico di piombo e poi con gas solfidrico. Ottenni in tutti i casi dei liquidi, che precipitavano abbondantemente col ioduro di potassio iodurato, ma nei precipitati non mi fu mai possibile riscontrare i cristalli caratteristici dell' ecgonina.

Mi rimaneva a vedere, se questi cristalli si formassero nell' urina naturale e pochissimo concentrata, ed in caso positivo, quale fosse l' estremo limite di proporzione, in cui debba trovarsi l' ecgonina, perché possa fornire i cristalli. Al qual proposito ho osservato che essi produconsi belli ed alquanto numerosi in urina naturale, che ne contenga $1/_{600}$; basta in questo caso acidulare l' urina con acido acetico, porne una goccia sopra un porta-

oggetti da microscopio, aggiungervi una goccia o due di reattivo, abbandonare il tutto a sè fino quasi a completa secchezza ed osservare poi al microscopio. Da una urina contenente $1/_{800}$ di alcaloide non potei ottenere cristalli ben distinti, nè giovò il concentrare l' urina, poichè in tal caso si ottiene un precipitato copiosissimo ma sempre amorfo. Il limite di quantità adunque di ecgonina necessaria per riconoscerla nella urina, mediante la produzione dei più volte mentovati cristalli è di $1/_{600}$. Al duplice fine di accertarmi, se la ecgonina almeno in parte passi inalterata nell' urina, e se in caso positivo fosse possibile scoprirvela, presi io stesso in due volte e con un intervallo di tre ore fra una presa e l' altra gr. 0,50 di ecgonina, raccogliendo le urine emesse nelle ventiquattro ore dopo l' ingestione, le quali furono molto scarse. Tranne qualche lieve disturbo, nulla ebbi a soffrire. Concentrai alquanto la poca urina, ed acidulatala con acido acetico, ne trattai alcune goccie col reattivo iodurato, che vi produsse abbondante precipitato; abbandonato il miscuglio all' evaporazione spontanea, il residuo presentò al microscopio numerosi i soliti cristalli.

Trovata una reazione cromatica ed abbastanza caratteristica della cocaina, e trovatane un' altra, con cui riconoscere l' ecgonina e dimostrato come questa almeno in parte attraversi inalterata l' organismo, sì che entro certi limiti di quantità, la si può scoprire nelle urine, mi rimaneva a vedere, se, valendomi della nuova reazione cromatica e delle altre di cui ho fatto cenno, la cocaina nell' organismo in tutto o in parte si conserva inalterata passando nelle urine o in tutto, o in parte si sdoppi in ecgonina. Avanti di risolvere questo quesito volli accertarmi, se dai miscugli di sostanze animali, essa possa estrarsi in condizioni tali da poter essere riconosciuta colla reazione da me proposta. Mescolati gr. 300 di carne equina tagliuzzata con gr. 0,05 di cocaina e con gr. 0,50 di acido tartarico, fatto digerire per alcune ore il miscuglio a 50° — 60° con alcol assoluto, filtrato, e distillato il liquido alcoolico, il liquido acquoso residuo, previa filtrazione, fu evaporato ad estratto, il quale venne di nuovo ripreso con alcole assoluto; aggiunti all' estratto alcoolico alcuni cmc. d' acqua e distillato di nuovo, il liquido acquoso residuo fu ripetutamente dibattuto con etere, quindi, alcalizzatolo con idrato di bario, di nuovo agitato per tre volte con circa quattro volumi di etere. La soluzione eterea evaporata lasciò per residuo dei bellissimi cristalli aghiformi, che furono riconosciuti di cocaina, sia mediante l' acido solforico ed acido iodico, sia per mezzo di tutte le altre reazioni speciali e generali sopra mentovate. Accertatomi così che era possibile estrarre e riconoscere la cocaina mescolata a sostanze animali, ingoiai io stesso per due volte della cocaina in soluzione acetica. La prima volta ne presi in due volte gr. 0,50 con intervallo di tre ore dall' una all' altra presa. Dall' urina trattata col metodo già de-

scritto ottenni un estratto etereo sufficientemente puro, il quale, evaporato a secchezza, lasciò un residuo, da cui ottenni non solo la reazione cromatica mediante il iodato di sodio e l' acido solforico, ma altresì tutte le altre col mezzo dei reattivi generali più sopra ricordati. Se non che volendo giudicare dall' intensità delle reazioni e dal grado d' intorbidamento prodotto da quei reattivi, la quantità di cocaina passata nelle urine, doveva essere minima. Ripetei l' esperimento non più con gr. 0,50 ma con gr. 0,80 di alcaloide che presi in tre volte con intervallo di due ore fra l' una, e l' altra dose. Si manifestarono alcuni epifenomeni per altro passeggieri, e specialmente sudore profuso, scarsità di urina, sovraeccitazione nervosa, e secchezza alle fauci. La ricerca nell' urina dell' alcaloide diede lo stesso risultato che aveva ottenuto dopo l' ingestione di gr. 0,50. In questa seconda volta ricercai la cocaina anche nella saliva e nel sudore; la trovai nella prima, non nel secondo. Non mi rimaneva che di accertarmi, se la cocaina che in tanta piccola quantità avevo rinvenuta nell' urina si fosse sdoppiata in ecgonina ed acido benzoico. Per questa ricerca utilizzai l' estratto acquoso, che era stato alcalizzato con barite ed esaurito con etere. Questo avrebbe dovuto contenere l' ecgonina mescolata a benzoato di bario, avvegnaché, come abbiamo avuto occasione di mentovare e come risultó anche da esperienze mie dirette, quell' alcaloide sia affatto insolubile nell' etere. Acidulai con acido solforico, filtrai per separare il baritico, eliminai il piccolo eccesso di acido solforico con sufficiente quantità di acetato neutro di piombo; filtrai di nuovo, aggiunsi acqua solfidrica per eliminare l' eccesso di piombo; filtrai un' altra volta e concentrai a varie riprese, cimentando ad ogni volta col reattivo iodico; ma mai mi venne dato di ottenere i cristalli caratteristici dell' ecgonina, come pure non li ottenni dall' estratto medesimo non concentrato, nè dal residuo dell' evaporazione dell' etere acetico, con cui aveva dibattuto il liquido previamente concentrato.

Per rendere questo studio chimico-tossicologico sulla cocaina meno incompleto, ho voluto accertarmi, se la cocaina resista o no al processo putrefattivo ed in caso affermativo, se essa possa scoprirsi colla nuova reazione cromatica da me proposta. A tale scopo presi gr. 0,05 di questa base che mescolai con gr. 200 di carne tagliuzzata, con quattro ova e con quantità di acqua sufficiente per farne poltiglia sciolta, e il tutto posi in matraccio. Ciò avveniva sulla fine di agosto p. p. Procedei alla ricerca il 25 ottobre. Resi acido il miscuglio con acido tartarico, evaporai a bassissima temperatura a consistenza estrattiva, feci digerire l' estratto con tre volte il suo volume d' alcole assoluto; evaporai la soluzione alcoolica ad estratto, che ripresi con poca acqua, e la soluzione acquosa acida dibattei per tre volte con quattro volumi di etere. Separato questo, alcalizzai il liquido acquoso residuo con idrato di bario, e

rinnovai sul liquido alcalino i trattamenti eterei; sciolsi in pochissima acqua il residuo della evaporazione della nuova soluzione eterea: filtrai e del filtrato piccola porzione evaporai a secco, e sul residuo tentai la reazione coll' acido solforico e acido iodico con risultato positivo. Se non che osservai, che aggiungendo alla soluzione solforica del residuo l' acido iodico subito si svolse colorazione bruna dovuta a iodo ridotto probabilmente da qualche ptomaina; ma, scaldando, il iodo si volatilizza, e il liquido si schiarisce, e allora appare la colorazione verde e poi azzurra propria della cocaina, purchè la quantità dell' acido iodico impiegata sia sufficiente. Quando la quantità adoperata da principio fosse stata insufficiente allora scomparsa la colorazione bruna prodotta dal iodo libero, fa d' uopo aggiungere altro acido iodico e scaldare con precauzione per ottenere la colorazione verde, verdazzurra od anche azzurra, quando si operi convenientemente. Ottenni pure dall' ultimo filtrato tutte le altre reazioni della cocaina a mezzo dei reattivi generali.

Dalle cose suesposte parmi si possa conchiudere:

1° che colle reazioni proposte si può riconoscere nei miscugli organici tanto la cocaina come l' ecgonina;

2° che la cocaina solo in piccolissima quantità passa alle urine;

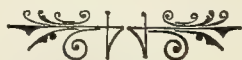
3° che la massima parte si altera od è distrutta nell' organismo, ma che non si sdoppia in ecgonina, volendo ciò giudicare dal risultato negativo, che ebbe la ricerca di questa base nella urina, ricerca fondata principalmente sulla formazione dei cristalli caratteristici, che essa produce cimentata col ioduro di potassio iodurato; oppure che, se lo sdoppiamento avviene, l' ecgonina sdoppiata subito si altera o è distrutta;

4° che durante il processo putrefattivo la cocaina non si altera, o che almeno non si altera completamente, per modo che essa si può scoprire col mezzo dei reattivi generali e colla reazione cromatica che ha fatto soggetto di questa nota.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Cristalli, nelle loro diverse forme, prodotti per l'azione del ioduro di potassio iodurato sulla soluzione acquosa di ecgonina, acida per acido acetico.

1. Tavole romboidali.
2. Tavola romboidale cogli angoli nel senso dell'asse minore, smuzzati.
3. Tavole esagonali.
4. Cristalli prismatici disposti a rosetta.
5. Cristalli dendritici con qualche tavola esagonale.

lit. G. Wenk e Figli—Bologna.

OSSERVAZIONI

INTORNO

AD UNA MOSTRUOSITÀ DEL FIORE DI CAPPARIS SPINOSA L.

MEMORIA

DEL PROFESSORE FAUSTO MORINI

(CON UNA TAVOLA)

(Letta nella Sessione del 16 novembre 1890).

Le ricerche di Morfologia Vegetale, compiutesi, per parte di un' eletta schiera di Botanici, più specialmente nell' ultimo ventennio, hanno messa in rilievo la grande importanza della Teratologia sotto diversi punti di vista, ed hanno questa presentata qual è veramente, cioè come ramo importantissimo della Morfologia comparata delle piante.

Anzitutto, non puossi disconoscere la parte che ha la Teratologia nella costituzione di forme nuove; perché un determinato carattere abnorme, apparso repentinamente, senza una causa per noi apprezzabile, in un dato individuo, puó essere da questo trasmesso attraverso numerose generazioni e fissato nei discendenti, in modo da comparire generalizzato nella specie. Non pochi esempi si potrebbero recare di forme vegetali anche odiernamente viventi, che ripetono la loro origine dalla trasmissione e fissazione in esse di caratteri *primitivamente* mostruosi, perché devianti dal piano fondamentale della normale struttura degli antenati di quelle: in altri termini, caratteri teratologici dell' individuo possono divenire normali e differenziali della specie.

Ma dove la Teratologia mostrasi feconda dei più preziosi risultati, si é nella determinazione della natura morfologica degli organi e conseguentemente dell' omologia di questi, molte volte riuscendo essa meglio ancora della organogenia, un ottimo sussidio della Morfologia comparata; nei soli casi peró in cui i fenomeni teratologici, sebbene in maniera d' ordinario più o meno irregolare o larvata, siano risolubili in una risurrezione di caratteri atavici. È per questo che la Teratologia é non di rado assai impor-

tante per la Filogenesi delle forme vegetali. Cosí ad es. la manifestazione della diafisi nei fiori delle Angiosperme, la quale è peró sempre congiunta coi caratteri di profonda mostruositá florale, deve interpretarsi come la risurrezione di un carattere atavico antichissimo, conservatosi in via normale nelle Fanerogame solo negl' individui femminei di Cycas e nei brachiblasti femminei di Ginkgo. I fenomeni di cloranzia dei fiori delle Angiosperme, nei quali il Gineceo mostrasi profondamente investito da tale alterazione, hanno dato la irrefragabile prova della vera natura morfologica degli ovuli e degli ovari, giá speculativamente riconosciuta dal Brongniart e poi sí evidentemente dimostrata dal Delpino, dal Cramer, dal Celakovski, dal Velenovski, e da altri; anche in ció vedesi la ripetizione di un carattere atavico antichissimo, che si riferisce alla formazione ed alla metamorfosi di semplici fillomi vegetativi in carpelli; contingenza questa che non si puó trovare che fuori della giurisdizione delle Angiosperme, ossia solo negli antenati, presumibilmente Gimnospermici di queste.

Tacendo dei tanti altri esempi che potremmo recare a conforto di tale argomento, questo solo aggiungeremo che il caso di anomalia florale di Capparis spinosa, di cui ora si procede allo studio, sará una eloquente conferma dell' importanza della Teratologia per la determinazione e valutazione dei rapporti di parentela delle specie vegetali.

Mentre nelle Crucifere e Resedacee sono piuttosto frequenti casi di ecblastesi fioripara od antomaniaca (anomalia questa principale e che distingue a prima vista l' alterazione che siamo per descrivere), nonché in alcune Capparidee (*Cleome*), nella Capparis spinosa é, per quanto mi consta, nota soltanto la fasciazione dei rami, osservata dal Planchon (1), e la pentameria nei cicli florali (Eichler, Enslow).

Il fiore anomalo di Capparis spinosa venne riscontrato nel Giugno u. s. in un individuo vivente nelle vicinanze di Sassari, nel quale tutti gli altri fiori mostravansi completamente normali.

Ció che subito attrae l' attenzione in tal fiore si è la formazione di 4 gemme florali completamente evolute e quindi giá preparate per l' antesi, ascellari ognuna ad un sepalo; per contro il fiore *primario* (terminazione dell' asse primario) trovasi bene espanso, ed in esso riscontrasi un rilevante allungamento della regione talamica fra il petalo posteriore sinistro e gli altri petali. I pedicelli di ogni gemma sono press' a poco di uguale lunghezza e sone lunghi da 24 a 28 mm. — Procediamo ora allo studio del fiore primario e delle 4 gemme florali.

---

(1) Planchon in Bull. Soc. Bot. France; IV, 1857;pag. 623.

1. Fiore primario. — I sepali presentano l'orientazione reciproca caratteristica delle specie di Capparis spettanti alla sezione *Eucapparis*, cioè sono a prefiorazione embricata per cui i sepali laterali sono coperti dai mediani, fatto questo ancor più evidente nelle gemme. Nel resto, la loro dimensione, forma e disposizione rispetto all' asse florale é normale; in seguito a ciò ed anche per congrui caratteri specialmente della corolla, il fiore presentasi mediano-zigomorfo con sviluppo anteriore.

Dopo la formazione dei sepali e del petalo sinistro posteriore il quale presentasi normale, la regione talamica si allunga per 8 mm. e $^1/_2$ circa, pur conservando press'a poco la sua normale grossezza, in un pedicello lievemente ciliato, depresso secondo l' asse laterale del fiore, appiattito nella propria faccia anteriore ed alquanto convesso nella posteriore. Tale pedicello, leggermente inclinato in avanti, termina ottusamente in una specie di piccola emergenza giallastra, irregolarmente tondeggiante (di circa 1 mmq. di superficie), la quale discende per breve tratto sulla superficie anteriore del pedicello. Attorno a quest' emergenza, la quale non è che il nettario, stanno con caratteri normali di posizione e di forma, i due petali anteriori ed il petalo posteriore destro. Adunque la topografia del nettario è normale, trovandosi in corrispondenza del sepalo anteriore, più grande degli altri, il quale, com' è noto, funge da nettaroconca; il margine anteriore dei petali anteriori è evidentemente incrassato, divaricato in basso e lievemente introflesso, per costituire una specie di apertura d' uscita del nettare. Da tutto ciò devesi concludere che l' orientazione e la disposizione generale dell' apparato biologico florale si è conservata inalterata. — Sebbene si mantenesse per molti giorni il fiore col peduncolo immerso nell' acqua, giammai potei constatare nel nettario la menoma secrezione.

La sommità del pedicello, nella quale trovasi il nettario, non è che l' apparente apice morfologico di quello; il vero apice vegetativo, ossia la punta incrementale del pedicello florale, è situato posteriormente ad 1 mm. circa sotto il nettario. In questa regione osservasi una prominenza conica a larga base e molto depressa, che dà inserzione all' Androceo e che continuasi nel Ginoforo; quest' ultimo, inclinato in addietro, descrive col peduncolo florale un angolo di circa 120°.

L' irregolarità di accrescimento della regione talamica, mentre spiega il dislocamento della vera sommità vegetativa del peduncolo florale, dà altresì ragione dello sviluppo abnorme della superficie occupata dagli stami e del consecutivo rilevante disordine e spostamento in cui questi si trovano. Infatti non è più possibile rintracciare i cicli staminali; gli stami sono densamente stipati in una superficie irregolarmente triangolare, la cui base è situata subito dietro il nettario, e la porzione apicale discende per breve

tratto sulla faccia posteriore del pedicello, dietro l' inserzione del Ginoforo, come si può vedere nel diagramma *A*, della tavola qui annessa. Gli stami sono dunque più specialmente accumulati posteriormente alla base del Ginoforo ; quelli poi che sono più approssimati alla base di questo, tendono a salire in spirali disordinate attorno detta base. — Gli stami sono normali.

Dal mezzo della massa staminale s' innalza il Ginoforo alla cui sommità evvi l' ovario ; tanto questo che quello si mostrano esternamente normali. L' ovario è 6-carpellare, e rispetto all' orientazione dei carpelli questo puossi notare, che il verticillo componesi di 2 carpelli mediani e fra loro opposti, e di 4 carpelli diagonali (vedi diagramma *A*), tutti insieme riuniti in una specie di verticillo esamero.

Praticata con cautela un' incisione longitudinale in un lato della parete dell' ovario, dall' apice fino alla base di questo, ed allontanati i due bordi onde mettere a nudo la cavità ovariana, fatti molto interessanti si presentano all' osservazione.

Anzitutto nel fondo dell' ovario, la cui placentazione puossi considerare come normale, sebbene i margini placentari non si addentrino che per breve tratto, rilevasi una piccola prominenza o papilla semiglobosa, il cui diametro verticale è circa $^1/_3$ di mm., ed ai due lati della quale e quasi oppositamente si sono sviluppate due piccole foglie carpellari, distinte in picciuolo ed in lamina. Ambo questi carpelli, laterali rispetto al piano mediano del fiore, mostransi aperti ed alterni coi carpelli diagonali della parete dell' ovario, e sono lunghi circa 14 dmm. ; il loro apice è terminato da una papilla nerastra piuttosto acuminata, che sta a denotare lo stigma.

Nella fogliolina meglio differenziata, è evidentissimo un peziolo estendentesi $^1/_3$ della lunghezza dell' intero carpello : tale peziolo è cilindrico e nella parte inferiore è saldato colla parete dell' ovario ; la porzione laminare è tutta libera, è larga dmm. 2 $^1/_2$, ed ai suoi margini riscontrasi una fila di ovuli densamente stipati. L' altra fogliolina presenta il peziolo alquanto più breve ed interamente saldato alla parete ovariana, ed i margini di essa sono ovuliferi come nell' altro carpello. Notisi poi che gli ovuli sono evidentemente disposti a gruppi, separati da intervalli irregolari, il che starebbe a denotare un principio di una ramificazione pennata della lamina carpidiale.

Adunque, il punto vegetativo dell' asse florale, dopo aver formato un ovario esamero ed a carpelli fertili, non si è arrestato nel suo sviluppo, ma per iperfisi o sopranumerazione ha prodotto due carpelli indipendenti reciprocamente dopo che, detto apice mortificasi completamente. Questa formazione è evidentemente subordinata ad una diafisi carpidiofora in detto punto vegetativo. — Gli ovuli tanto dei carpelli sopranumerari, che di quelli costituenti l' ovario, sono perfettamente normali.

Ci restano alcune poche cose a dirsi sulle alterazioni istologiche del nettario, il quale, come s' é detto, non é più riconoscibile macroscopicamente che per presentarsi sotto forma di un cuscinetto giallognolo, a superficie lucente. Nei nettari dei fiori normali osservasi un' epidermide composta di cellule brevemente prismatiche, a parete esilissima e cellulosica, le quali, nel mezzo della foveola, presentansi più lunghe e sono per regola biloculari; tali cellule contengono un nucleo in istato di disfacimento più o meno inoltrato, e poco plasma piuttosto acquoso. Il parenchima secernente è formato da elementi poliedrici più o meno regolari a parete cellulosica, i quali contengono un plasma granuloso, molto refrangente la luce e con un nucleo in generale ben poco manifesto; questo plasma come quello delle cellule epidermiche contiene notevoli quantità di glucosio. La secrezione del nettare effettuasi mediante il distacco, sollevamento e lacerazione dello strato cuticulare involgente le cellule epidermiche, il che é determinato da una metamorfosi gelatinosa degli strati della membrana esterna delle cellule epidermiche, sottostanti immediatamente alla cuticola; contingenza questa osservata con una certa frequenza nei nettari si mesogamici che estranuziali, ed in tutto simile alla « *collagenbildung* » degl' istologi tedeschi. — Ora, nel nettario anomalo del fiore primario, notasi un' epidermide in tutti i punti formata da cellule quasi cubiformi, talora peró con lieve tendenza ad acquistare forma cilindrica; la cuticola é molto spessa; il plasma del tessuto sottostante e quello delle cellule epidermiche, é molto denso, accentuatamente proteico, contiene traccie di glucosio, ed un nucleo bene differenziato. Come s' é detto, questo nettario giammai presentossi in istato di secrezione ; la mancata « *collagenbildung* » necessariamente collegata colle accennate alterazioni isto-fisiologiche degli elementi secernenti, dà ragione dell' avvenuta soppressione della funzionalità.

2. Gemma florale anteriore. — Anzitutto premettiamo che all' aspetto esteriore tutte e quattro le gemme appaiono normali ; la prefiorazione e gli altri caratteri del calice e della corolla sono pure normali. — Fatta eccezione di una leggerissima introflessione dei margini placentari dell'ovario (1) (6-carpellare), detta gemma devesi considerare come interamente normale, (diagramma *B*).

Notisi poi che l' orientazione dei carpelli di questa gemma presenta una notevole inversione in confronto a quella dei carpelli del fiore primario;

(1) L' ovario normale di C. spinosa è diviso in 7 od 8 loggie, mediante esili sepimenti radiali, che si uniscono nell' asse longit. dell' ovario in una specie di inspessimento cilindrico, e che portano sulle loro due faccie un numero indefinito di ovuli campilotropi. (H. Baillon — Histoire des plantes. Tome 3°; Paris, 1872, pag. 152).

perchè qui si hanno 2 carpelli laterali e fra loro opposti, due carpelli anteriori e due posteriori.

3. Gemma florale posteriore. — In questa, come nelle gemme seguenti, le alterazioni sono circoscritte ai soli organi sessuali. — Gli stami sono localizzati nella porzione posteriore della regione talamica, sono normali ed ascendono a 11 ; lungo la porzione marginale anteriore del petalo destro anteriore in contiguità col bordo incrassato di questo, osservasi la concrescenza di uno stame in cui è avvenuto l' aborto di una loggia (diagramma *C*) ; notisi però che l' antera si è conservata introrsa. L' ovario è uniloculare e tricarpellare, di cui un carpello mediano posteriore, e due laterali anteriori ; esso termina con uno stigma nerastro, e gli ovuli si mostrano affatto normali.

4. Gemma florale sinistra. — Anche in questa l' androceo ha subito una notevole riduzione nel numero dei suoi membri, essendo costituito da un gruppo di 11 stami normali, che sta posteriormente al Ginoforo ; ad ambo i lati di questo (il quale nella gemma è lungo 3 mm. circa) rilevasi saldato un esile cordoncino biancastro, che dalla base del Ginoforo, prolungasi fino a circa il 3° inferiore dell' ovario, per poi terminare in un' antera (diagramma *D*). L' antera dello stame sinistro è rudimentale essendo ridotta a due loggie assai imperfettamente differenziate ognuna nei sacchi pollinici ; è verde in alto e quivi confondentesi col tessuto della foglia carpellare, e rossiccia in basso ; nel mezzo di essa notasi un solco longitudinale appena pronunciato. L' antera dello stame destro è maggiormente sviluppata ed è fertile, quantunque scarsamente pollinifera.

Nell' angusto spazio che è fra la base del Ginoforo ed il nettario, si riscontrano due stami nei quali è avvenuta una completa soppressione della funzione maschile, avendo assunta quella femminile, però sotto una forma singolarmente abnorme. In tale regione si hanno due esili filamenti verdognoli reciprocamente liberi ed indipendenti dal Ginoforo e dall'ovario (diagramma *D*), i quali alla propria sommità si decompongono o si ramificano in parecchie lacinie lineari, ognuna delle quali porta all' apice un ovulo. La maggior parte degli ovuli è normale ; però in alcuni di questi si può osservare (vedi la fig. *G*) un arresto nello sviluppo, pel quale la nucella si è costituita avvolta alla base dall' integumento interno che tende a coprirla interamente (fig. *G*, *a*) ; in altri casi, il sacco embrionale, quantunque la rimanente parte ovulare presentisi normale, si mostra completamente abortito ; infine, non di rado osservasi che la nucella tende a divenire ortotropa, unitamente all' integumento interno, mentre quello esterno

assume la solita e normale orientazione campilotropa. Quest' ultima anomalia (fig. *G*, *b*) adunque sempre collegata ad un certo grado di ortotropicità della nucella e dell' integumento interno, e per la quale l' endostomio e l' esostomio del micropilo non si corrispondono, insegna che lo sviluppo dell' ovulo proceduto in modo abnorme fino alla costituzione dell' invoglio interno, appare normale collo sviluppo dell' integumento esterno. — Come era da aspettarsi, i filamenti che portano all' apice gli ovuli, conservano maggiormente la loro natura fogliare in confronto ai veri funicoli degli ovari normali; sono costituiti da un' epidermide bene differenziata e da un mesofillo ricco di granuli di clorofilla, ed il loro asse longitudinale é percorso da uno o da pochissimi tracheidi.

L' ovario è molto deformato, il numero e l' orientazione dei carpelli è identico a quello della gemma precedente; esso ha forma cilindroide ed è lungo mm. 2 $1/2$, con questa complicazione peró che le tre foglie carpellari sono nel loro terzo superiore reciprocamente disgiunte od adesmiche, per terminare ognuna in uno stigma libero.

5. Gemma florale destra. — In questa gemma in cui si rilevano alterazioni molto più profonde, anzitutto riscontrasi il fatto importante che il peduncolo della gemma dalla propria origine é saldato con quasi tutto il tratto della regione talamica primaria emersa dopo la formazione dei 4 sepali e del petalo posteriore sinistro.

Gli stami sono raccolti nella sola parte posteriore del talamo, subito dietro la base del Ginoforo, e sono in numero di 18; nel maggior numero di essi l' antera é in vario grado abortita, fino ad essere ridotta ad una minutissima papilla quasi triangolare e talora quasi romboidale, incolora o leggermente rosea, apicale al filamento, costituita da tessuto parenchimatoso con sacchi pollinici arrestati in una delle loro prime fasi evolutive.

Anteriormente al Ginoforo, si riscontrano due stami, insieme contigui come nella gemma precedente (diagramma *E*) ed il cui filamento é completamente saldato col Ginoforo stesso e con parte del bordo anteriore dei 2 carpelli laterali. Circa alla metà della propria lunghezza il filamento staminale si fraziona in esili lacinie, che all' apice danno origine ognuna ad un ovulo. La specie di grappoletto di ovuli che cosi si forma, giunge fino alla metà circa dell' ovario. Gli ovuli presentano press' a poco le alterazioni notate per quelli prodotti dagli stami convertiti in carpelli, nella gemma florale sinistra. — Sezionando trasversalmente detti filamenti laciniati ed ovuliferi, unitamente ai carpelli ad essi coaliti, si riscontrano bene distinti e senza alcun rapporto fra loro il fascio vascolare proprio de' filamenti e quello del margine placentario dei carpelli, sebbene questo si addimostri sterile. Questo fatto viene in appoggio alla data interpreta-

zione della natura morfologica delle descritte formazioni filamentose di questa gemma e di quella sinistra, per cui devesi escludere l'ipotesi di una estroflessione del margine placentario anteriore dei carpelli laterali. Il fascio vascolare di questi filamenti, mantiensi poi sempre indipendente da quello del Ginoforo.

L'ovario è verde come nelle altre gemme, è lungo 3 mm. e largo in alto mm. 1 $^1/_2$, in basso $^2/_3$ di mm., quindi ha forma triangolare colla base in alto e l'apice in basso, ed è depresso cospicuamente tangenzialmente all'asse trasverso della gemma florale. Esso è aperto ed è formato da due verticilli dimeri fra loro decussati: il 1° è esterno e laterale, il 2° interno e mediano; ciascun carpello termina con una papilla nericcia. I carpelli laterali sono l'un l'altro completamente liberi nel loro margine posteriore, e congiunti insieme solo per brevissimo tratto del loro bordo anteriore (fig. *E'*); dei carpelli mediani, il posteriore è del tutto libero, l'anteriore invece fonde i proprii margini colla superficie interna dei carpelli laterali; per cui questi anche dopo essersi resi reciprocamente apostatici, continuano ad essere collegati coll'intermediario del carpello anteriore mediano (diagramma *E*). I carpelli laterali sono sterili; quelli interni sono normalmente ovigeni; gli ovuli sono normali se si fa eccezione di una lieve tendenza, osservata in alcuni casi, all'ortotropicità.

La fig. *F* dà un'esatta idea dell'orientazione di ciascuna gemma florale, nonchè della disposizione generale di queste attorno al fiore primario.

I fatti teratologi ora descritti si possono riassumere nei seguenti:

1.° Ecblastesi fioripara all'ascella dei sepali del fiore primario.

2.° Allungamento diafitico della regione talamica del fiore primario, dopo la formazione dei sepali e del petalo sinistro posteriore.

3.° Concrescenza del pedicello della gemma florale destra con questo tratto emerso del talamo del fiore primario.

4.° Rilevante disordine nella disposizione della Corolla e dell'Androceo del fiore primario, consecutivo all'irregolare accrescimento del talamo.

5.° Diafisi carpidiofora nel fiore primario, la quale si risolve in una Iperfisi nel Gineceo di questo.

6.° Unilocularità dell'ovario del fiore primario e delle gemme anteriore, posteriore e sinistra, perchè l'introflessione dei margini placentari trovasi arrestata nella sua fase incipiente.

7.° Depauperazione per aborto nel numero degli stami nelle gemme posteriore, sinistra e destra.

8.° Concrescenza degli stami colla Corolla, nella gemma florale posteriore, e col Gineceo in quella sinistra e destra.

9.° Stami metamorfizzati in carpelli fertili, nelle gemme sinistra e destra.

10.° Riduzione per aborto nel numero dei carpelli, osservata nelle gemme posteriore, sinistra e destra.

11.° Sterilità del verticillo carpellare esterno nella gemma destra.

12.° Adesmia più o meno pronunciata nei carpelli della gemma sinistra e destra.

13.° Alterazione macro-e microscopica del nettario.

14.° Alterazioni negli ovuli prodotti dagli stami commutati in carpelli, nelle gemme sinistra e destra.

Ma il nostro studio riuscirebbe incompleto, qualora non si procedesse all' indagine della natura e dell' importanza dei principali fatti teratologici ora rilevati, mettendo questi in rapporto colla caratteristica generale o col piano fondamentale di struttura florale della Famiglia delle Capparidee. Solamente in questo modo, potrassi dare una migliore interpretazione al valore morfologico e filogenetico dei suddetti fenomeni; se non che, per la natura stessa di tale studio e per la speciale caratteristica di alcune anomalie qui osservate, non sempre le conclusioni che trarremo, potranno avere quel grado di certezza che sarebbe necessario, affinchè da queste possano scaturire efficaci induzioni morfologiche e filogenetiche.

Non potendosi ritenere abbastanza accertati i fatti osservati da C. A. AGARDH nel *Glaucium phoeniceum* (1) e dal PAYER nella *Bocconia frutescens* (2), secondo i quali potrebbesi indurre essere avvenuto uno sdoppiamento negli stami mediani, le Papaveracee deviano non poco per la costituzione e la fillotassi del loro Androceo dalle altre Readine. Prescindendo adunque da questa famiglia la quale, pei caratteri dell' Androceo e per alcuni altri fatti, realizza certamente il gruppo più antico delle Readine, le Fumariacee, le Crucifere e le Capparidee (3) sono famiglie molto affini, il cui piano di struttura florale risponde ad un unico tipo; si possono ritenere come forme collaterali (le più antiche delle quali sono evidentemente le Fumariacee) discese da uno stipite più antico, ora certamente scomparso, che doveva avvicinarsi alle Berberidee e riunire in sè caratteri che ora si trovano sparsi nelle forme suddette; molto probabilmente questa contingenza si riscontra nel gen. *Epimedium* delle Berberidee, sì perchè gli stami dei fiori di questo sono 4, sì pei 4 centri biologici florali che vi si possono ammettere, come pel pistillo monomero e pel speciale modo di deiscenza di questo, che sì bene rammenta quanto avviene nelle Crucifere, in molte Capparidee, Papaveracee e Fumariacee.

---

(1) Vedi Flora; 1836, pag. 19.

(2) PAYER — Traité d' organogénie de la fleur. 1858. — (EICHLER — Blüthendiagramme; Zweiter Theil, pag. 190).

(3) Le Resedacee sono molto vicine alle Capparidee; astrazion fatta da altri caratteri affini,

La fondamentale architettonica florale di queste famiglie puossi, com' é noto, ricondurre al tipo esaciclico dimero, sebbene vi siano parecchie forme che si appalesano ricalcitranti ad un tal tipo. Il gen. *Hypecoum* é singolarmente istruttivo per l' intelligenza dei fatti di raddoppiamento dei 2 stami mediani; mentre pei caratteri dei suoi frutti, si rendono possibili interessanti avvicinamenti con forme delle altre famiglie Readine.

La caratteristica e lo sviluppo dell' apparato biologico florale presentansi in modo molto diverso; infatti, questo puó essere dicentrico trasversalmente (es. *Dicentra formosa*), monocentrico trasversalmente (es. *Corydalis cava*, in cui é sviluppato il solo centro sinistro), dicentrico nel senso antero-posteriore (es. Crucifere), monocentrico anteriormente (es. serie delle *Capparis*), monocentrico posteriormente (es. serie dello *Cleome*). Anzi, sotto questo punto di vista, riguardo alla costituzione delle Capparidee parrebbe necessario ammettere abbia esistito un prototipo di questa famiglia, il quale possedesse due centri biologici florali, uno anteriore ed uno posteriore; coll' aborto del centro anteriore sarebbesi concretata la serie delle *Cleome*, coll' aborto dell' altro centro quella delle *Capparis*. Cosi avrebbesi la razionale spiegazione della costituzione di questi 2 gruppi naturalissimi in cui ponnosi dividere le Capparidee (1). — Riferendoci poi sempre alle Capparidee, l' architettonica florale di queste puossi benissimo ricondurre a quella caratteristica delle Fumariacee e Crucifere, anche per quanto é stato osservato nei gen. *Cleome*, *Physostemon*, *Gynandropsis*, *Cleomella*, *Wislizenia*, *Isomeris*, ecc. (2): il caso più accentuato di poliandria, il quale riscontrasi nel gen. Capparis ed in specie di altri generi della stessa famiglia, é ascrivibile a sdoppiamento di tutti i 4 stami del piano fondamentale del fiore (3).

---

e specialmente dalla placentazione parietale, l' orientazione e la disposizione generale dell' apparato biologico florale si approssima singolarmente a quella della serie delle Cleome (nettario posteriore), per cui potrebbero essere collocate accanto alle Capparidee, sebbene la loro architettonica florale devii sotto più di un aspetto da quella principale delle Readine.

(1) Sono lieto di aver constatato che queste conclusioni concordano in parte coi risultati d' uno studio (inedito) del Sig. Umberto Caroncini, fatto nell' Istituto botanico dell' Università bolognese.

(2) Mentre nella Cleome tetrandra e C. droserifolia, nonchè in alcune altre specie di questo genere, l'Androceo è formato da 2 verticilli dimeri di stami (uno mediano e l' altro laterale), nella maggior parte delle specie di Cleome, nei gen. Gynandropsis, Steriphoma ed altri, si hanno 6 stami per l' avvenuto sdoppiamento del verticillo staminale superiore o mediano. — A questo aggiungasi che la comparazione del perianzio delle Capparidee e delle Crucifere con quello delle Fumariacee, indurrebbe la convinzione che il calice delle prime due famiglie non sarebbe già di origine genuinamente *primaria* (come ad es. negli Ellebori, le cui foglie calicine provengono evidentemente dalla metamorfosi delle superiori foglie vegetative), ma bensì alla sua formazione avrebbe contribuito la metamorfosi sepalizzante nei petali laterali od esterni delle Fumariacee. Filogeneticamente adunque, il calice di dette famiglie discenderebbe dai primi due cicli dell' invoglio florale delle Fumariacee, dei quali l' esterno, sepalino, è stato ereditato cogli stessi caratteri sepaloidei, l' interno ha sùbito l' accennata modificazione.

(3) Il diagramma florale che dà il Baillon (Histoire des Plantes, Tome 3^{e}, pag. 152) del fiore

Ciò premesso, traendo ora in campo le principali anomalie dianzi descritte, non si può anzitutto passare sotto silenzio l'allungamento del tratto della regione talamica del fiore primario, interposto fra il petalo sinistro posteriore e gli altri petali; questo fatto noi l'interpretiamo come un'insigne riproduzione quantunque abnorme degli allungamenti internodali che si riscontrano sì frequentemente e con varia modalità nelle Capparidee: ad es. fra il perianzio e l'Androceo nei gen. Gynandropsis e Maerua, fra l'Androceo ed il Gineceo nelle Capparis. Nelle Capparidee osservasi un'indubbia tendenza ad un tale fenomeno.

Riguardo poi alle altre alterazioni, hanno uno speciale interesse quelle dell'Androceo delle gemme florali posteriore, sinistra e destra; e del Gineceo della gemma destra e del fiore primario.

Nella gemma sinistra osserviamo che l'Androceo è distinto in 4 gruppi ben delineati: un gruppo di 11 stami situato posteriormente al Ginoforo, 2 stami saldati a questo uno per lato, e due stami anteriori aberranti, nei quali si è concretato un pervertimento nella funzione maschile colla incarnazione della funzione femminile. Qualora si potessero interamente escludere fenomeni di spostamento nei membri di un Androceo tanto alterato, una simile disposizione riuscirebbe sommamente istruttiva per la filogenesi della sezione delle *Capparee*; infatti, ne emergerebbe direttamente la razionale conseguenza che il gruppo posteriore degli 11 stami sia il prodotto della moltiplicazione (sdoppiamento) dello stame mediano posteriore della tipica struttura fondamentale delle Capparidee. I due stami laterali rappresenterebbero il verticillo laterale ed esterno conservatosi indiviso; quelli anteriori risulterebbero dallo sdoppiamento dell'unico stame mediano anteriore. In questo modo avrebbesi un'evidente riversione al piano fondamentale della struttura florale delle Capparidee.

Nella gemma destra le alterazioni sono più accentuate. Sempre nel precedente ordine di idee, avrebbesi la completa soppressione per aborto del verticillo laterale di stami ed una più rilevante moltiplicazione dello stame posteriore (che produrrebbe 18 membri): dunque, l'Androceo ripeterebbe la sua origine solo dallo stame posteriore e da quello anteriore.

Infine, l'Androceo della gemma posteriore sarebbe dato dai due medesimi stami, dei quali il posteriore avrebbe di nuovo prodotto 11 membri come nella gemma sinistra, insigne concordanza questa certamente prodotta dall'azione delle stesse cause di compressione o di altro in ambo le gemme; lo stame anteriore (qualora non si voglia ammettere l'aborto del-

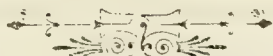
---

di Capparis spinosa è inesatto, perchè non è ammissibile secondo le leggi fillotassiche che gli stami siano disposti in cicli come egli li disegna; infatti, il ciclo più esterno è molto numeroso, gli altri lo sono progressivamente meno; l'isomeria e l'alternanza dei membri dei cicli successivi, invano si cercano nella detta figura di Baillon.

l' altro stame prodotto per sdoppiamento) sarebbe rimasto indiviso ed in seguito ad irregolare spostamento sarebbe concresciuto col petalo anteriore destro. In tal modo, l' Androceo di questa gemma, rappresenterebbe ugualmente la forma tipica.

Riguardo alle alterazioni del Gineceo, nella gemma destra oltre ad una notevole depauperazione nel numero dei membri componenti quello (la quale riscontrasi in grado più accentuato e sotto forma di un verticillo trimero nella gemma posteriore e sinistra), si ha che il talamo dopo aver formato il verticillo dimero esterno o laterale e sterile, caratteristico del tipo florale delle Capparidee, continua il suo incremento producendo un secondo verticillo dimero fertile e mediano. Nel fiore primario invece, il talamo forma dapprima un verticillo esamero di carpelli, la cui fillotassi é ordinata in modo da aversi 2 carpelli mediani e 4 diagonali : in questa disposizione già manifestamente compare per così dire la fase iniziale della riproduzione del *tipico* carattere del Gineceo delle Capparidee ; infatti, la regione talamica forma poscia due carpelli laterali liberi e fertili, i quali sono *alterni* coi carpelli corrispondenti dell' ovario. — In questi fatti tanto importanti, chi non vede la risurrezione della fondamentale e tipica struttura del Gineceo degli antenati delle Fumariacee, Crucifere e Capparidee, perpetuatosi in tanti rappresentanti di queste famiglie ?

Con un complesso però di anomalie il più delle volte sì gravi e profonde, mostrasi sommamente interessante il fatto che tanto nel fiore primario che nelle 4 gemme florali, si é conservata totalmente inalterata l' orientazione e la disposizione generale dell' apparato biologico florale, il quale nella Capparis spinosa é mediano-zigomorfo e presenta uno sviluppo unilaterale-anteriore ; il nettario é dunque sempre anteriore ed in esatta corrispondenza col sepalo anteriore più grande degli altri, il quale funge da nettaroconca.

Laboratorio di Botanica della R. Università di Sassari. — Giugno 1890.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Dalla fig. *A* alla fig. *F*, si ha la rappresentazione dei diagrammi empirici del fiore primario mostruoso di *Capparis spinosa* L., delle gemme florali ascellari ai sepali di questo, nonchè dell'intera infiorescenza che così si è costituita. In tutte queste figure, le profille sono rappresentate teoricamente da linee punteggiate.

Fig. *A*. — Diagramma del fiore primario colla foglia ascellante. In tal fiore, essendo questo bene sviluppato ed espanso, i sepali sono disegnati nella loro caratteristica forma navicolare; il sepalo anteriore è più grande degli altri in causa della funzione biologica cui deve adempiere; i sepali mediani essendo anche esterni, sono disegnati a maggior distanza dal centro del fiore, in confronto a quelli laterali. Il nettario osservasi deformato; e notasi alterata la disposizione degli stami. Il pistillo è 6-carpellare e nel suo mezzo si scorgono 2 carpelli laterali reciprocamente liberi ed ovuliferi.

Fig. *B*. — Diagramma della gemma florale anteriore. In questa, come nelle altre gemme, i sepali sono disegnati secondo la forma e disposizione che hanno nelle gemme stesse; le foglie ascellanti di tutte queste, sono i sepali del fiore primario.

Fig. *C*. — Diagramma della gemma posteriore. In esso rilevasi più specialmente 1.° una notevolissima depauperazione nell'Androceo; 2.° la circoscrizione di questo nella parte posteriore della regione talamica; 3.° la concrescenza dello stame anteriore col petalo destro anteriore; 4.° oligomería nel Gineceo.

Fig. *D*. — Diagramma della gemma sinistra. Esso dimostra 1.° depauperazione nell' Androceo; 2.° concrescenza di due stami laterali, uno per lato al Gineceo; 3.° due stami anteriori liberi e trasformati in carpelli ovuliferi; 4.° oligomeria del pistillo.

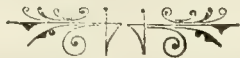
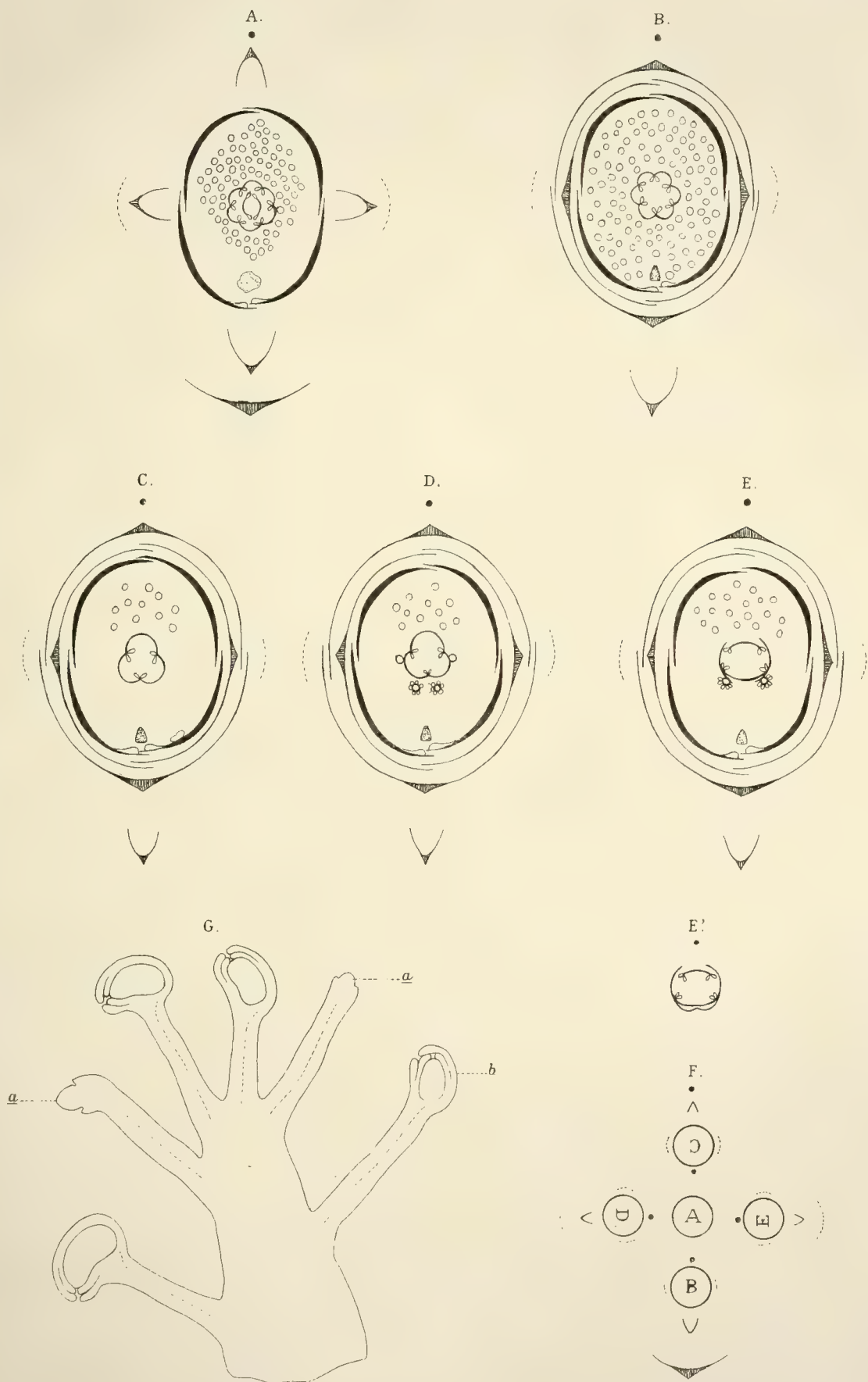
Fig. *E*. — Diagramma della gemma destra. Si nota 1.° oligomeria nell'Androceo; 2.° due stami anteriori saldati esternamente ai carpelli laterali, nel bordo anteriore di questi; tali stami sono metamorfizzati in carpelli ovuliferi; 3.° il pistillo costituito da due verticilli dimeri, dei quali uno esterno, laterale e sterile, uno mediano, interno e fertile. Il carpello anteriore insieme collega il margine anteriore dei due carpelli laterali.

Fig. *E'*. — Diagramma della porzione inferiore dell' ovario della precedente gemma. I carpelli laterali sono reciprocamente uniti pei loro margini, indipendente dal carpello anteriore.

Fig. *F*. — Rappresentazione schematica della disposizione ed orientazione generale dell' infiorescenza mostruosa costituitasi col fiore primario. *A*, fiore primario; *B*, gemma florale anteriore; *C*, gemma posteriore; *D*, gemma sinistra; *E*, gemma destra. In tale figura, oltre la foglia ascellante del fiore primario, si notano le profille di questo, i sepali ascellanti delle quattro gemme florali e le profille di queste.

Fig. *G*. — Porzione terminale di uno stame ramificato in lacinie ovulifere, della gemma sinistra. Le ramificazioni del filamento portano all'apice gli ovuli a diverse fasi evolutive, nei quali riscontransi parecchie delle alterazioni descritte nel presente lavoro. La linea punteggiata che percorre l' asse longitudinale di ciascuna ultima ramificazione filamentosa, rappresenta un fascio di tracheidi.

F. Morini, dis.

lit. G. Wenk e Figli – Bologna

SUL MODO DI CONFERIRE AD ALCUNI ANIMALI

L'IMMUNITÀ CONTRO IL TETANO

COMUNICAZIONE

DEL PROF. GUIDO TIZZONI E DELLA D.SSA GIUSEPPINA CATTANI

(letta nella Seduta dell' 11 Gennaio 1891)

In un nostro precedente lavoro (1), nel quale abbiamo esposto i resultati da noi ottenuti studiando le proprietà del veleno del tetano, abbiamo ancora riferito come ci fossero riuscite infruttuose le ricerche da noi iniziate per rendere gli animali immuni contro l' infezione tetanica, e ciò, sia valendoci di colture attenuate, sia cercando di abituare l' organismo al veleno del tetano, iniettando minime dosi di questo veleno o colture filtrate, la cui tossicità fosse stata diminuita col calore, cogli acidi minerali ecc.

Da allora non abbiamo tralasciato di eseguire ricerche sulla immunità e sulla cura del tetano, sempre tentando nuove vie per arrivare allo scopo.

Di queste ricerche vogliamo appunto render conto nella presente nota; prima però ci piace, come di dovere, riferire le principali conclusioni di un' importante comunicazione sullo stesso argomento, pubblicata in questi ultimi giorni dai dottori Behring e Kitasato (2). Questi AA., mercè una antecedente preparazione con tricloruro di Iodio, sono riusciti a rendere immune al tetano un coniglio, ed hanno trovato che il sangue o il siero del sangue di questo coniglio, mescolato con colture di tetano filtrate, dopo

---

(1) Tizzoni e Cattani. Untersuchungen über das Tetanusgift. Arch. f. experim. Pathologie und Pharmakologie. Bd. XXVII pag. 432 e seg.

(2) Behring e Kitasato. Ueber das Zustandekommen der Diphterie-Immunität und der Tetanus-Immunität bei Thieren. Deutsche. Med. Wochenschrift N. 49, 4. D.bre 1890.

20 ore le priva della loro tossicità: iniettato ai topi nel cavo peritoneale in piccola quantità (0.2—0.5 ccm.), conferisce a questi animali una durevole immunità contro successive iniezioni di colture del tetano virulente o filtrate che sieno: questo siero, inoltre, iniettato nei topi già tetanizzati, ha il potere di far cessare a poco a poco i fenomeni tetanici anche molto avanzati restituendo in quattro o cinque giorni gli animali a perfetta salute.

Le nostre ricerche si possono dividere in due serie. In una prima serie, noi abbiamo studiato in vitro l' azione di varie sostanze chimiche sul veleno del tetano; e quelle che in tali condizioni riuscivano ad annullarne la tossicità, abbiamo cercato se corrispondessero egualmente bene adoperandole per prevenire e per curare il tetano sperimentale. In una seconda serie di ricerche, abbiamo utilizzata la minore ricettività per l' infezione tetanica, che avevamo constatato in certe specie animali.

Nella prima serie di queste nostre indagini, abbiamo sperimentato un numero grandissimo di sostanze, ma quasi tutte (tra l' altre anche quelle che danno un abbondante precipitato, come il nitrato d'Ag., il Sublimato, l'acido iodidrico, ecc) pure dopo lungo contatto (24 h.) non modificano per niente la tossicità delle colture di tetano filtrate. Le sole sostanze che abbiamo trovate attive in questo senso, sono l' ac. fenico, l'acqua di cloro ed il tricloruro di Iodio.

L' acqua di cloro, di fresco preparata, ed il tricloruro di Iodio in soluzione acquosa al 2 %, fatti agire per 24 ore su quantità eguali di coltura di tetano in gelatina filtrata e poi ridotta per evaporazione al vuoto ad un terzo del suo volume primitivo (1), la rendono del tutto innocua.

L' acido fenico in soluzione al 5 %, messo in contatto con eguali volumi di coltura del tetano filtrata, la priva della sua tossicità in un tempo relativamente breve (3 ore ad esempio), mentre invece soluzioni più deboli al 3 al 4 %, nemmeno dopo 24 ore di contatto, annullano la tossicità di esse colture. Nessuna però di queste 3 sostanze, ripetutamente iniettata sotto cute nei topi e nei conigli, sia prima sia dopo l'iniezione di colture di tetano virulente o filtrate, valse ad impedire o a far cessare in questi animali lo sviluppo dei fenomeni tetanici.

Nella seconda serie di ricerche abbiamo mirato a rendere del tutto immuni contro il tetano alcuni animali (piccione, cane) che da lungo tempo si trovavano in esperimento nel nostro laboratorio e che ci avevano già dimostrata poca ricettività per l' infezione tetanica.

Infatti i piccioni, almeno quelli su cui noi abbiamo sperimentato, dopo

---

(1) In questo lavoro, nell' indicare la quantità di coltura filtrata da noi iniettata, ci riferiamo sempre a colture ridotte a un terzo del loro volume primitivo.

l' iniezione di discreta quantità di coltura di tetano virulentissima non muoiono d' infezione tetanica, ma presentano solo fenomeni locali transitori, e dopo un tempo più o meno lungo si ristabiliscono del tutto. Ripetendo le iniezioni con virus o con veleno tetanico, i piccioni presentano ad ogni iniezione successiva fenomeni sempre meno gravi ed in ultimo non reagiscono più affatto, nemmeno ad una quantità relativamente notevole di virus o di veleno tetanico.

Come ai piccioni così ai cani, si può conferire immunità contro il tetano, mercè iniezioni sottocutanee ripetute e a dosi crescenti di virus tetanico, purchè la dose iniziale sia piuttosto piccola, come fu dimostrato per la prima volta dal Dott. Parietti.

A questo modo noi abbiamo potuto rendere immuni per il tetano due piccioni e un cane e stabilire i fatti seguenti. Il siero del sangue del cane immune, raccolto nel modo solito e messo in vitro a contatto con colture di tetano in gelatina filtrate, ha il potere di annullarne completamente la tossicità, anche quando la quantità di siero sia molto piccola (1-2 goccie p. e. per $^1/_2$ c.m di coltura) ed il contatto molto breve (15-20 minuti). La innocuità delle colture così trattate l' abbiamo constatata con ripetute prove nei topi e nei conigli.

L' iniezione sottocutanea di una piccola quantità di siero del sangue di questo cane serve a trasmettere ad altri cani l' immunità contro il tetano anche quando si inietti una quantità di coltura certamente mortale per cani non preparati.

I topi bianchi per l' iniezione sottocutanea o endoperitoneale di piccole quantità di esso siero ($^1/_2$ cmc.) sono resi immuni all' azione delle colture del tetano virulente o filtrate, anche iniettate ripetutamente a diversi intervalli e in dose superiore a quella che basta ad uccidere in breve tempo gli animali di controllo. Così ad es., mentre due goccie di coltura del tetano filtrata uccidono un topo in 30 ore circa, $^1/_3$ di ccm. della stessa coltura non ha alcuna azione su topi antecedentemente trattati col siero del sangue di cane immune. Solo quando la quantità di coltura iniettata sia molto grande (1 cmc.), o quando sia trascorso un certo tempo della iniezione del siero, questi animali soccombono; per altro, anche in questo caso i fenomeni tetanici in generale si diffondono lentamente e la morte avviene tardi, al 4°-5° giorno circa.

Invece i conigli trattati egualmente col siero del sangue di cane immune, nella quantità di 2 $^1/_2$ cmc., non presentano alla iniezione di virus o di veleno del tetano maggior resistenza che i conigli non preparati.

Le cavie si comportano come i conigli, cioè non si riesce a renderle immuni contro il tetano mercè l' iniezione endoperitoneale di siero del sangue di cane immune.

Col siero di sangue di piccione immune abbiamo ottenuto nei topi e nei conigli precisamente gli stessi risultati che con siero di sangue di cane.

Per quel che riguarda il potere terapeutico delle iniezioni di siero del sangue di animale immune abbiamo veduto che non solo nei conigli, ma altresì nei topi, anche quando la intossicazione tetanica sia stata determinata con piccola quantità di veleno (1-2 goccie di cultura) e l'iniezione del siero di sangue sia eseguita prima che appaiano fenomeni tetanici (4 ore ad es. dopo l'iniezione del veleno), non si riesce ad impedire o ad arrestare lo sviluppo del tetano.

I risultati da noi ottenuti non sono una semplice conferma di quelli di Behring e Kitasato e ciò sia per le diverse condizioni di esperimento (modo di conferire l'immunità, animale primitivamente reso immune) sia ancora perchè essi dimostrano alcuni fatti nuovi, cioè che il siero di sangue di un animale immune può anche in piccolissima quantità e in tempo molto breve, annullare la tossicità delle colture di tetano filtrate, ciò che rende molto verosimile l'ipotesi che la sostanza attiva di esso siero sia un fermento, e che il fatto molto interessante della trasmissione della immunità del tetano per mezzo della trasfusione di sangue o del siero di sangue di un animale immune non si verifica indistintamente per tutti gli animali, anzi in una stessa classe di animali si riscontra solo per alcune famiglie.

SOPRA UNA SPECIE DI SCINTILLE ELETTRICHE

NELLE QUALI

LA LUMINOSITÀ SI PROPAGA GRADATAMENTE

DA UN ELETTRODO ALL'ALTRO

NOTA

DEL PROF. AUGUSTO RIGHI

(CON UNA TAVOLA)

(letta nella Seduta del 25 Gennaio 1891)

Nei libri che trattano dell' elettricità atmosferica si parla spesso di folgori ascendenti o discendenti. Molti autori mostrano di attribuire a queste parole il solo significato di folgori generate nel primo caso da una carica positiva del suolo e da una negativa delle nubi, nel secondo caso da cariche collocate in modo inverso, giacché a poche pagine d' intervallo fanno rilevare la breve durata, anzi la quasi istantaneità delle folgori, in tutto analoghe anche sotto questo rapporto alle scintille dei nostri apparati elettrici. Altri autori invece asseriscono nettamente che alcuni osservatori videro delle folgori, che mostrandosi dapprima o presso il suolo o presso le nubi, si allungavano in modo graduale verso l' estremo opposto del loro cammino, con moto abbastanza lento per poterle rassomigliare a razzi d' artificio.

Effettivamente nulla di simile si é finora ottenuto colle scariche dei condensatori. Si é bensí asserito da alcuni che le lingue luminose che appariscono nei quadri scintillanti veggonsi spesso gradatamente allungarsi, e che accostando ad un conduttore carico positivamente un altro conduttore comunicante col suolo e di forma ed a distanza appropriata, sorgono qualche volta nel mezzo nel pennacchio luminoso, che si forma sul primo conduttore, delle pallide scintille terminate in punta, che sembrano allungarsi come le folgori dianzi citate. Ma nel caso del quadro scintillante l' apparenza di scintille che si allungano mi parve sempre provenire dal

prodursi di successive lingue luminose aventi in comune parte del loro cammino, e nel secondo caso l'allungarsi successivo delle deboli scintille, dato che esista, è così rapido, e la loro forma così tortuosa, da essere quasi impossibile riconoscere questo loro carattere coll'osservarne l'imagine in uno specchio girante.

Non esistendo dunque finora nessun esempio sicuro di scintille la cui luminosità si propaghi successivamente lungo il loro percorso, tentai in varie maniere di ottenerle. Rammentando che altra volta ottenni certe scintille d'un carattere singolare, accennante a quello delle folgori che volevo imitare, e ciò coll'introdurre nel circuito di scarica una forte resistenza (1), e riflettendo d'altra parte che se esistono folgori progressive, queste, in una parte almeno del loro percorso, si formano in aria più o meno rarefatta; così sono stato condotto a sperimentare con aria rarefatta ed in pari tempo con forti resistenze, ed in tal modo ho ottenuto i risultati che esporrò in questa nota preventiva.

Un recipiente di vetro (fig. 1) lungo 45 cm. e di 11 cm. di diametro è ben chiuso alle estremità, inferiormente con una scatola metallica portante un rubinetto *R*, un elettrodo *A* ed un manometro *M*, e superiormente con un anello metallico portante l'altro elettrodo *B*, e sul quale si appoggia una lastra smerigliata *L* spalmata di grasso, la quale permette di aprire quando occorre il recipiente per cambiare gli elettrodi o per altra ragione. Una striscia di seta nera è applicata internamente a metà della parete del recipiente, allo scopo che la scintilla che si forma fra i due elettrodi si vegga proiettata sul fondo nero, e sopra tutto per impedire la formazione di un'imagine della scintilla per la riflessione della luce sulla parete stessa.

Il condensatore adoperato consta di 18 a 108 grandi bottiglie di Leida (2) divise in due batterie disposte in cascata, cosichè la capacità del sistema equivale a quella di 4,5 a 27 bottiglie, e può valutarsi, in quest'ultimo caso, a circa un quinto di microfaraday. Lungo i conduttori che mettono gli elettrodi *A* e *B* in comunicazione colle armature estreme del condensatore, è intercalato un cannello di vetro pieno d'acqua, come pure uno spinterometro (con palline di 4 cm. di diametro) onde introdurre, quando occorre, una scintilla addizionale.

Questa scintilla è spesso necessaria, giacchè il fenomeno ricercato si produce il meglio possibile allorché cessano sugli elettrodi i fenomeni luminosi che sembrano analoghi al pennacchio positivo ed alla stelletta negativa che si

(1) Vedi II Mem. sulle Scariche elettriche, fig. 5 della tav. II, nelle Mem. della R. Acc. dei Lincéi (febbraio 1877) serie 3ª t. 1.

(2) Queste bottiglie hanno le stesse dimensioni di quelle adoperate per le esperienze descritte in una Nota precedente (Rend. della R. Acc. dei Lincéi, 16 dicembre 1888).

generano sulle punte nell'aria ordinaria, e si forma invece un tratto di fuoco cioè una vera scintilla. Questa, quando nel circuito esiste una forte resistenza, apparisce con una estremità sull'elettrodo positivo, ma non arriva sino all'elettrodo negativo, restando separata con uno spazio oscuro, dalla luminosità violetta che su quest'ultimo si forma. Se gli elettrodi sono piccole palline o punte, è dunque necessario introdurre nel circuito una scintilla, onde ne apparisca una anche entro l'apparecchio.

Tale scintilla è di colore rosso, ed è costituita da una luminosità dotata di moto progressivo evidentissimo; essa riproduce quindi abbastanza bene l'aspetto delle mentovate folgori pregressive. Però, per la miglior riuscita del fenomeno ho trovato finora necessario, od almeno preferibile: 1° Che l'elettrodo positivo (p. es. A) sia una grossa palla, ed il negativo B una punta; 2° che la resistenza costituita dal cannello pieno d'acqua sia di grandezza sufficiente; 3° che lo spinterometro che fornisce la scintilla addizionale sia dalla parte dell'elettrodo positivo, e che la scintilla stessa sia la minima possibile (1 cm. circa) che basta a che entro l'apparecchio si formi una scintilla a contorni netti; 4° che la pressione dell'aria nell'apparecchio non diversifichi molto da 4 o 5 cm. di mercurio.

Con pressioni d'aria minori la scintilla s'ingrossa, diviene diffusa, ed assume un aspetto di fiamma che mi sembra imitare quelle fiamme d'origine elettrica che ad alcuni osservatori apparvero sul suolo durante temporali, e fra gli altri all'abate Maffei a Frosdinovo nel 1713 (vedi la *Notice sur le tonnerre* di Arago).

Si può fino ad un certo punto compensare la deficienza di una di quelle condizioni favorevoli, coll'esagerazione di altre, tantochè p. es. è verosimile che si possa riuscire ad ottenere il fenomeno anche nell'aria lasciata alla pressione ordinaria.

L'osservazione del fenomeno entro uno specchio girante intorno ad un asse parallelo a quello del recipiente, conferma il carattere progressivo della luminosità. Infatti, la scintilla vista entro lo specchio si trasforma in una striscia curva (simile a quella della fig. 2 purchè si supponga tolta la parte discendente di destra) che indica lo spostarsi graduale dall'elettrodo positivo verso il negativo di una breve colonna luminosa. Non si ha dunque una scintilla che rimanendo fissa all'elettrodo positivo si allunga verso il negativo, (come sembrano essere, forse per mera illusione, le folgori progressive), ma una luminosità che si trasporta nel medesimo senso. Il moto di essa è poi abbastanza lento perchè una rotazione dello specchio di mezzo giro al secondo sia più che sufficiente.

Si può quindi, più comodamente, anzichè adoperare lo specchio, far girare l'apparecchio medesimo intorno ad un asse ad esso parallelo. Guardandolo nell'oscurità si vede nell'istante della scarica la stessa striscia curva luminosa che si vedeva nello specchio girante.

Mutando in varie maniere le condizioni dell' esperienza, si possono ottenere scintille costituite non da una sola breve colonnetta luminosa che sorge dall'elettrodo positivo e si muove fin presso il negativo ove si spegne, ma da successive emissioni di corte colonnette di luce che una dopo l' altra fanno, in tal caso più rapidamente, lo stesso cammino. In pari tempo accade spesso che le colonnette luminose non si spengono, giunte che sieno verso l' elettrodo negativo, ma retrocedono per un tratto più o meno lungo del tubo. In tal caso la curva luminosa vista coll' apparecchio girante non è sempre troncata in alto, ma raggiunta una massima altezza ridiscende (fig. 2).

Le emissioni multiple di luce dall' elettrodo positivo per ogni singola scarica, si ottengono: 1° aumentando la distanza fra gli elettrodi, 2° aumentando la pressione dell' aria nell' apparecchio, 3° aumentando la scintilla addizionale, 4° diminuendo il diametro trasversale dell' apparecchio. La capacità più o meno grande del condensatore influisce principalmente sulla regolarità e sulla durata complessiva del fenomeno luminoso.

Avendo in animo di studiare dettagliatamente l' influenza di tutte queste circostanze sulla produzione del fenomeno descritto, ho pensato valermi della fotografia. Le fig. 2, 3 e 4 sono la riproduzione in fototipografia di alcune negative di prova che ho fatte finora, valendomi di ottime lastre sensibili. Queste immagini sono ottenute con apparecchi semplificati consistenti ciascuno in un tubo di vetro cilindrico verticale avente alle estremità due elettrodi fiiliformi di platino lontani di circa 32 cm. l' uno dall' altro, e fatto girare intorno ad un asse ad esso parallelo. Nel caso della fig. 2 il tubo aveva 4 cm. di diametro e la scintilla addizionale aveva la minore lunghezza possibile. Il movimento avveniva da sinistra a destra e l' elettrodo positivo era quello inferiore. Con questo diametro, già piccolo, di 4 cm., la curva luminosa dopo aver salito ridiscende, mentre una nuova emissione di luce si inizia all' elettrodo positivo.

Nel caso della fig. 3, la sola differenza introdotta è un aumento di lunghezza della scintilla addizionale. Infine la fig. 4 mostra il fenomeno in un caso che differisce da quello della fig. 3 solo in questo, che il tubo adoperato aveva un centimetro, anziché 4 di diametro. In questo caso la scintilla presenta una vera stratificazione, giacché è costituita dal rapido succedersi di un gran numero di colonnette luminose che l' una dietro l' altra, separate da intervalli oscuri, si spostano dall' elettrodo positivo verso il negativo. Si possono vedere per un istante queste colonnette luminose lasciando fermo il tubo e ponendo fra esso e l' occhio un disco opaco girante, fornito d' una stretta fenditura radiale che permetta di vedere la scintilla una sola volta e per un tempo brevissimo. Appariscono allora nell' asse del tubo tante brevi lineette luminose separate da inter-

valli oscuri, che richiamano alla mente le folgori a rosario descritte dal Planté.

In tutti questi casi, nei quali ogni scintilla è costituita da molte successive emissioni di luminosità dall' elettrodo positivo, il moto progressivo della scintilla vista direttamente è meno sensibile; e ciò è naturale, giacchè le curve luminose che appariscono quando il tubo gira, si accostano tanto più alla verticale quanto più sono numerose.

Per imitare dunque le folgori a moto progressivo bisogna avvicinarsi per quanto è possibile al caso in cui ogni scintilla è costituita da una sola emissione di luce, che si propaga dall'elettrodo positivo verso il negativo, e che si spegne in prossimità di questo senza retrocedere. L' apparecchio della fig. 1 adoperato nel modo più sopra indicato vale in questo caso.

Quanto poi alla causa di questi così singolari fenomeni, mi riservo d' indagarla con opportune ricerche. Al momento però ho qualche ragione per pensare, che ad ottenere le scariche luminose dotate di moto traslatorio nei gas, occorra una antecedente diffusione di elettricità negativa nel gas medesimo sino verso l' elettrodo positivo, in seguito alla quale una prima scarica si forma presso questo elettrodo, seguita immediatamente da altre di strato in strato; e che la causa prima di queste scariche sia analoga a quella delle scariche luminose che altravolta ottenni nel seno dell' acqua (rappresentate nelle fig. 3, 4, 5 della tav. III annessa alla II Memoria sulle Scariche Elettriche citata più sopra).

A. RIGHI — Sopra una specie di scintille elettriche nelle quali la luminosità si propaga gradatamente da un elettrodo all'altro.

Fig. 1.

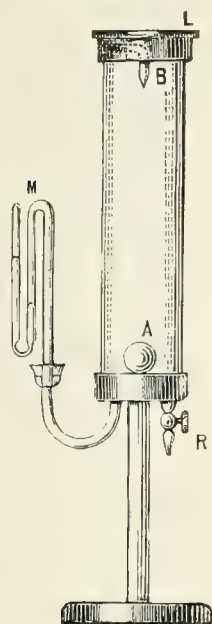



Fig. 2.

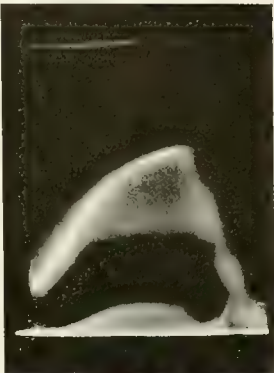
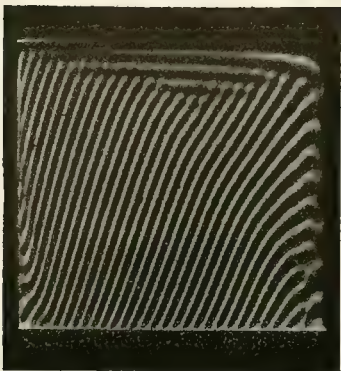



Fig. 3.

Fig. 4.

TERZO E QUARTO METODO ANALITICO
DELL' EQUAZIONE (ASTRONOMICA) DEL TEMPO
E DISCUSSIONE DEGLI ALTRI DUE METODI ANALITICI
CON IL METODO SINTETICO DEGLI ASTRONOMI ANTICHI E MODERNI

MEMORIA

DEL

CAV. PROF. ANTONIO SAPORETTI

(CON UNA TAVOLA)

(Letta nella Sessione delli 11 Gennaio 1891)

Nell' insegnamento cattedratico dalle discussioni o conferenze, che io andava tenendo coi discepoli, fui sempre mosso a prescegliere i metodi analitici a fronte dei metodi sintetici, senza disconoscere che i metodi sintetici spesso abbracciano i processi dei calcoli e spesso aiutano la memoria con speciali associazioni di idee, il che quasi sempre m' indusse o di accennare altresì il metodo sintetico o di usarlo a posteriori. In tal guisa, come dice il Lacroix, mi parve di rendere facile il difficile.

E quantunque queste mie conferenze e la bramosía delle analisi matematiche se dall' una parte mi acquistarono e forse ancora mi acquistano l' animo degli studiosi, dall' altra parte mi fecero acquistare la taccia di insegnare, non già troppo facilmente le cose tutte, di geometria, di algebra, di calcoli superiori, di meccanica, di ottica, di astronomia, ma la taccia d' insegnare o poche cose, o facili cose, o cose di poco momento.

E sebbene sotto al cessato governo e sotto il presente siasi posto mano a combattermi nel campo scientifico, quasi tollerandomi o nella cattedra o altrove, nullameno ho avuto qualche speranza che alla perfine siasi riconosciuto, salvo appresso alcuni profani, che quanto altri insegnavano sinteticamente e senza dubbio molto sottilmente ed in sublime forma, da me venisse insegnato più semplicemente, con forme analitiche, o con maniera direttamente filosofica.

Oggi questo ho osato di dire, il perchè siccome non spero nè bramo cose maggiori e siccome oramai corriamo alla fine d' ogni umana grandezza, così ho voluto ciò dire nel tracciare i miei 4 analitici metodi sull' Equazione Astronomica del tempo, pure accennando ancora all' usitato metodo sintetico, tenuto da quasi tutti gli astronomi, da Keplero ai più pros-

simi a noi, al Santini, al Conti, al Calandrelli, al Respighi, al Brünnow, al Chauvenet, al Faye, al Gruey (1885).

E senza altro dire in generale, in questa mia Memoria sull'Equazione del Tempo, accenneró tutto quanto puó essere opportuno a comprendersi dai miei discepoli, pei quali specialmente ho scritto i miei metodi analitici, due dei quali negli anni trascorsi ho esposti, e gli altri due espongo in questa ultima Memoria.

L' equazione astronomica del Tempo, da cui dipende la relazione fra il tempo solare *vero* ed il tempo solare *medio*, secondo il quale oggi si regolano gli orologi di tutto il mondo civile, come viene spiegato in qualsiasi libro di Astronomia, ricavata da tre dati delle secolari osservazioni celesti (eccentricitá dell' orbita terrestre, obbliquitá dell' eclittica, e perielio) e in virtú delle teorie ben note di Astronomia e di Meccanica Celeste, si riduce specialmente alla Integrazione di una funzione a due variabili relative, cioé l' una variabile al variare dell' altra, quali sono, la distanza del centro della Terra da quello del Sole (*raggio vettore*), e l' angolo formato da questa distanza e dall' asse maggiore dell' orbita terrestre (*anomalia*).

Senza che sia dato di conoscere il modo tenuto dai primi cultori dell' Astronomia e delle Matematiche, e forse dedotto da quanto lasció scritto Keplero, certa cosa é che da molto tempo gli Astronomi usano di una maniera del tutto sintetica, immaginando una certa relazione fra le due variabili suddette (raggio vettore ed anomalia) ed un' altra variabile con loro, come se questa relazione potesse essere stata, non inventata, non trovata, ma indovinata. Se non che cotesto metodo sintetico, come tracceró io pure in questa mia ultima Memoria, riesce a dire il vero molto semplice e breve, ed in oltre si puó rappresentare con una tale figura geometrica da potersi facilmente tenere a memoria, prescindendo dall' intima ragione, su la quale altrove dissi: (Georgicor. Lib. II)... *Felix qui potuit rerum cognoscere causas.*

Io d' altronde analizzando il legame fra le due quantitá suddette (raggio vettore ed anomalia), denominate coordinate polari, ho potuto ricavare i due primi metodi analitici, giá in altre Memorie esposti, il cui processo in breve ho riassunto in questa mia ultima Memoria, perché lo studioso possa meglio avere tutto quanto da me si é detto in questa quistione della Determinazione dell' Equazione Astronomica del Tempo.

Ché siccome non solo in geometria analitica il sistema delle coordinate polari é mezzo di analisi e di risoluzioni molto semplici il piú delle volte, ma altresí lo é il sistema delle cosí dette Coordinate Rettilinee del Cartesio o meglio del Fermat, cosí io trasformando le coordinate polari nelle coordinate rettilinee rettangolari cartesiane dirette parallelamente agli assi dell' orbita terrestre con l' origine al centro del Sole, sono riuscito a trovare

altri due metodi analitici, l'uno più semplice dell' altro; il che fa l' oggetto di questa ultima Memoria, insieme al riassunto, come dissi, tanto del metodo sintetico quanto dei primi miei due metodi analitici, mentre tutti questi possono servire, se non vado errato a molti esercizi di matematiche tutte.

Affinchè il lettore non abbia da cercare altrove quanto è necessario per conoscere ciò che appartiene all' equazione astronomica del Tempo, accennerò in breve tutto il necessario medesimo.

1.° Del giorno siderale, del giorno solare vero, del giorno solare medio.

L'intervallo di tempo, che trascorre dal passaggio di una stella ad un dato meridiano al successivo suo passaggio, dicesi « *Giorno siderale* ».

L'anno tropico, che è l' intervallo di tempo, che passa da un equinozio di primavera al successivo del centro del sole, è stato determinato con le osservazioni in giorni siderali 366,242201.

L'intervallo di tempo, che trascorre dal passaggio del centro del sole ad un dato meridiano al successivo suo passaggio, dicesi « *Giorno Solare Vero* ».

Paragonando il moto apparente del sole con quello di una stella, si scorge nel sole un moto retrogrado rispetto alla stella, variabile di giorno in giorno, fra 3 e 4 minuti primi siderali, perdendo così il sole un giro in un anno tropico, e perciò l'anno tropico è in giorni solari veri 365,242201 (giri).

Considerando il tempo di ogni giro come *Unità di Misura del Tempo*, nasce naturalmente l'idea del sole, così detto *Fittizio,* il quale compiendo con moto uniforme 365,242201 giri (rotazioni) intorno alla terra (detti perciò giorni solari medii) impiegherà il tempo stesso in un anno tropico, nel quale il *Sole Vero* passa due volte successive pel primo punto d'Ariete (primavera).

Da ciò indicando con g_s, g_m i giorni, siderale, e medio, si ha

$$366{,}242201 \,.\, g_s = 365{,}242201 \,.\, g_m \,.$$

Dalla quale equivalenza dell' anno tropico si deduce essere il giorno medio di $24^{ore}.\,3^{m}.\,56^{s},555\ldots$ di tempo siderale ed il giorno siderale essere di $23^{ore}.\,56^{m}.\,4^{s},091\ldots$ di tempo medio.

2.° Equazione del Tempo.

Indicato con t_m il tempo medio e t_v il tempo vero, espresso in tempo medio, l'Equazione del Tempo altro non è che la differenza fra il tempo medio e il vero, espressa perció con

$$E_q = t_m - t_v .$$

Riferendo il sole vero come il sole Fittizio ossia medio per mezzo dei loro circoli di declinazione all'Equatore ed al primo punto d'Ariete si fará manifesto essere

$$E_q = A_v - A_m$$

indicando con A_v l'ascensione retta del sole vero e con A_m l'ascensione retta del sole medio, notando che queste quantitá, riferite al primo punto d'Ariete ed alle Stelle, sono date in tempo siderale, da trasformarsi poi in tempo medio con le note relazioni, indicate superiormente, e che si trovano estese nella « Connaissance des Temps ».

Razionalmente è chiaro che facendosi i moti apparenti dei Soli sull'orbita terrestre (la cui proiezione sulla sfera celeste è l'Eclittica) si dovranno le quantitá superiori riferirsi all'eclittica od alla stessa orbita terrestre elittica.

Quanto alla ascensione retta del sole medio, il quale con moto retrogrado-equabile percorre l'equatore, questa sua ascensione retta è eguale ad ogni istante alla Longitudine Media di un altro sole Fittizio, che con lo stesso moto retrogrado-equabile percorra l'eclittica in ogni anno tropico di 365,242201 rotazioni solari medie. Da ció è chiaro che indicando con l il moto medio retrogrado del sole fittizio in un giorno sull'eclittica si ha

$$360° : 365{,}242201 :: l : 1$$

da cui

$$l = 59'.\,8'',33 .$$

Indicato con t il tempo, trascorso dal centro del sole medio dal 1° punto d'Ariete ad un punto qualsiasi, relativo al tempo t, si ha $A_m = lt$, noto perció ad ogni istante t, notando ancora che l è un arco di circolo (massimo) percorso da una stella in $3^m.\,56^s,\,555\ldots$ di tempo siderale.

Quanto all'ascensione retta del sole vero A_v, fa duopo trasformarla con la teoria delle trasformazioni delle coordinate celesti in longitudine vera λ del sole stesso.

E quantunque sia cosa ovvia per qualsiasi lettore discepolo, nullameno per comodità l'accenneremo.

S'immagini (Fig. 1ª) la circonferenza massima passante pel polo P_t dell'equatore e pel polo P_e dell'eclittica; s'immagini l'equatore EE_1, l'eclittica ee_1: si conduca il circolo di declinazione P_tSD, essendo S il centro del sole e D il punto d'incontro del circolo di declinazione con l'Equatore: sia m il primo punto d'Ariete: il triangolo mSD dà

$$\cot.\lambda \operatorname{sen}.A_v = \cos.A_v \cos.\omega + \operatorname{sen}.\omega \cot.90^\circ$$

essendo ω l'obbliquità dell'eclittica, da cui

$$\operatorname{tang}.A_v = \cos.\omega \operatorname{tang}.\lambda.$$

3.° Riferimento della questione per gli assi dell'orbita terrestre.

Sia AB (Fig. 2ª) l'asse maggiore dell'orbita terrestre; pSS_1mp_1 l'eclittica; m il primo punto d'Ariete; S ed S_1 i due soli, il vero ed il medio; v l'anomalia pFs, essendo p il perielio sull'eclittica ed F il centro della terra, e sia M l'anomalia media pFS_1, e sia finalmente P la longitudine del perielio, mp_1Dp.

Si ha

$$\lambda = P + v; \quad A_m = L = P + M$$

indicando con L la longitudine media del sole.

Ciò posto è chiaro che l'equazione del Tempo si può rappresentare simbolicamente per

$$E_q = t_m - t_v = f(\lambda) - L = f(P + v) - (P + M)$$

dalla quale si vede che, nota la longitudine del perielio, l'Equazione del Tempo viene a determinarsi con il rapporto fra la anomalia vera v e l'anomalia media M.

4. Determinazione di questo rapporto.

Come si disse, è

$$M = lt = \frac{360^\circ}{T}\,t = \frac{2\pi t}{T}\,,$$

ponendo l'origine del tempo t al perielio, e T il tempo 365,242201 ossia l'anno tropico, contato naturalmente da un perielio al successivo.

Per la legge delle aree (Keplero) le aree descritte dal raggio vettore sono proporzionali ai tempi, in cui vengono descritte, e perciò si ha

$$\frac{t}{T} = \frac{\text{area}\,(AsF)}{\pi ab}\,,$$

$a = 1$, e b i semi-assi dell'orbita elittica terrestre, ove indicando con e l'eccentricità di cotesta elissi terrestre si ha

$$\frac{t}{T} = \frac{\text{area}\,(AsF)}{\pi\sqrt{1-e^2}} = \frac{M}{2\pi}\,,$$

e per essere in virtù del calcolo integrale

$$\text{area}\,(AsF) = \int_0^v \frac{1}{2} r^2 dv\,,$$

detto r il raggio vettore dell'elissi sudd., la cui equazione polare (con l'origine in F) è

$$(A) \; \ldots\ldots \qquad r = \frac{1-e^2}{1+e\cos v}\,,$$

si ha

$$(1) \qquad M = (1-e^2)^{-\frac{1}{2}} \int_0^v r^2 dv\,.$$

Ed ecco all'integrazione dell'equazione, di cui mi sono occupato.

Ho detto che il metodo, il più usato dagli Astronomi Matematici è il

sintetico, mentre io ho creduto meglio usare i miei metodi analitici, due già esposti in altre memorie e due, che qui ora espongo.

Se non che come dissi sup., per rendere quest'argomento di uno studio, il più che sia possibile esteso, ho giudicato di raccogliere in questo scritto quanto è necessario per intendere tutto quanto riguarda al medesimo argomento.

1.° Metodo, e cioè Metodo sintetico, usitato assai in Astronomia.

Si pone (1) $v = 1 - e\cos E$, essendo E una nuova variabile, e perciò

$$\frac{1-e^2}{1+e\cos v} = 1 - e\cos E$$

posizione che pare, come dissi, indovinata, piuttosto che razionalmente indagata. Da questa si ha

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}, \quad dv = \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - e\cos E}\, dE$$

e per essere $E = 0$, quando è $v = 0$, si ha

$$(2) \qquad M = \int_0^E (1 - e\cos E)\, dE = E - e \operatorname{sen} E\,.$$

Interpretazione della (1) come della (2), per la memoria, come si disse, data dal Keplero.

Sia OSB (Fig. 3ª) l'orbita terrestre di asse $OB = 2a = 2$, e sia OAB la semi-circonferenza corrispondente. Sia S il centro apparente del Sole, ed F il centro della Terra: siano le coordinate del punto S, o del punto A indicato con x e con y, riferite agli assi dell'elissi OSB, e per essere, indicata con c la distanza focale OF,

$$r^2 = (FS)^2 = (x-e)^2 + y^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a^2 = b^2 + c^2$$

eliminando tanto b quanto la y si trova

$$r = a - \frac{cx}{a}$$

ed indicato con e la eccentricità espressa da $c = ae$, e supposto $a = 1$, si ha $r = 1 - ex$, ma

$$x = OA \cos E, \text{ posto l'arco } AB = E,$$

e perciò è

$$(1) \quad r = 1 - e \cos E.$$

In 2° luogo si consideri l'equivalenza

$$(3) \qquad \text{area}\,(OAB) = \text{area}\,(AOF) + \text{area}\,(AFB)\,,$$

ed è facile a vedersi essere

$$\text{area}\,(OAB) = \frac{1}{2}\,a^2E = \frac{1}{2}\,E\,;$$

$$\text{area}\,(AOF) = \frac{1}{2}\,ac \text{ sen } E = \frac{1}{2} e \text{ sen } E\,.$$

Ora da Keplero e dai moderni autori (vedi l'Astronomia del Gruey, Prof. A. Besançon. Paris, 1885) si è immaginato *senza verità* a priori che il punto A percorra la circonferenza BAC con la seconda legge di Keplero, e cioè che le aree, descritte dal suo raggio vettore AF siano proporzionali ai tempi impiegati a descriverle. Ciò se fosse, darebbe

$$\pi a^2 : \text{area}\,(AFB) :: T : t$$

da cui

$$(4) \qquad \text{area}\,(AFB) = \frac{\pi a^2 t}{T} = \frac{\pi}{2}\,M$$

ed in tal caso si avrebbe della (3) la

$$(5) \qquad E - e \text{ sen } E = M\,,$$

Da questo fatto (2) per altro ed a priori si può dedurre la verità della (4) e non altrimenti.

Nullameno l'analisi fatta sulla spiegata figura rende *mnemonica* tanto la posizione

$$r = 1 - e \cos E$$

valore del raggio vettore elittico, quanto la dedotta

$$M = E - e \operatorname{sen} E$$

la quale altro non è che l'integrale della rdE.

Alla quantità $E =$ arco AB, oppure all'angolo AOB si dà il nome di Anomalia Centrale.

Nota Bene. Per gli usi pratici serve meglio, sia per sè stessa quanto per lo sviluppo in serie, la formola

$$(B) \ldots\ldots \qquad \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} v = \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} E$$

la quale si deduce considerando essere per trigonometria

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} v = \frac{1 - \cos v}{1 + \cos v}$$

e per essersi trovato

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}.$$

2.° Metodo ...... (1.° Metodo analitico).

Si cerchi d'integrare la (1) rispetto ad r, eliminando perciò la v. Dalla (A) si ha

$$\cos v = \frac{1 - e^2 - r}{er}, \quad dv = \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{\sqrt{[e^2 - (1-r)^2]}} dr$$

e notando essere $r = 1 - e$ per $v = 0$ si deduce

$$M = \int_{1-e}^{r} \frac{rdr}{\sqrt{[e^2 - (1-r)^2]}}.$$

Posto $1 - r = et$, si ha $dr = - edt$, ed essendo $t = 1$ per $r = 1 - e$, si ha

$$M = \int_1^t \frac{-dt}{\sqrt{(1-t^2)}} + e\int_1^t \frac{tdt}{\sqrt{(1-t^2)}};$$

$$M = \text{arc}\cos t - e\sqrt{(1-t^2)}.$$

Supposto $\text{arc}\cos t = E$ si ha $t = \cos E$, ed $M = E - e \operatorname{sen} E$, come sopra.

Corollario. Dalla $1 - r = et$ si ha la inventata posizione degli Astronomi

$$r = 1 - e\cos E = \frac{1-e^2}{1+e\cos v},$$

dalla quale, come si é visto nel 1° Metodo, si deduce la (B).

3.° Metodo ...... (2.° Metodo analitico).

Si elimini r e si ha

$$M = (1-e)^{\frac{3}{2}}\int_0^v \frac{dv}{(1+e\cos v)^2}.$$

Fra le posizioni, atte all'integrazione, e trascendenti analoghe alla quistione

$$u = \operatorname{sen} v, \quad \cos v, \quad \operatorname{tang} v \ldots\ldots$$

$$u = \operatorname{sen}\frac{1}{2}v, \quad \cos\frac{1}{2}v, \quad \operatorname{tang}\frac{1}{2}v \ldots\ldots$$

una delle piú opportune é, come ognuno puó provare, la

$$u = \operatorname{tang}\frac{1}{2}v; \quad v = 2\,\text{arc}\operatorname{tang}[u].$$

Si ha quindi, posto $(1-e)m = 1+e$,

$$dv = \frac{2du}{1+u^2}, \quad 1 + e\cos v = (1-e)\frac{m^2+u^2}{1+u^2}$$

notando essere

$$\text{tang}^2 \frac{1}{2} v = \frac{1 - \cos v}{1 + \cos v} = u^2$$

od anche

$$\cos v = \cos^2 \frac{1}{2} v - \text{sen}^2 \frac{1}{2} v ,$$

e con essa

$$\cos^2 \frac{1}{2} v = \frac{1}{1 + u^2} , \quad \text{sen}^2 \frac{1}{2} v = \frac{u^2}{1 + u^2} .$$

Trasformando si ha

$$M = 2(1 - e)^{-\frac{1}{2}} (1 + e)^{\frac{3}{2}} \int_0^u \frac{(1 + u^2) du}{(m^2 + u^2)^2}$$

funzione razionale ed integrabile completamente.

Posto

$$u = mz , \quad \text{tang}^2 \frac{1}{2} v = z^2 \frac{1 + e}{1 - e}$$

si ha per essere $z = 0$ per $u = 0$,

$$M = 2(1 - e) \int_0^z \frac{1 + m^2 z^2}{(1 + z^2)^2} dz .$$

Con facile e analisi e sintesi si riduca alla

$$M = 2(1 - e) \int_0^z \frac{(1 + z^2) + (m^2 - 1) z^2}{(1 + z^2)^2} dz ,$$

$$M = 2(1 - e) \text{ arc tang } [z] + 4e \int_0^z \frac{z^2 dz}{(1 + z^2)^2} .$$

Con la integrazione per parte

$$\int \varphi d\psi = \varphi \psi - \int \psi d\varphi$$

posto

$$\varphi = z \quad \text{e} \quad d\psi = \frac{z dz}{(1 + z^2)^2} = \frac{1}{2} (1 + z^2)^{-2} d(1 + z^2)$$

si ha

$$M = 2 \operatorname{arc\,tang} [z] - \frac{2\,e\,z}{1 + z^2}.$$

Fatto

$$E = 2 \operatorname{arc\,tang} [z], \quad z = \operatorname{tang} \frac{1}{2} E$$

si ha, come sopra,

$$M = E - e \operatorname{sen} E; \quad \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} v = \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} E.$$

Corollario. Dalle

$$r = \frac{1-e^2}{1+e\cos v}, \quad 1 + e\cos v = \frac{(1+e)+(1-e)u^2}{1+u^2}$$

si ricava la famosa inventata posizione $r = 1 - e\cos E$, oltre la B.

4.° Metodo ...... (3.° Metodo analitico).

Si trasformino (Fig. 4ª) le coordinate polari $r = FS$, $v = \text{ang}^\circ AFS$, anomalia, nelle coordinate ortogonali agli assi dell'orbita BSA elittica terrestre

$$x = OP = e + r\cos v, \quad y = SP = r \operatorname{sen} v$$

e l'equazione dell'elissi diventa

$$(1-e^2)x^2 + y^2 = 1 - e^2.$$

Si ha

$$\operatorname{tang} v = \frac{y}{x-e}, \quad \frac{dv}{\cos^2 v} = \frac{(x-e)dy - y\,dx}{x^2}$$

da cui

$$r^2 dv = (x-e)dy - y\,dx,$$

e notando che per $v = 0$ è $x = 1$ nel caso che si elimini la y, ed essendo

l'equazione differenziale dell'elissi

$$(1-e^2)xdx+ydy=0$$

si deduce

$$M=(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\int_1^x\left[\frac{-(1-e^2)x(x-e)}{y}-y\right]dx$$

$$M=(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\int_1^x\frac{-(1-e^2)x(x-e)-y^2}{y}dx$$

$$M=\int_1^x\frac{(ex-1)dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\int_1^x\frac{-dx}{\sqrt{(1-x^2)}}+e\int_1^x\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

e finalmente integrando si ha

$$M=\text{arc cos}\,[x]-e\sqrt{(1-x^2)}\,.$$

Posto $E=\text{arc cos}\,[x]$, $x=\cos E$ si ha come sopra

Corollario. Dalla nota proprietà del raggio vettore elittico, come si è visto anche superiormente, si ha

$$r=1-ex,\quad \text{da cui}\quad r=1-e\cos E.$$

E così dalla solita

$$r=\frac{1-e^2}{1+e\cos v}=1-e\cos E$$

si deduce, come sopra,

$$\text{tang}^2\frac{1}{2}v=\frac{1+e}{1-e}\,\text{tang}^2\frac{1}{2}\,E\,.$$

5. ed ultimo Metodo...... (4. Metodo analitico).

Si elimini in ultimo luogo la x, e si noti che per $v=0$ si ha $y=0$, laonde la

$$M=(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\int_0^v r^2dv$$

per essere, come si è visto,

$$r^2dv=(x-e)dy-ydx$$

diventa

$$M=(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\int_0^y [(x-e)dy-ydx]$$

ed eliminando il dx per mezzo della equazione differenziale dell' elissi

$$(1-e^2)xdx+ydy=0$$

si ottiene da prima

$$M=(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\int_0^y \left[\frac{(1-e^2)x^2+y^2}{(1-e)^2x}-e\right]dy\,;$$

poscia per mezzo della stessa equazione dell' elissi

$$(1-e^2)x+y^2=1-e^2$$

si deduce

$$M=(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\int_0^y \left[\frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(1-e^2-y^2)}}-e\right]dy$$

e quindi si deduce

$$M=\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{[(1-e^2)-y^2]}}-(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}ey$$

e poi, rammentando essere

$$d \text{ arc sen } [\varphi] = \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\varphi^2)}}$$

da cui fatto $\varphi = \frac{y}{\sqrt{(1-e^2)}}$ si ha

$$d \text{ arc sen } \left[\frac{y}{\sqrt{(1-e^2)}}\right] = \frac{dy}{\sqrt{[(1-e^2)-y^2]}},$$

si deduce

$$M = \text{arc sen } \left[\frac{y}{\sqrt{(1-e^2)}}\right] - \frac{ey}{\sqrt{(1-e^2)}}.$$

Posto

$$E = \text{arc sen } \left[\frac{y}{\sqrt{(1-e^2)}}\right],$$

e quindi

$$\frac{y}{\sqrt{(1-e^2)}} = \text{sen } E \quad \text{si ha} \quad M = E - e \text{ sen } E,$$

come sopra.

Corollario. Dalla $r = 1 - ex$ e dalla $(1-e^2)x^2 + y^2 = 1 - e^2$ si deduce

$$r = 1 - e\sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{1-e^2}\right)} = 1 - e \cos E$$

sempre come sopra.

Per gli studiosi di Matematiche Pure, facilmente svolgendo i calcoli, come sono stati indicati od accennati, in questa Memoria, si troverà abbondante messe di esercizi, analizzando tanto il processo del metodo sintetico, seguito dagli Astronomi, sì antichi che moderni, quanto i miei quattro Metodi analitici, i primi due esposti in altre mie memorie e qui tracciati in forma breve e concisa e gli ultimi due esposti in questa mia Memoria.

Finirò questa Memoria con l'accennare l'analisi che rimane a farsi sopra questa equazione astronomica del Tempo.

Si considerino a questo fine le equazioni

$$(1)\qquad E_q = t_m - t_v = A_v - A_m\,;$$

$$(2)\qquad \operatorname{tang} A_v = \cos\omega \operatorname{tang}\lambda\,;$$

$$(3)\qquad \lambda = v + P\,;$$

$$(4)\qquad A_m = L = M + P\,;$$

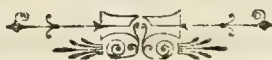
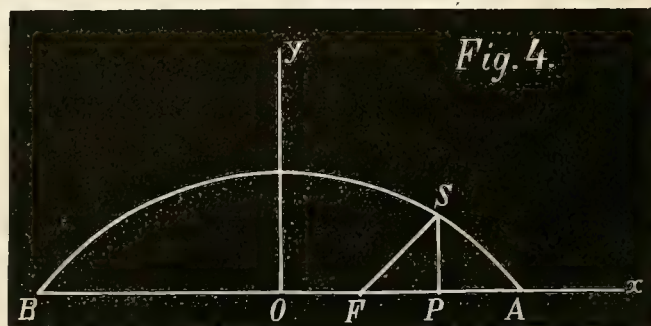
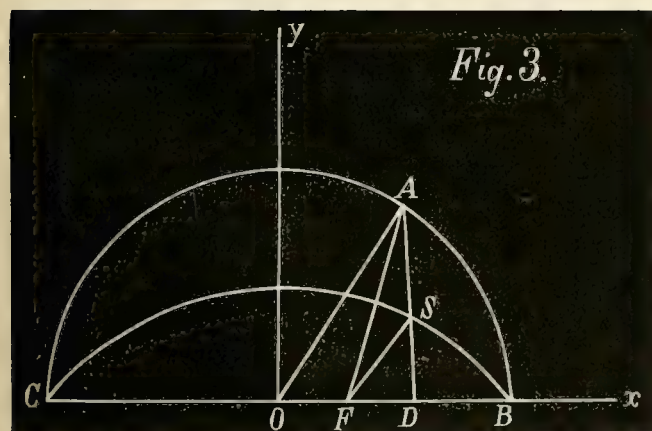
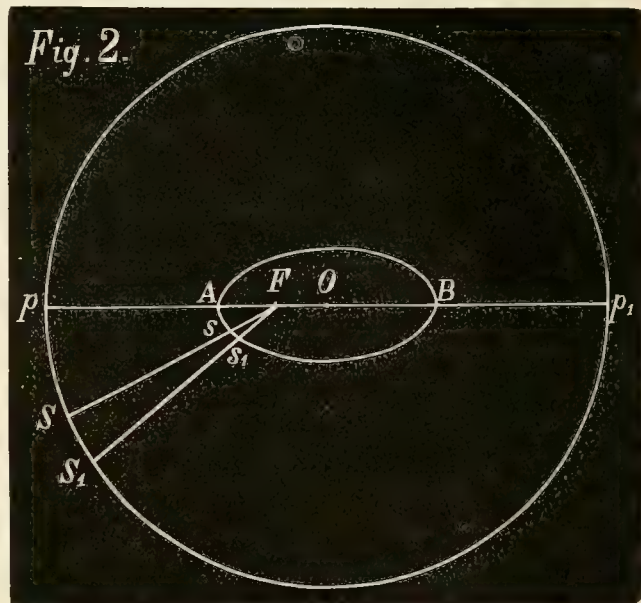
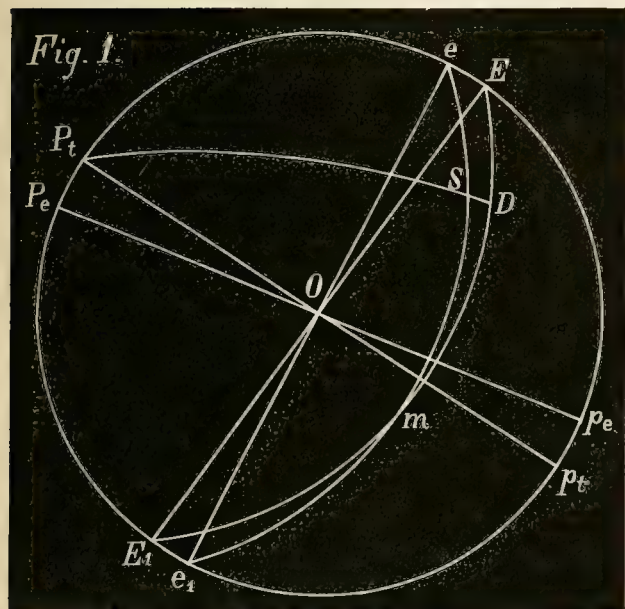
$$(5)\qquad \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}v = \frac{1+e}{1-e}\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}E\,;$$

$$(6)\qquad E - e \operatorname{sen} E = M\,;$$

ed è facile ad intendere che le osservazioni, anteriori all'epoca, in cui sia necessario di conoscere il tempo solare medio p. e. a mezzodì vero, sono $e, \omega, P, M = lt$. Ad ogni valore di t, essendo

$$l = \frac{360^\circ}{365{,}242201} = 59'.8'', 33$$

è nota M, e si giunge a conoscere dalla (6) il valore di E; dalla (5) si ha v; dalle (3) e (4) si conoscono λ ed A_m, e dalla (2) si giunge a conoscere A_v e così si ha il valore di E_q ad ogni tempo t.

Il resto che serve all'uso pratico e rapido per formare le Tavole del Tempo medio solare, specialmente pel mezzodì vero di un qualsiasi luogo, si trova in ogni trattato Teorico-Pratico di Astronomia.

A. Saporetti — Terzo e quarto metodo analitico dell'equazione (astronomica) del Tempo ecc.

UNA NUOVA ESTENSIONE

DELLE

FUNZIONI SFERICHE

MEMORIA

DEL

PROF. SALVATORE PINCHERLE

(CON UNA TAVOLA).

(Letta nella Sessione delli 25 Gennaio 1891).

I polinomi di Legendre o funzioni sferiche di prima specie, e le funzioni ad essi associate, dette funzioni Q_n o funzioni sferiche di seconda specie, costituiscono un sistema che per le sue molte e notevoli proprietà ha attratto da oltre un secolo l'attenzione dei matematici. Si sono date di questo sistema numerose generalizzazioni, in vari sensi e sotto diversi punti di vista: si sono così ottenuti sistemi che conservano ora questa, ora quella delle proprietà delle funzioni sferiche e fra essi, per limitarsi ai sistemi di una sola variabile, si possono citare i polinomî ipergeometrici del Jacobi (*) e le serie ipergeometriche ad essi associate, studiati nuovamente dal Darboux (**), il sistema dei denominatori delle ridotte e dei resti di una frazione continua algebrica (***), le aggiunte *(Zugeordnete)* dell'una e dell'altra specie delle funzioni sferiche considerate dallo Heine (****), ecc. Questi sistemi, ed altri ad essi paralleli come quello delle funzioni cilindriche e le sue generalizzazioni, offrono però tutti un carattere comune: ed è che a fondamento delle loro proprietà sta un'equazione differenziale di second'ordine od un'equazione alle differenze pure di second'ordine cui soddisfano tutte le funzioni del sistema.

(*) J. di Crelle, T. 56.

(**) Journal de Mathématiques, S. III, T. IV.

(***) Thomé, J. di Crelle, T. 66 e Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen,* T. I, pag. 286.

(****) *Handbuch der Kugelfunctionen,* 2te Auflage. T. I, parte I, cap. IV.

Nel presente lavoro si considera invece (e, a quanto io credo, per la prima volta) un sistema che, mentre gode di proprietà non meno svariate ed interessanti di quelle delle funzioni sferiche e mentre ha un'origine non meno semplice, ci introduce però in un campo nuovo perchè le sue proprietà discendono tutte da un'equazione ricorrente del terz'ordine cui soddisfano le funzioni del sistema. Aggiunge interesse a tale sistema l'offrire esso un primo esempio concreto sul quale si possono verificare i principî della teoria generale dei sistemi ricorrenti, da me stabiliti in altri lavori (*), come pure le relazioni che esso presenta colle teorie delle funzioni ellittiche, in particolare coi punti che riguardano la dipendenza dei periodi dall'invariante assoluto; infine il soddisfare delle funzióni del sistema ad una notevole equazione differenziale lineare del terz'ordine. Per tali ragioni ho creduto non inutile il dare di esso sistema, nel presente lavoro, uno studio piuttosto particolareggiato: notando che i metodi seguiti e che si fondano in gran parte sulla considerazione degli integrali di una equazione differenziale lineare sotto forma d'integrali definiti, si applicherebbero senza grandi modificazioni allo studio di altri sistemi ricorrenti di terz'ordine o d'ordine superiore.

I polinomi $P_n(x)$ e la loro equazione ricorrente.

1. Si sviluppi in serie di potenze intere e positive di t l'espressione

$$T = f^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{t^3 - 3tx + 1}}, \tag{1}$$

dove t ed x sono variabili complesse qualunque. Lo sviluppo ottenuto convergerà per ogni valore di x, entro un cerchio descritto nel piano della variabile complessa t, col centro nel punto $t=0$ e con raggio uguale al minimo modulo delle radici dell'equazione

$$f = t^3 - 3tx + 1 = (t - e_1)(t - e_2)(t - e_3) = 0. \tag{2}$$

Le tre radici si supporranno ordinate in ordine di modulo non decrescente,

---

(*) *Saggio di una generalizzazione delle frazioni continue algebriche:* Mem. della R. Accad. di Bologna, S. IV, T. X. — *Sui sistemi ricorrenti di funzioni:* sotto stampa nelle Mem. della R. Accademia dei Lincei. — *Sulla generalizzazione delle frazioni continue algebriche.* (Ann. di Mat., S. II, T. XIX). Alcuni dei risultati sviluppati nella presente memoria hanno formato oggetto di una comunicazione preventiva alla R. Accad. dei Lincei (Rendiconti, T. VII) sotto il titolo: *Un sistema d'integrali ellittici considerati come funzioni dell'invariante assoluto.*

cioè:

$$|e_1| \leq |e_2| \leq |e_3|;$$

il raggio di convergenza dello sviluppo in discorso sarà dunque $|e_1|$. I coefficienti dello sviluppo sono evidentemente funzioni di x, perció scriveremo

$$T = f^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \tag{3}$$

ed un calcolo semplice dà

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \frac{3}{2} x, \quad P_2 = \frac{27}{8} x^2, \quad P_3 = -\frac{1}{2} + \frac{135}{16} x^3, \ldots\ldots,$$

laddove una P affetta da indice negativo si riguarderà naturalmente come nulla.

2. Derivando logaritmicamente la (1), si ottiene per T l'equazione lineare omogenea

$$2(t^3 - 3tx + 1) \frac{\partial T}{\partial t} + 3(t^2 - x) T = 0. \tag{4}$$

Sostituendo in questa equazione la serie (3), ed uguagliando a zero il cofficiente di t^n, si ottiene l'equazione ricorrente del terz'ordine cui soddisfano le P_n:

$$2(n+1) P_{n+1} - 3(2n+1) x P_n + (2n-1) P_{n-2} = 9, \tag{5}$$

la quale, colle condizioni

$$P_{-2} = 0, \quad P_{-1} = 0, \quad P_0 = 1$$

vale a determinare completamente le P_n per ogni valore intero e positivo di n.

Si scorge subito che P_n è un polinomio razionale intero in x, del grado n indicato dall'indice. Di più, si verifica che il suo sviluppo é della forma

$$P_n = a_{n \cdot n} x^n + a_{n \cdot n-3} x^{n-3} + a_{n \cdot n-6} x^{n-6} + \cdots\cdots;$$

infatti verificata questa legge sui primi polinomî $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots$ e supposta vera fino a P_{n-2} e P_n, la (5) mostra colla semplice sostituzione che la stessa legge é vera per P_{n+1}.

3. L'equazione alle differenze del terz'ordine cui soddisfano le $P_n(x)$ è

$$2(n+1)F(n+1)-3(2n+1)xF(n)+(2n-1)F(n-2)=0\,; \tag{6}$$

ora si possono dare altri due sistemi di polinomî, che diremo $Q_n(x)$ ed $R_n(x)$, che sono al pari di $P_n(x)$ integrali dell'equazione (6) e tali che ogni altro integrale $\omega_n(x)$ si esprime sotto la forma

$$\omega_n(x)=\alpha P_n(x)+\beta Q_n(x)+\gamma R_n(x)\,, \tag{7}$$

essendo α, β, γ indipendenti di n. Basta infatti porre per le P_n, Q_n, R_n le condizioni iniziali

$$\left\{\begin{array}{lll} P_{-1}=0\,, & P_0=1\,, & P_1=\frac{3}{2}x\,, \\ Q_{-1}=0\,, & Q_0=0\,, & Q_1=1 \\ R_{-1}=-2, & R_0=0\,, & R_1=0\,; \end{array}\right. \tag{8}$$

si noti che dalle (8) e dalla (6) per $n=0$ risulta ancora

$$P_{-2}=0\,,\quad Q_{-2}=2\,,\quad R_{-2}=0\,.$$

Tali condizioni, insieme all'equazione (6), oltre a determinare P_n come po linomio di grado n, ci danno Q_n come polinomio di grado $n-1$ ed R_n come polinomio di grado $n-2$: e siccome il determinante delle (8) è diverso da zero, ogni integrale della (6) si esprime effettivamente sotto la forma (7). Ognuno dei polinomi Q_n ed R_n ha la proprietà già riscontrata nelle P_n, di contenere sole potenze di x congrue fra loro rispetto al modulo 3.

4. È noto che si chiama *equazione limite* di un'equazione lineare alle differenze quell'equazione algebrica che si ottiene sostituendo $F(n+r)$ con X^r, ed i rapporti dei coefficienti coi loro limiti rispettivi per $n=\infty$. L'equazione limite della (6) è dunque, secondo questa definizione:

$$X^3-3xX^2+1=0\,, \tag{9}$$

la quale è reciproca della (2), ed ha quindi per radici $\frac{1}{e_1}, \frac{1}{e_2}, \frac{1}{e_3}$. Ora da un teorema del Poincaré [*] risulta che soddisfacendo $F(n)$ all' equa-

[*] American Journal of Mathematics, T. VII.

zione (6), il limite di $\frac{F(n+1)}{F(n)}$ è una radice dell'equazione limite ed *in generale* la massima $\frac{1}{e_1}$ in valore assoluto; solo eccezionalmente essa può essere $\frac{1}{e_2}$ e più eccezionalmente ancora $\frac{1}{e_3}$: quel *integrale*, per il quale il limite è la radice *minima* in valore assoluto (unico quando esiste) è stato da me detto *integrale distinto.*

Ma si è trovato che la serie (3) converge nel cerchio di centro 0 e di raggio $|e_1|$ nel piano t; perciò il limite per $n=\infty$ di $\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$ non potrà essere diverso da $\frac{1}{e_1(x)}$, cioè come integrale della (6) P_n rientra nel caso generale contemplato dal teorema del Poincaré.

Un integrale definito ellittico di terza specie.

5. Principierò dal mutare lievemente la forma della funzione di terzo grado che figura sotto al radicale negli integrali normali ellittici secondo le notazioni del Weierstrass. Questa funzione è, come è noto,

$$f=4y^3-g_2y-g_3$$

dove g_2 è l'invariante quadratico e g_3 l'invariante cubico della forma biquadratica a_x^4 cui appartiene il campo di funzioni ellittiche. Se ora si pone

$$y=\sqrt[3]{-\frac{g_3}{4}}\,t$$

la f prende la forma (all'infuori di un fattore costante)

$$f=t^3-\frac{g_2}{\sqrt[3]{4g_3^2}}\,t+1\,;$$

posto ora

$$x=\frac{g_2}{3\sqrt[3]{4g_3^2}}\,, \tag{10}$$

viene appunto per f la forma considerata nei §§ precedenti, cioè

$$f = t^3 - 3xt + 1\,. \tag{11}$$

La x è evidentemente, come risulta dalla (10), un invariante assoluto (irrazionale) della forma biquadratica a_x^4; e gl'integrali ellittici si possono senza restrizione, all'infuori del caso di $g_3 = 0$, riguardare come aventi sotto il radicale la f sotto la forma (11).

6. Si consideri ora l'integrale di terza specie

$$\int \frac{dt}{(u-t)\sqrt{f}}\,;$$

lo si limiti assumendo come linea di integrazione una linea determinata l, aperta o chiusa, finita od infinita, e si indichi con $V(u, x)$ la funzione così ottenuta. Essa funzione soddisfa ad un'equazione lineare differenziale, che è facile di formare. Parto infatti dallo sviluppo

$$u^3 - 3ux + 1 = t^3 - 3tx + 1 + 3(t^2 - x)(u-t) + 3t(u-t)^2 + (u-t)^3,$$

moltiplico ambo i membri per

$$\frac{dt}{(u-t)\sqrt{f}}$$

ed integro lungo l: viene

$$(u^3 - 3ux + 1)V = \int_{(l)} \frac{\sqrt{f}dt}{u-t} + 3\int_{(l)} \frac{(t^2-x)dt}{\sqrt{f}} + 3\int_{(l)} \frac{t(u-t)dt}{\sqrt{f}} + \int_{(l)} \frac{(u-t)^2 dt}{\sqrt{f}}\,;$$

derivando rispetto a V, ed integrando per parti il primo termine del secondo membro:

$$2(u^3 - 3ux + 1)\frac{\partial V}{\partial u} + 6(u^2 - x)V =$$

$$= 3\int_{(l)} \frac{(t^2-x)dt}{(u-t)\sqrt{f}} + 6\int_{(l)} \frac{tdt}{\sqrt{f}} + 4\int_{(l)} \frac{(u-t)dt}{\sqrt{f}} - 2\left[\frac{\sqrt{f}}{u-t}\right]_{(e)}.$$

Si ha poi identicamente

$$u^2 - x = t^2 - x + 2t(u-t) + (u-t)^2$$

onde

$$(u^2 - x)V = \int_{(l)} \frac{(t^2 - x)dt}{(u - t)\sqrt{f}} + 2\int_{(l)} \frac{tdt}{\sqrt{f}} + \int_{(l)} \frac{(u - t)dt}{\sqrt{f}},$$

e questa, moltiplicata per 3 e sottratta dalla precedente, dà

$$(12) \qquad 2(u^3 - 3ux + 1)\frac{\partial V}{\partial u} + 3(u^2 - x)V = su - s' - 2\left[\frac{\sqrt{f}}{u - t}\right]_{(l)}.$$

dove si è posto per brevità

$$(13) \qquad s = \int_{(l)} \frac{dt}{\sqrt{f}}, \quad s' = \int_{(l)} \frac{tdt}{\sqrt{f}},$$

La (12) è l'equazione lineare del prim'ordine non omogenea cui soddisfa l'integrale

$$(14) \qquad V(u, x) = \int_{(l)} \frac{dt}{(u - t)\sqrt{t^3 - 3tx + 1}}.$$

7. Si prenda una linea l d'integrazione che vada da una delle radici e_i della f fino all'infinito: la (14) diviene

$$V(u, x) = \int_{e_i}^{\infty} \frac{dt}{(u - t)\sqrt{f}};$$

nell'equazione differenziale (12) l'ultimo termine del secondo membro si annulla e viene

$$(15) \qquad 2(u^3 - 3ux + 1)\frac{\partial V}{\partial u} + 3(u^3 - x)V = su - s',$$

dove ora s, s' sono due integrali completi, l'uno di prima e l'altro di seconda specie: cioè s è un periodo che si può indicare con ω, ed s' è allora $\eta = \zeta(\omega)$. (*)

8. Prendendo per e_i la radice di modulo massimo e_3, e per linea di

(*) Si adottano per ciò che riguarda la teoria delle funzioni ellittiche le notazioni del *Weierstrass* usate pure nel trattato dell' *Halphen*.

integrazione il prolungamento da e_3 fino all'infinito del raggio vettore passante per e_3, l'integrale $V(u, x)$ sarà sviluppabile in serie di potenze intere e positive di u per tutti i valori di u compresi in un cerchio di centro $u=0$ e di raggio $|e_3|$; sia essa serie:

$$(16) \qquad V(u, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(x) u^n .$$

I coefficienti $\omega_n(x)$ soddisfaranno manifestamente all'equazione ricorrente (6), e per i primi valori di n si avrà dalla (15),

$$2\omega_1 - 3x\omega_0 = -s', \quad 4\omega_2 - 9x\omega_1 = s ,$$

da cui, confrontando colla (6) per $n=0$ ed $n=1$, viene $s' = -\omega_{-2}$, $s = -\omega_{-1}$. Avendosi poi dalla (14) (per $n=0, 1, \ldots \infty$)

$$(17) \qquad \omega_n(x) = -\int_{e_3}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}\sqrt{f}} ,$$

il confronto colla (13) mostra che questa formola è valida altresì per $n=-1$, $n=-2$.

Il sistema (17) ci fornisce un integrale notevole dell'equazione alle differenze (6). Intanto ne abbiamo mediante la (17) un'espressione in forma d'integrale definito, che colle notazioni tolte dalla teoria delle funzioni ellittiche:

$$t = \wp(u), \quad \sqrt{f} = \wp'(u), \quad \wp(\omega) = e_3$$

si riduce a

$$(18) \qquad \omega_n(x) = \int_0^{\omega} \frac{du}{\wp^{n+1}(u)}, \quad \omega_{-1} = \omega, \quad \omega_{-2} = -\zeta(\omega) = -\eta$$

Inoltre, siccome la serie (16) converge entro un cerchio di raggio $|e_3|$, il limite del rapporto $\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n}$ per $n=\infty$ non può essere maggiore di $\frac{1}{e_3}$ in valore assoluto, epperciò (§ 4) *il sistema* $\omega_n(x)$ *costituisce l'integrale distinto dell'equazione* (6). Ponendo $\omega_n(x)$ sotto la forma (7), si trovano facilmente i valori delle quantità (indipendenti da n) α, β, γ. Infatti, facendo in (7) $n=-2, -1, 0$, viene (v. § 3)

$$\omega_{-2} = 2\beta, \quad \omega_{-1} = \gamma, \quad \omega_0 = \alpha ,$$

onde

$$\omega_n(x) = P_n(x)\int_0^{\omega} \frac{du}{\wp(u)} - \frac{\eta}{2} Q_n(x) + \omega R_n(x), \tag{19}$$

formola che mi sembra abbastanza notevole e che riconduce gl' integrali $\omega_n(x)$ ai periodi ω, η e all' integrale ω_0.

9. Limitiamo invece l' integrale (14) fra 0 ed una radice e_i, ed avremo

$$V(u, x) = \int_0^{e_i} \frac{dt}{(u-t)\sqrt{f}} \tag{14''}$$

che sarà sviluppabile in serie di potenze di $\frac{1}{u}$ per tutti i valori di u esterni ad un cerchio di centro $u=0$ e di raggio $|e_i|$. L' equazione (12) diventerà in questo caso:

$$2(u^3 - 3ux + 1)\frac{\partial V}{\partial u} + 3(u^2 - x) = su - s' - \frac{2}{u}. \tag{20}$$

Indicando con

$$\sum \frac{a_n(x)}{u^{n+1}}$$

lo sviluppo in serie di $V(u, x)$ e sostituendo nell' equazione differenziale, si trova per le $a_n(x)$ l' equazione ricorrente

$$(2n+1)a_{n+1} - 3x(2n-1)a_{n-1} + 2(n-1)a_{n-2} = 0$$

colle equazioni iniziali (per $n = -1, 0, 1$)

$$a_0 = s, \quad a_1 = s', \quad a_2 - xa_0 = \frac{2}{3}.$$

Dalla (14) si ha poi

$$a_n(x) = \int_0^{e_i} \frac{t^n dt}{\sqrt{f}},$$

che per $n=0$, $n=1$ ci fa ritrovare precisamente s ed s'.

L'equazione ricorrente inversa.

10. Nel § precedente ci si è presentato uno sviluppo in serie i cui coefficienti soddisfano all'equazione alle differenze di terz' ordine

$$(21) \qquad (2n+1)F(n+1) - 3x(2n-1)F(n-1) + 2(n-1)F(n-2) = 0$$

che si dirà *inversa* della (6); col cambiamento di n in $-n$ essa si riconduce, con lieve modificazione di scrittura, all'equazione (6). L'equazione limite della (21) è secondo la regola data al § 4:

$$X^3 - 3xX + 1 = 0,$$

cioè la $f = 0$ medesima, eppercio il limite per $n = \infty$ di $\frac{F(n+1)}{F(n)}$ sarà una delle radici e_1, e_2 od e_3: in generale la e_3, eccezionalmente le altre due; un solo integrale, l'integrale *distinto*, ha per limite di quel rapporto la e_1.

È facile formare quest'integrale distinto. Se infatti nella (14'') prendiamo per limite superiore d'integrazione la e_1, la serie di potenze negative di u secondo cui si sviluppa la $V(u, x)$ converge in un cerchio di raggio $|e_1|$, talchè indicati con $\sigma_n(x)$ i coefficienti, dovrà essere

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_{n+1}(x)}{\sigma_n(x)} = e_1(x).$$

Questo sistema $\sigma_n(x)$, di cui ci dovremo ora occupare, è dunque dato da

$$(22) \qquad \sigma_n(x) = \int_0^{e_1} \frac{t^n dt}{\sqrt{f}}; \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots \infty);$$

esso soddisfa alla (21), di cui è integrale distinto, colla condizione iniziale

$$(23) \qquad \sigma_2(x) - x\sigma_0(x) = \frac{2}{3}.$$

11. Come all'equazione (6), anche alle (21) si può soddisfare mediante varî sistema di polinomî: ne definiremo tre, che denoteremo con $A_n(x)$, $B_n(x)$, $C_n(x)$, i quali costituiscono un sistema fondamentale d'integrali della

(21), cioè che servono ad esprimere qualunque altro integrale mediante una espressione lineare a coefficienti indipendenti da n. Tali integrali verranno determinati dai valori iniziali

$$(24) \qquad \begin{cases} A_0 = 0, & A_1 = 0, & A_2 = \frac{3}{2}, \\ B_0 = 1, & B_1 = 0, & B_2 = x, \\ C_0 = 0, & C_1 = 1, & C_2 = 0, \end{cases}$$

dai quali, per mezzo dell'equazione (21), si deducono le $A_n(x)$, $B_n(x)$, $C_n(x)$ che si scorgono immediatamente essere polinomî razionali interi in x per ogni valore intero positivo dell'indice n; notiamo in particolare i valori:

$$A_3 = 0, \qquad B_2 = \frac{2}{3}, \qquad C_3 = \frac{9x}{5},$$

$$A_4 = \frac{10x}{7}, \quad B_4 = \frac{15x^2}{6}, \quad C_4 = \frac{4}{7}.$$

Un esame più attento, fondato sulla stessa equazione (21) e già fatto in un caso più generale in altro lavoro (*), mostra che i gradi di A_n, B_n, C_n sono rispettivamente

$$r-1, \quad r, \quad r-1 \qquad \text{per} \quad n = 2r$$

ed

$$r-1, \quad r, \quad r \qquad \text{per} \quad n = 2r+1.$$

Il determinante dei valori iniziali (24) essendo diverso da zero, col sistema A_n, B_n, C_n si esprime linearmente ogni altro integrale della (21); ed in particolare all'integrale distinto $\sigma_n(x)$ si può dare la forma

$$\sigma_n(x) = \lambda A_n(x) + \mu B_n(x) + \nu C_n(x),$$

dove le λ, μ, ν sono indipendenti da n. A determinarle, si faccia nella precedente equazione $n = 0, 1, 2$; si avrà:

$$\sigma_0 = \mu, \quad \sigma_1 = \nu, \quad \sigma_2 = \frac{2}{3}\lambda + \mu x$$

(*) *Saggio sulla generalizzazione delle frazioni continue algebriche*, § 10.

e tenendo conto della (23):

$$\lambda = 1\,, \quad \mu = \sigma_0\,, \quad \nu = \sigma_1\,.$$

Si ottiene così l'importante equazione

$$(25) \qquad \sigma_n(x) = A_n(x) + B_n(x)\sigma_0 + C_n(x)\sigma_1\,,$$

da cui trarremo varie conseguenze, e frattanto quella che le σ_n non dipendono da altre trascendenti fuorché dalle σ_0 e σ_1.

12. Le trascendenti σ_0, σ_1 si possono pure esprimere mediante le notazioni della teoria delle funzioni ellittiche nel modo seguente: sia α un valore soddisfacente all'equazione

$$\wp(\alpha) = 0\,;$$

ponendo

$$t = \wp(u)\,, \quad \sqrt{f} = \wp'(u)\,, \quad \wp(\omega') = e_1\,, \quad \zeta(\omega') = \eta'$$

si ha

$$\sigma_0(x) = \int_\alpha^{\omega'} du = \omega' - \alpha\,, \quad \sigma_1(x) = \int_\alpha^{\omega'} \wp(u)du = \zeta(\alpha) - \eta'$$

onde

$$(26) \qquad \sigma_n(x) = A_n + (\omega' - \alpha)B_n - (\zeta(\alpha) - \eta')C_n\,.$$

Relazioni fra gl'integrali delle due equazioni ricorrenti.

13. Riprendiamo l'equazione (6) cui soddisfano le P_n e Q_n, e scriviamo

$$2(n+1)P_{n+1} - 3(2n+1)xP_n + (2n-1)P_{n-2} = 0\,,$$
$$2(n+1)Q_{n+1} - 3(2n+1)xQ_n + (2n-1)Q_{n-2} = 0\,,$$
$$2nP_n - 3(2n-1)xP_{n-1} + (2n-3)P_{n-3} = 0\,,$$
$$2nQ_n - 3(2n-1)xQ_{n-1} + (2n-3)Q_{n-3} = 0\,.$$

Moltiplicando la prima per Q_n, la seconda per P_n e sottraendo, indicando con (P_rQ_s) il determinante di second' ordine

$$P_rQ_s - Q_rP_s\,,$$

viene

$$2(n+1)(P_{n+1}Q_n)+(2n-1)(P_{n-2}Q_n)=0.$$

Moltiplicando la terza delle equazioni precedenti per Q_{n-2}, la quarta per P_{n-2} e sottraendo, si ottiene similmente:

$$-2n(P_{n-2}Q_n)-3(2n-1)x(P_{n-1}Q_{n-2})-(2n-3)(P_{n-2}Q_{n-3})=0,$$

e sostituendo nella precedente

$$2(n+1)(P_{n+1}Q_n)-\frac{3(2n-1)^2x}{2n}(P_{n-1}Q_{n-2})-\frac{(2n-3)(2n-1)}{2n}(P_{n-2}Q_{n-3})=0.$$

Qui pongo:

$$(P_{n+1}Q_n)=(-1)^{n+1}\frac{3.5.7\ldots(2n-1)(2n+1)}{4.6\ldots2n(2n+2)}C_{n+1}, \tag{27}$$

onde sostituendo e sopprimendo i fattori comuni:

$$(2n+1)C_{n+1}-3(2n-1)xC_{n-1}+2(n-1)C_{n-2}=0,$$

che é precisamente l'equazione (21) inversa della (6).

Ricordando ora che per le P_n, Q_n, si hanno i valori iniziali

$$P_0=1,\quad P_1=\frac{3}{2}x,\quad P_2=\frac{27}{8}x^2,\quad P_3=-\frac{1}{2}+\frac{135}{16}x^3,$$

$$Q_0=0,\quad Q_1=1,\quad Q_2=\frac{9}{4}x,\quad Q_3=\frac{45}{8}x^2,$$

vengono per la C_n, in seguito alla (27), i valori iniziali

$$C_1=1,\quad C_2=0,\quad C_3=\frac{9}{5}x.$$

Ma il sistema dei polinomi $C_n(x)$ introdotto al § 11 é appunto definito dalle condizioni di soddisfare all'equazione (21) e dai valori iniziali

$$C_0=0,\quad C_1=1,\quad C_2=0,\quad \text{dai quali risulta}\quad C_3=\frac{9}{5}x;$$

essi non possono dunque differire dalle C_n, talchè la (27) serve ad esprimere la C_n mediante un determinante delle P e delle Q. In modo analogo si trovano relazioni fra le A_n, le B_n e le P_n, Q_n, R_n: esse sono riunite nel seguente specchio:

$$(28)\qquad \begin{cases} A_n = (-1)^n \dfrac{4.6\dots 2n}{3.5\dots(2n-1)}(R_n Q_{n-1} - Q_n R_{n-1}), \\ B_n = (-1)^n \dfrac{4.6\dots 2n}{3.5\dots(2n-1)}(R_n P_{n-1} - P_n R_{n-1}), \\ C_n = (-1)^n \dfrac{4.6\dots 2n}{3.5\dots(2n-1)}(P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1}). \end{cases}$$

14. Se nel determinante

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} A_n & B_n & C_n \\ A_{n+1} & B_{n+1} & C_{n+1} \\ A_{n+2} & B_{n+2} & C_{n+2} \end{vmatrix}$$

si sostituiscono ad A_{n+2}, B_{n+2}, C_{n+2} i loro valori tratti dalla (21), si ottiene senza difficoltà

$$\Delta_n = -\frac{2n}{2n+3}\Delta_{n-1}$$

da cui

$$\Delta_n = (-1)^n \frac{2n.2(n-1)\dots 2}{(2n+3).(2n+1)\dots 3}\Delta_0,$$

ma Δ_0 si trova senz'altro uguale a $\frac{2}{3}$ (v. § 11), onde

$$(29)\qquad \Delta_n = (-1)^n \frac{4.4.6.8\dots 2n}{3.3.5.7\dots(2n+3)}$$

15. Inversamente a ciò che si è fatto nel § 13, si possono esprimere le P_n, Q_n, R_n mediante determinanti nelle A_n, B_n, C_n. Ciò si può fare sia per mezzo del determinante calcolato nel § precedente, sia partendo dall'equazione ricorrente e seguendo una via analoga a quella tenuta nel

detto § 13. Si giunge così al sistema:

$$(30)\quad \begin{cases} P_n = (-1)^n \dfrac{3.5.7\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots 2n}(B_n C_{n+1} - C_n B_{n+1}), \\[2ex] Q_n = (-1)^n \dfrac{3.5.7\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots 2n}(A_n C_{n+1} - C_n A_{n+1}), \\[2ex] R_n = (-1)^n \dfrac{3.5.7\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots 2n}(A_n B_{n+1} - B_n A_{n+1}). \end{cases}$$

Da queste combinate colle (28), o anche dal determinante Δ_n, risultano le equazioni:

$$(31)\quad \begin{cases} A_n P_n + B_n Q_n + C_n R_n = 0, \\ A_{n+1} P_n + B_{n+1} Q_n + C_{n+1} R_n = 0, \\ A_{n+2} P_n + B_{n+2} Q_n + C_{n+2} R_n = \dfrac{2}{6n+9}. \end{cases}$$

16. Dall'equazione fondamentale (25) stabilita a § 11 si ha:

$$\sigma_n = A_n + B_n \sigma_0 + C_n \sigma_1,$$
$$\sigma_{n+1} = A_{n+1} + B_{n+1}\sigma_0 + C_{n+1},$$

onde si ricavano i valori di σ_0, σ_1 espressi in forma di frazioni. Moltiplicando ambo i termini di tali frazioni per

$$(-1)^n \frac{3.5.7\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots 2n}$$

e ponendo

$$\lambda_n = (-1)^n \frac{3.5.7\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots 2n}(\sigma_n C_{n+1} - \sigma_{n+1} C_n),$$

$$\mu_n = (-1)^n \frac{3.5.7\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots 2n}(\sigma_n B_{n+1} - \sigma_{n+1} B_n),$$

si ha

$$(32)\quad \sigma_n + \frac{Q_n}{P_n} = \frac{\lambda_n}{P_n}, \quad \sigma_1 + \frac{R_n}{P_n} = \frac{\mu_n}{P_n}.$$

Da queste e dalle (28)

$$\frac{Q_n}{P_n}-\frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}}=(-1)^n\frac{3.5.7\ldots(2n+1)}{4.6.8\ldots 2n}\,\frac{C_n}{P_nP_{n-1}}$$

e così

$$\frac{R_n}{P_n}-\frac{R_{n-1}}{P_{n-1}}=(-1)^n\frac{3.5\ldots(2n-1)}{4.6\ldots 2n}\,\frac{B_n}{P_nP_{n-1}}.$$

Ora

$$\frac{Q_n}{P_n}=\frac{Q_0}{P_0}+\left(\frac{Q_1}{P_1}-\frac{Q_0}{P_0}\right)+\cdots+\left(\frac{Q_n}{P_n}-\frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}}\right),$$

onde si deduce lo sviluppo (per ora puramente formale e della cui convergenza si discorrerà più avanti)

$$(33)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{Q_n}{P_n}=\frac{C_1}{P_1}+\frac{3}{4}\frac{C_2}{P_1P_2}+\cdots+(-1)^n\frac{3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\,\frac{C_n}{P_{n-1}P_n}+\cdots,$$

e analogamente

$$(34)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{R_n}{P_n}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\,\frac{B_n}{P_{n-1}P_n}.$$

16.bis Le λ_n, μ_n sono, come le P_n, Q_n, R_n, integrali dell'equazione (6); ciò risulta subito dalle formole (32). Volendo vedere quale è il limite del rapporto $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$ per $n=\infty$, si formi

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}=-\frac{2n+3}{2n+2}\,\frac{\sigma_{n+1}C_{n+2}-\sigma_{n+2}C_{n+1}}{\sigma_nC_{n+1}-\sigma_{n+1}C_n}=-\frac{2n+3}{2n+2}\cdot\frac{\frac{C_{n+2}}{C_{n+1}}-\frac{\sigma_{n+2}}{\sigma_{n+1}}}{\frac{\sigma_n}{\sigma_{n+1}}-\frac{C_n}{C_{n+1}}}$$

e passando al limite per $n=\infty$, ricordando che $\frac{C_{n+1}}{C_n}$, $\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n}$ hanno rispettivamente per limiti e_3 ed e_1, viene

$$\lim_{n=\infty}\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}=-\frac{e_3-e_1}{\frac{1}{e_1}-\frac{1}{e_3}}=-e_1e_3=\frac{1}{e_2}.$$

Così per μ_n.

Ossarvazioni sulle radici dell'equazione $f = 0$.

17. Preso un numero positivo k arbitrariamente piccolo, si può sempre assegnare un numero positivo R tale che per $|x| > R$ la radice e_1 minima in valore assoluto dell'equazione $f = 0$, sia in valore assoluto inferiore a R.

A dimostrarlo, notiamo che da $f = 0$ si deduce

$$e_1^2 + \frac{1}{e_1} = 3x\,;$$

facendo

$$e_1 = \rho e^{i\vartheta}, \quad x = re^{i\alpha},$$

dove α è un arco del primo quadrante, viene

$$(35) \qquad \rho^2 \cos 2\theta + \frac{1}{\rho} \cos\theta = 3r\cos\alpha\,, \quad \rho^2 \operatorname{sen} 2\theta - \frac{1}{\rho} \operatorname{sen}\theta = 3r \operatorname{sen}\alpha\,.$$

Intanto

$$e_1 e_2 e_3 = -1\,,$$

onde se le radici non hanno tutte il modulo 1, il che si esclude evidentemente dalle (35) per r abbastanza grande, la e_1 ha il modulo certamente minore d'uno.

Perciò sarà

$$1 + \frac{1}{\rho}\cos\theta > 3r\cos\alpha\,, \quad \text{ed } \textit{a fortiori} \quad 1 + \frac{1}{\rho} > 3r\cos\alpha\,;$$

così

$$1 + \frac{1}{\rho} > 3r \operatorname{sen}\alpha$$

La quantità $1 + \frac{1}{\rho}$ supera dunque, per ogni α, la maggiore delle due quantità $3r\cos\alpha$, $3r\operatorname{sen}\alpha$. Ma la prima di queste, per α compreso fra 0 e $\frac{\pi}{4}$ decresce da $3r$ a $3r\frac{\sqrt{2}}{2}$; la seconda, per α compreso fra $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$, cresce da $3r\frac{\sqrt{2}}{2}$ a $3r$, onde $1 + \frac{1}{\rho}$ si mantiene, per ogni α, superiore a $3r\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Volendo dunque rendere $|e_1|$ inferiore a k, basta prendere

$$r > \frac{\sqrt{2}}{3}\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Allo stesso risultato si giunge supponendo α in qualsivoglia quadrante.

18. Dai principî generali della teoria delle funzioni algebriche, risulta che la t, definita dall'equazione $f = 0$, si dirama nei punti $x = \infty$ ed inoltre nei punti radici del discriminante

$$(36) \qquad 4x^3 - 1 = 0.$$

Delle tre radici della $f = 0$, l'una di esse, e precisamente la e_1, ammetto per $x = \infty$ uno sviluppo regolare della forma

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x^4} + \frac{c}{x^7} + \cdots;$$

le altre due e_2 ed e_3, sono date da uno sviluppo della forma $\sqrt{x}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$. Questi sviluppi in serie convergono fuori di un cerchio di centro $x = 0$, e di raggio uguale al modulo $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ delle radici del discriminante.

Un'ultima osservazione è che per x reale e $< \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, due radici della f sono uguali in modulo, e precisamente per x positivo, $|e_1| = |e_2|$, e per x negativo, $|e_2| = |e_3|$. Lo stesso è per i valori di x che si deducono dai precedenti moltiplicando per $e^{\frac{2\pi i}{2}}$, $e^{\frac{4\pi i}{3}}$.

Le curve di ugual modulo delle radici e_i.

19. Posto nell'equazione $f = 0$

$$x = u + iv, \quad t = \rho e^{i\theta},$$

si ottiene:

$$(37)\qquad \begin{cases} 3u = \rho^2 \cos 2\theta + \dfrac{1}{\rho} \cos \theta \\ 3v = \rho^2 \operatorname{sen} 2\theta - \dfrac{1}{\rho} \operatorname{sen} \theta . \end{cases}$$

Facendo ora $\rho = \text{cost.}$, ed eliminando θ fra queste equazioni, si ottiene nel piano x un sistema di curve che sono i luoghi dei punti pei quali le radici dell'equazione $f=0$ hanno modulo costante. Si tratta ora di discutere queste curve.

Dalle equazioni (37) risulta intanto che se (u, v) appartiene alla curva $\rho = \text{cost}$, vi appartiene pure $(u, -v)$ come si vede cambiando θ in $-\theta$. Onde l'asse u è asse di simmetria. Facendo poi la trasformazione di assi

$$u' = u \cos \frac{2\pi}{3} - v \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}$$

$$v' = u \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} + v \cos \frac{2\pi}{3},$$

e cambiando $\theta - \dfrac{2\pi}{3}$ in θ_1, le equazioni (37) ci danno

$$3u' = \rho^2 \cos 2\theta_1 + \frac{1}{\rho} \cos \theta_1$$

$$3v' = \rho^2 \operatorname{sen} 2\theta_1 - \frac{1}{\rho} \operatorname{sen} \theta_1 ,$$

cioè riprendono la medesima forma; le tre porzioni di curva comprese fra le semi-rette di argomenti $0, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}$ sono dunque fra loro congruenti.

Ponendo

$$\cos = \frac{1-m^2}{1+m^2}, \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{2m}{1+m^2},$$

le (37) si mutano in

$$(38)\qquad 3u = \frac{\rho^3(1-6m^2+m^4)+1-m^4}{\rho(1+m^2)^2}, \quad 3v = \frac{4\rho^3 m(1-m^2) - 2m(1+m^2)}{\rho(1+m^2)^2},$$

dalle quali risulta che le curve in discorso sono curve *razionali e del quart' ordine.*

Di più esse sono *curve cicliche.* Infatti, se si forma il rapporto $\frac{v}{u}$ e si pone per m il valore ± 1 si ottiene $v = \pm iu$.

Uno studio più attento delle equazioni (37) e (38) conduce ai seguenti risultati:

Per $\rho = 1$, si ha una curva (b nella figura della tavola posta alla fine della Memoria) in forma di rosa a tre foglie con un punto triplo per $x = 0$. Per $\rho > 1$ le curve del sistema hanno tre punti doppi reali lungo le semi-rette di argomento $\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$; al crescere di ρ esse si dilatano tendendo verso un cerchio di raggio infinito; una di esse è disegnata in c.

Per $\rho = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, si ha una curva ($a$) (di terza classe: epicicloide tricuspidale del Cremona) avente i tre cuspidi nei punti radici del discriminante (36), cioè per

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \quad \frac{e^{\frac{2}{3}\pi i}}{\sqrt[3]{4}}, \quad \frac{e^{\frac{4}{3}\pi i}}{\sqrt[3]{4}}. \tag{39}$$

Per ρ decrescente da 1 ad $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ le curve hanno tre punti doppi reali sulle semirette di argomenti $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$: i nodi che esse formano decrescono dalle foglie della rosa b fino ad un punto (radice del discriminante). Una di esse curve è figurata in e. Infine per $\rho < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ si hanno curve chiuse della forma d che per ρ tendente a zero si dilatano tendendo ad un cerchio di raggio infinito.

20. Mediante l'ispezione queste curve e l'impiego di un metodo che ho già indicato in altre occasioni (*), si può agevolmente studiare la variazione dei moduli delle radici della $f = 0$. Immaginiamo infatti descritto nel piano x il sistema delle curve (37), indi in ogni punto di esso piano innalziamo una perpendicolare (che per brevità di linguaggio diremo verticale) e tagliamo su di essa segmenti uguali ai moduli delle radici e_1, e_2, e_3 dell'equazione $f = 0$. Otterremo così una superficie la cui equazione riferita agli assi ortogonali u, v, w si ottiene dall'eliminazione di θ fra le equazioni

$$3u = w^2 \cos 2\theta + \frac{1}{w} \cos\theta, \quad 3v = w^2 \operatorname{sen} 2\theta - \frac{1}{w} \operatorname{sen}\theta,$$

(*) Esso si trova enunciato per la prima volta in una Nota pubblicata nei Rendiconti della Accademia di Stockholm (10 Marzo 1886) sotto il titolo: *Sur une formule dans la théorie des fonctions.*

e le cui sezioni coi piani $w = \text{cost.}$ ci danno le curve del sistema (37). Questa superficie si compone di due falde, l'una superiore, l'altra inferiore al piano x, fra loro simmetriche; noi ci occuperemo solo della falda superiore come quella che ci dà la variazione dei moduli delle radici.

Dallo studio fatto delle curve (37) risulta che la superficie è assintotica al piano x, e che essa ha tre linee doppie poste in piani verticali passanti per l'asse w, di azimut $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$, ed incrociantisi nel punto triplo $u = 0,\ v = 0,\ w = 1$.

La verticale innalzata nel punto $x = 0$ incontra la superficie in questo punto triplo.

Le verticali innalzate dai punti del piano x interni alla rosa b incontrano la superficie in due punti inferiori alla sezione $w = 1$, ed in un terzo superiore; quelle innalzate dai punti del piano x esterni alla rosa b incontrano la superficie in un punto inferiore al piano $w = 1$ ed in due superiori. Per i punti interni alla rosa si ha dunque

$$|e_1| < 1, \quad |e_2| < 1, \quad |e_3| > 1,$$

ed

$$|e_1| < 1, \quad |e_2| > 1, \quad |e_3| > 1$$

per i punti esterni, mentre sulla curva b è $|e_2| = 1$.

L'esame delle intersezioni delle verticali colla superficie ci permette ancora di concludere che:

I luoghi dei punti pei quali è $|e_1| = \text{cost.}$ sono dati dalle curve chiuse d se è $|e_1| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ e dai *triangoli* $A_1\ B_1\ C_1$ delle curve e se $|e_1| > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$: sulla tricuspidale a si ha $|e_1| = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Diremo C_ρ quella curva o porzione di curva su cui è $|e_1| = \rho$; esse curve C_ρ si vanno dilatando dal punto $x = 0$ all'infinito se ρ decresce da 1 a 0.

I luoghi dei punti pei quali è $|e_3| = \text{cost.}$ sono dati dai triangoli ABC delle curve e; essi si riducono al punto 0 per $|e_3| = 1$ e si vanno dilatando all'infinito per $|e_3|$ crescente da 1 all'∞. Diremo C'_ρ la curva su cui è $|e_3| = \rho$.

Infine i luoghi dei punti pei quali è $|e_2| = \text{cost.}$ sono per $|e_1| = 1$, la rosa b; per $|e_2| < 1$, i nodi o cappî delle curve e, per $|e_2| > 1$, gli archi esterni AcB, BcC, CcA delle curve c. Diremo C''_ρ quella di queste curve per la quale è $|e_2| = \rho$. Le curve C, C' sono connesse, mentre le C'' pos

sono essere non connesse e si riducono ai tre punti radici del discriminante (36) per $\rho = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Si noti ancora che dall'osservazione fatta alla fine del § 18, lungo i tre tratti rettilinei che da 0 vanno ai punti radici del discriminante, si ha $|e_1| = |e_2|$, come è manifesto ancora dalla considerazione della superficie, mentre sulle semi-rette che vanno da 0 all'∞ nelle direzioni $\frac{\pi}{3}$, $-\pi$, $\frac{5\pi}{3}$ si ha $|e_2| = |e_3|$.

Le σ_n sono regolari per $x = \infty$. Loro ordine.

21. Al § 10 abbiamo definito l'integrale σ_n distinto dall'equazione ricorrente (21), il quale ci era dato dall'integrale (22). Se in questo poniamo $e_1 t$ al posto di t, viene

$$\sigma_n = e_1^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n dt}{\sqrt{e_1^3 t^3 - 3x e_1^3 t + 1}}$$

che con facile trasformazione si riduce a

$$\sigma_n = e_1^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n dt}{\sqrt{(t-1)(e_1^3(t^2+t)-1)}} \tag{40}$$

Qui si ha lungo tutta la linea d'integrazione $t < 1$, onde $t^2 + t < 2$; prendo secondo il § 17 un numero positivo R abbastanza grande perchè per $|x| > R$ sia $|e_1^3| < \frac{1}{2}$: sarà per tali valori di x e di t convergente in ugual grado lo sviluppo

$$\frac{1}{\sqrt{1 - e_1^3(t + t^2)}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2\nu-1)}{2.4.6\ldots 2\nu} e_1^{3\nu}(t^2+t)^\nu$$

da cui

$$\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2\nu-1)}{2.4.6\ldots 2\nu} e_1^{3\nu+n+1} \int_0^1 \frac{t^n (t^2+t)^\nu dt}{\sqrt{1-t}}.$$

Questa serie converge pure in ugual grado pei valori di $|x| > R$, e quindi per un noto teorema del Weierstrass è sviluppabile per tali valori di x in serie di potenze di $\frac{1}{x}$; essendo poi (§ 18) la e_1 una serie di potenze di $\frac{1}{x}$ incominciante col termine di grado -1, la σ_n sarà una serie di potenze incominciante col termine di grado $-(n+1)$ in x, o come si dice più brevemente una serie di potenze d'ordine $-(n+1)$.

22. La condizione di convergenza delle (41),

$$|e_1^3| < \frac{1}{2},$$

è soddisfatta per i punti esterni alla curva tricuspidale a; lo sviluppo della (41) stessa in serie di potenze di $\frac{1}{x}$ converge fuori di un cerchio di centro 0 ed includente tutta la curva tricuspidale: il raggio del cerchio deve dunque essere $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

23. Le proprietà delle σ_n di essere dell'ordine $-(n+1)$ e di soddisfare all'equazione ricorrente (21) colla equazione iniziale (23) basta a determinarle completamente. È facile vedere infatti che se prendiamo due serie a coefficienti indeterminati σ_0 e σ_1, e le leghiamo dalle equazioni (dedotte dalle (21))

$$x\sigma_0 + \frac{2}{3} = \sigma_2,$$

$$9x\sigma_1 - 2\sigma_0 = 5\sigma_3$$

. . . .

$$3(2n-1)n\sigma_{n-1} - 2(n-1)\sigma_{n-2} = (2n+1)\sigma_{n+1}$$

colla condizione che $\sigma_2, \sigma_3, \ldots \sigma_{n+1}$ siano rispettivamente dell'ordine -3, -4, $-(n+2)$, i coefficienti delle σ_0, σ_1 vengono determinati univocamente. Determinate le σ_0, σ_1 le equazioni stesse servono a dedurre le σ_n per ogni indice $n > 1$.

Tornando all'equazione (25), si vede che date σ_0, σ_1, i polinomî A_n, B_n, C_n hanno le proprietà di soddisfare all'equazione

$$A_n + B_n\sigma_0 + C_n\sigma_1 = 0$$

fino ai termini di grado $-n$ (inclusivamente) in x.

Convergenza delle serie formate colle P_n ed affini.

24. Nei paragrafi precedenti abbiamo definito varî sistemi di funzioni ricorrenti: le P_n, Q_n, R_n, le A_n, B_n, C_n, le σ_n, ecc. Abbiamo trovato il limite cui tende, per $x = \infty$, il rapporto fra due funzioni consecutive di uno stesso sistema, ed abbiamo visto che questo rapporto è una radice dell' equazione $f = 0$ o della sua reciproca. Infine abbiamo trovate le curve del piano x lungo le quali si mantiene costante il modulo di una delle radici della $f = 0$. Questi risultati ci pongono in grado di rispondere alla seguente domanda: « Entro quale campo converge una serie proce-« dente per le funzioni P_n, o per le funzioni di un altro dei sistemi de-« finiti in questo lavoro? »

Abbiasi dapprima lo sviluppo in serie

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x),$$

ed il sistema dei coefficienti sia tale che

$$c_n \frown \alpha^n, \tag{42}$$

il che sta ad esprimere in modo abbreviato che se con tali coefficienti si forma la serie $\Sigma \frac{c_n}{x_n}$, essa converge per $|x| > \alpha$.

Essendosi trovato che

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{1}{e_1(x)},$$

ne viene che la serie S convergerà sotto la condizione $|e_1(x)| > \alpha$. Onde intanto la serie non potrà essere convergente se non è $\alpha < 1$, per essere e_1 la radice minima in valore assoluto della f. Inoltre la $|e_1|$ si mantiene costante ed uguale ad α lungo le curve indicate a § 20 con C_α; ognuna di esse comprende tutte quelle per cui $|e_1|$ è maggiore, perciò sarà $|e_1(x)| > \alpha$ *entro il campo semplicemente connesso* chiuso dalla curva C_α.

Entro questo campo la serie S converge pure in ugual grado. Si parte infatti dalle definizioni delle $P_n(x)$,

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \Sigma t^n P_n(x),$$

dove lo sviluppo è convergente per tutti i valori di t inferiori in modulo ad $|e_1(x)|$. Se ora si prende α_1 superiore ad α per tanto poco quanto si vuole, il campo connesso C_{α_1} sarà tutto interno a C_α e per x entro C_α e $|t| \leq \alpha_1$ la funzione $f^{-\frac{1}{2}}$ avrà un massimo valore assoluto L e si avrà:

$$|P_n(x)| < \frac{L}{\alpha_1^{\,n}},$$

onde risulta immediatamente la convergenza in ugual grado della serie S entro il campo C_{α_1} interno a C_α e prossimo ad esso quanto si vuole. Si ha dunque:

« Una serie S è convergente, se è $c_n \backsim \alpha^n$ ed $\alpha < 1$, entro il campo « semplicemente connesso chiuso dalla curva C_α. Entro questo campo, « escluso il contorno, la serie converge in ugual grado. Se la serie $\Sigma c_n x^n$ « rappresenta una funzione trascendente intera, lo stesso è di S. »

Gli stessi risultati valgono per le serie di funzioni Q_n od R_n.

25. Abbiasi ora una serie di funzioni A_n, della forma

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A_n\,,$$

ferma sempre la posizione (42). Essendo

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = e_3\,,$$

la serie S_1 convergerà sotto la condizione $|e_3| < \frac{1}{\alpha}$. Ora la $|e_3|$ è costante ed uguale ad α lungo le curve indicate a § 20 con C'_α: esse si riducono al punto $x = 0$ per $\alpha = 1$ e si dilatano all'infinito per α crescente da 1 all'∞. Dovrà dunque essere $\alpha < 1$ perchè la S_1 possa essere convergente, ed in queste ipotesi la serie convergerà entro il campo semplicemente connesso chiuso dalla curva $C_{\frac{1}{\alpha}}$. Questo campo sarà tanto maggiore quanto più α sarà piccolo, e per $\alpha = 0$ il campo di convergenza comprenderà tutto il piano.

Come a § precedente, si prova la convergenza in ugual grado della serie S_1 per l'interno del campo $C_{\frac{1}{\alpha}}$.

Analoghe considerazioni conducono agli stessi risultati per le serie di $B_n(x)$ o di $C_n(x)$.

26. Si consideri infine una serie di funzioni $\sigma_n(x)$

$$S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sigma_n(x)\,,$$

ricordando che le $\sigma_n(x)$ sono funzioni analitiche di x regolari fuori della curva tricuspidale α. La convergenza della serie S_2 andrà perciò indagata fuori di questa curva. Ora si è trovato (§ 10):

$$\lim \frac{\sigma_{n+1}(x)}{\sigma_n(x)} = e_1(x),$$

perciò, ferma la posizione (42), la serie convergerà per $|e_1| < \frac{1}{\alpha}$. Questa condizione è verificata sempre se è $\alpha < 1$, ed in tal caso la S_2 converge (ed in ugual grado) in tutto il campo esterno alla curva tricuspidale; se poi è $\alpha > 1$, il campo di convergenza sarà limitato dalla curva $C_{\frac{1}{\alpha}}$ e sarà tutto la porzione di piano *esterna* a questa curva. Al crescere di α, la curva $C_{\frac{1}{\alpha}}$ andrà dilatandosi ed il campo di convergenza si ridurrà ad un intorno sempre più piccolo di $x = \infty$.

Sviluppi in serie per σ_0 e per σ_1.

27. Si sono trovate a § 16 le relazioni

$$\sigma_0 = -\frac{Q_n}{P_n} + \frac{\lambda_n}{P_n}, \quad \sigma_1 = -\frac{R_n}{P_n} + \frac{\mu_n}{P_n};$$

dico che se n cresce indefinitamente, $\frac{\lambda_n}{P_n}$ e $\frac{\mu_n}{P_n}$ tendono a zero e quindi $-\frac{Q_n}{P_n}$, $-\frac{R_n}{P_n}$ tendono ai limiti σ_0 e σ_1. Questo risultato completa l'altro che si ha dalla teoria generale dei sistemi ricorrenti, in forza del quale le frazioni $\frac{Q_n}{P_n}$, $\frac{R_n}{P_n}$ sono quelle che, avendo il medesimo denominatore, si sviluppano in serie di potenze di $\frac{1}{x}$ che hanno il massimo numero di termini comuni con σ_0, σ_1 compatibilmente coi gradi dei polinomî P_n, Q_n, R_n (*).

A dimostrare l'asserto, osservo che come si è notato a § 16bis, il limite

(*) Annali di Matematica, § II, T. XIX, pag. 84.

del rapporto $\lambda_{n+1} : \lambda_n$ per $n = \infty$ è la $e_2(x)$, mentre il limite del rapporto $P_{n+1} : P_n$ è $\frac{1}{e_1(x)}$; perciò

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{P_{n+1}} : \frac{\lambda_n}{P_n} = \lim \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} : \lim \frac{P_{n+1}}{P_n} = e_1 e_2 ,$$

ma $e_1 e_2 = -\frac{1}{e_3}$, quantità il cui modulo è minore dell'unità eccettuato per $x = 0$. Ne risulta che per ogni altro valore di x il rapporto $\frac{\lambda_n}{P_n}$ tende a zero per $n = \infty$, epperciò

$$\lim_{n=\infty} \frac{Q_n}{P_n} = -\sigma_0 , \quad \lim_{n=\infty} \frac{R_n}{P_n} = -\sigma_1 .$$

28. Ora (v. § 16) questi limiti sono espressi *formalmente* dalle serie

$$(33 \text{ e } 34) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3.5 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots 2n} \frac{C_n}{P_n P_{n-1}} , \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{3.5 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots 2n} \frac{B_n}{P_n P_{n+1}} ,$$

delle quali siamo attualmente in grado di determinare le condizioni di convergenza. Il rapporto fra un termine ed il precedente è infatti al limite

$$-e_3 e_1^2 = \frac{e_1}{e_2} ;$$

la condizione di convergenza sarà dunque $|e_1| < |e_2|$; ora questa condizione è soddisfatta per ogni valore di x, eccettuati i tre segmenti (inclinati a due a due a 120°) che dal punto o vanno ai tre punti radici del discriminante $4x^3 - 1$ e lungo i quali (v. osservazione in fine del § 20) si ha $|e_1| = |e_2|$. Le funzioni σ_0, σ_1 sono dunque rappresentate in tutto il piano, ad eccezione dei detti tre segmenti, dalle serie di funzioni razionali (33) e (34); si ha così un fatto analogo a quello scoperto dal Thomé (*), che la funzione $\log \frac{x-1}{x-1}$ è rappresentata in tutto il piano, meno il segmento $-1 \cdots +1$, da una serie di funzioni razionali.

(*) Crelle, T. 66.

Sviluppo di una data funzione analitica in serie di P_n o di σ_n.

29. Nell'equazione (21) ricorrente delle σ_n e nella (23) si muti la variabile x in z, e si moltiplichino le equazioni così modificate:

$$3z\sigma_0(z) = 3\sigma_2(z) - 2\,,$$
$$3(2n-1)z\sigma_{n-1}(z) = (2n+1)\sigma_{n-1}(z) + 2(n-1)\sigma_{n-2}$$

rispettivamente per P_0 e $P_{n-1}(x)$, $(n=2,\ 3,\ldots\infty)$.

Sommando le equazioni così ottenute, si ha

$$3z\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\sigma_n(z)P_n(x) =$$
$$= -2P_0 + 2\sigma_0 P_1 + 4\sigma_1 P_2 + \sum_{n=2}^{\infty}\sigma_n(z)\big((2n-1)P_{n-2} + 2(n+1)P_{n+1}\big)\,.$$

Ma per l'equazione ricorrente (5) delle $P_n(x)$ la parentesi nell'ultima sommatoria si puó sostituire con

$$3(2n+1)xP_n\,,$$

e si ha pure

$$P_0 = 1\,,\quad 2P_1 = 3xP_0\,,\quad 2P_2 = 9xP_1\,,$$

onde sostituendo:

$$3z\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\sigma_n(z)P_n(x) = -2 + 3x\sigma_0 P_0 + 9\sigma_1 P_1 + 3x\sum_{n=2}^{\infty}(2n+1)\sigma_n(z)P_n(x)$$

ed infine

$$\frac{1}{x-z} = \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\sigma_n(z)P_n(x)\,. \tag{43}$$

30. È facile trovare la condizione cui debbono soddisfare la x e la z affinché lo sviluppo precedente sia convergente. Il rapporto fra un termine ed il precedente é infatti nella serie (43):

$$\frac{(2n+1)\sigma_n(z)P_n(x)}{(2n-1)\sigma_{n-1}(z)P_{n-1}(x)}$$

che per $n = \infty$ si riduce al limite $\frac{e_1(z)}{e_1(x)}$. La condizione di convergenza del detto sviluppo è dunque espressa da

$$|e_1(z)| < |e_1(x)|.$$

Ora si è visto che le curve per le quali $|e_1| = \rho$ sono quelle indicate con C_ρ a § 20 (esse sono le curve *d* ed i triangoli delle curve *e* della figura); internamente alla C_ρ si ha $|e_1| > \rho$, esternamente $|e_1| < \rho$. Dunque dato un valore a z, e fatto passare per quel punto la curva C_ρ corrispondente, i valori di x pei quali converge la serie (43) saranno tutti quelli interni al campo semplicemente connesso chiuso da C_ρ.

Per tutti i valori di x interni e di z esterni ad una curva C_ρ la serie (43) converge inoltre incondizionatamente ed in ugual grado.

31. Sia ora $f(x)$ una funzione analitica data regolare in un intorno del punto $x = 0$. Descriviamo una curva C_ρ tutta contenuta in quest'intorno: si prenda x interno alla C_ρ e z al contorno della C_ρ stessa; si avrà allora, integrando lungo C_ρ:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(z)dz}{z-x}$$

onde

$$f(x) = -\frac{3}{4\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(x)\int_{C_\rho}\sigma_n(z)f(z)dz\,. \tag{45}$$

Ogni funzione $f(x)$ regolare nell'intorno di $x = 0$ è dunque sviluppabile in serie di polinomî $P_n(x)$, della forma

$$f(x) = \Sigma a_n P_n(x),$$

convergente entro un campo semplicemente connesso limitato da una curva C_ρ, e dove i coefficienti a_n sono dati da

$$a_n = -\frac{3}{4\pi i}(2n+1)\int_{C_\rho}\sigma_n(z)f(z)dz\,. \tag{46}$$

32. Avendosi invece una funzione analitica $f(z)$ data regolare in un intorno di $x = \infty$, si descriverà una curva C_ρ tutta compresa in quell'intorno, e per x preso lungo la C_ρ e per z nello spazio infinito esterno alla

C_ρ si avrà

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f(x)dx}{z-x} = \Sigma b_n \sigma_n(z) \tag{47}$$

con

$$b_n = -\frac{3(2n+1)}{4\pi i}\int_{C_\rho} f(x)P_n(x)dx\,, \tag{48}$$

e lo sviluppo converge in tutto il campo esterno alla C_ρ.

Giova peró un'avvertenza. Le σ_n sono definite dalla loro espressione (22) (in forma d'integrale definito) per ogni valore di x eccettuati i punti critici della e_1, che sono le radici del discriminante $4x^3-1$; fuori peró della curva tricuspidale a esse σ_n sono funzioni ad un valore e regolari. Se nello sviluppo (43) o (47) s'intende dunque che le $\sigma_n(x)$ abbiano ad essere regolari, la C_ρ si dovrà ritenere *esterna* alla curva tricuspidale a, cioè sarà una delle curve designate nella figura con d.

Con metodo analogo a quello che ci ha fatto ottenere gli sviluppi precedenti (45) e (47), si puó trovare lo sviluppo di una funzione data nell'anello compreso fra due curve C_ρ, il quale sarà una serie di $P_n(x)$ e di $\sigma_n(x)$.

Equazioni miste differenziali e alle differenze per le P_n.

33. Come le funzioni sferiche, anche le P_n soddisfano oltrecchè all'equazione alle differenze (5), anche ad equazioni miste differenziali e alle differenze che si ottengono facilmente come segue.

Le P_n essendo date dallo sviluppo in serie di potenze di t della funzione

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{t^3 - 3tx + 1}}$$

che é regolare per $|t| < |e_1(x)|$, si avrà per il teorema di Cauchy ed indicando con ρ una circonferenza di centro $t=0$ e di raggio minore di $|e_1(x)|$:

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\rho)} \frac{du}{u^{n+1}\sqrt{u^3 - 3ux + 1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\rho)} \frac{T(u)du}{u^{n+1}}\,. \tag{49}$$

Derivando,

$$P_n'(x) = \frac{3}{4\pi i}\int_{(\rho)} \frac{T^3(u)du}{u^n}\,.$$

Ma la $P_n(x)$ si può scrivere

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\rho)} \frac{(u^3 - 3ux + 1)T^3(u)du}{u^{n+1}},$$

onde segue l'equazione mista differenziale e alle differenze:

$$3P_n = 2P'_{n-2} - 6xP_n' + 2P'_{n+1}. \tag{50}$$

Un'altra equazione si ottiene integrando per parti l'espressione (49). Si ha infatti, osservando che la parte fuori del segno è nulla:

$$2\pi i P_n(x) = -\frac{3}{2n}\int_{(\rho)} \frac{(u^2 - x)T^3(u)du}{u^n},$$

onde

$$nP_n + P'_{n-2} - xP'_n = 0. \tag{51}$$

È facile vedere che supposte vere due qualunque delle equazioni (5), (50), (51), la terza ne viene di conseguenza. Combinando le (50) e (51) se ne ricava senza difficoltà la

$$(2n+3)P_n = 2P'_{n+1} - 4xP'_n. \tag{52}$$

In modo perfettamente analogo si trova che le σ_n soddisfano alle equazioni miste differenziali e alle differenze

$$3\sigma_n = 2\sigma'_{n+2} - 6x\sigma'_n + 2\sigma'_{n-1}, \tag{53}$$

$$(n+1)\sigma_n = -\sigma'_{n+2} + x\sigma'_n, \tag{54}$$

dalla cui combinazione risulta

$$(2n+5)\sigma_n = -4x\sigma'_n + 2\sigma'_{n-1}. \tag{55}$$

Equazioni differenziali lineari delle P_n e delle σ_n.

34. Al pari delle funzioni sferiche di prima e di seconda specie, anche le funzioni P_n e σ_n sono integrali di equazioni differenziali lineari. Ma mentre le equazioni lineari delle funzioni sferiche appartengono al tipo ipergeometrico di Gauss, le equazioni delle nostre nuove funzioni sono del terz'ordine, con tre punti singolari a distanza finita ed uno all'infinito, ed appartengono al tipo ipergeometrico generalizzato del Goursat (*), il quale è caratterizzato dal fatto che negli sviluppi in serie degl' integrali, il rapporto fra due coefficienti consecutivi è una funzione razionale dell' indice.

Per ottenere l'equazione differenziale lineare delle P_n, procedo come segue: dalla (52) ricavo colla derivazione

$$(56)\quad \left\{\begin{array}{ll} 2P'_{n+1} = (2n+3)P_n + 4xP'_n\,, & 2P'_{n+2} = (2n+5)P_{n+1} + 4xP'_{n+1} \\ 2P''_{n+1} = (2n+7)P'_n + 4xP''_n\,, & 2P''_{n+2} = (2n+9)P'_{n+1} + 4xP''_{n+1} \\ 2P'''_{n+1} = (2n+11)P''_n + 4xP'''_n\,, & 2P'''_{n+2} = (2n+13)P''_{n+1} + 4xP'''_{n+1} \end{array}\right.$$

e dalla (51) deduco

$$nP''_{n+2} = xP'''_{n+2} - P'''_n\,.$$

Sostituendo in questa le formole dello specchio (56), in modo di sostituire l'indice $n+2$ con $n+1$, poi questo con n, giungo all'equazione lineare delle P_n

$$(57)\quad 4(4x^3-1)P'''_n + 96x^2P''_n - x(12n^2+24n-91)P'_n - n(2n+3)(2n+9)P_n = 0.$$

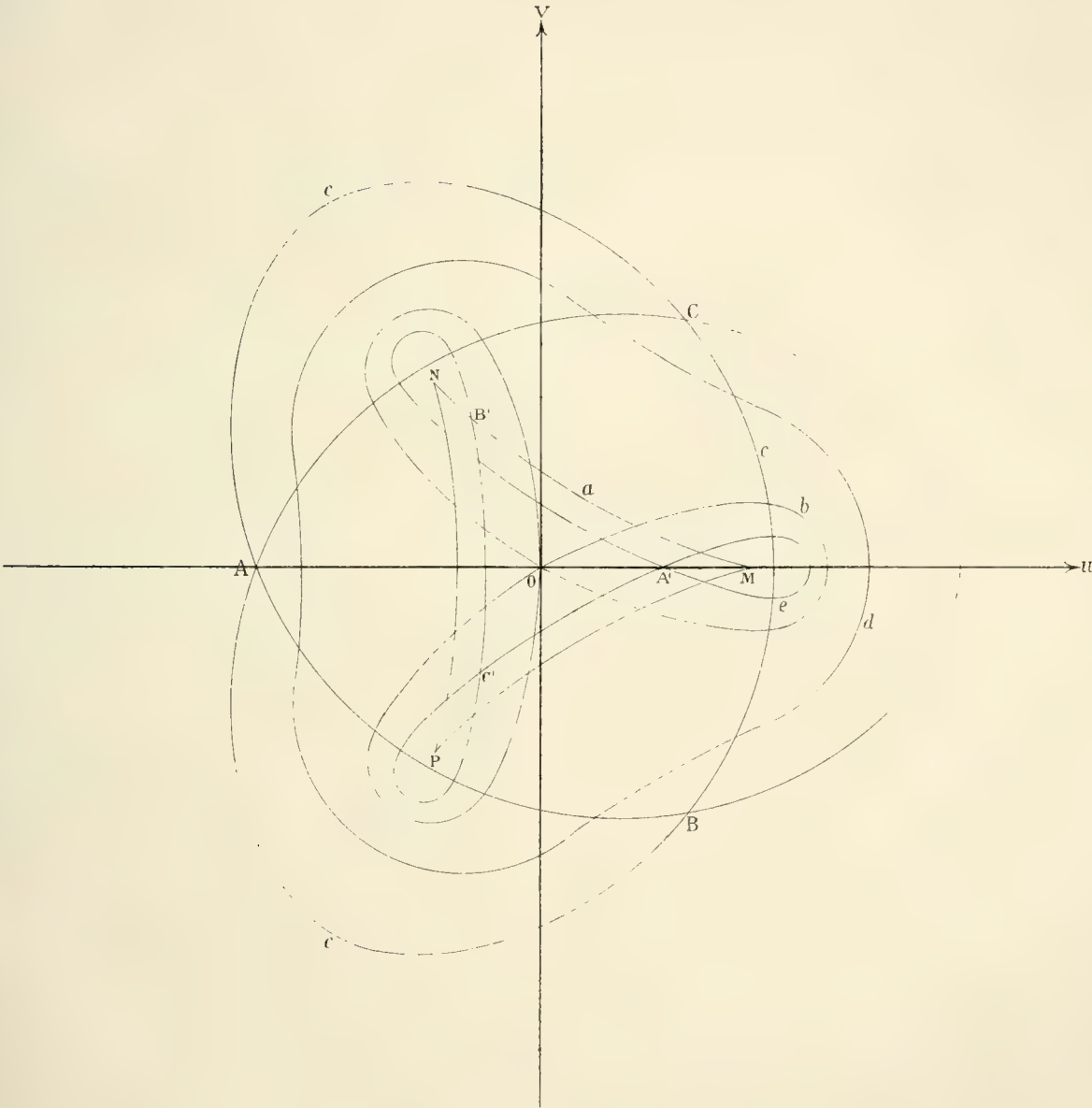
Con procedimento perfettamente simile si trova pure l'equazione lineare delle σ_n:

$$(58)\quad 4(4x^3-1)\sigma'''_n + 144x^2\sigma''_n - x(12n^2-24n-291)\sigma'_n - (n-3)(2n-7)(2n+5)\sigma_n = 0.$$

35. I punti singolari di queste equazioni sono dati, come si vede subito, da

$$x = \infty\,,\quad 4x^3 - 1 = 0:$$

(*) Annales de l'Ecole Normale Supérieure. S. II, T. XII.

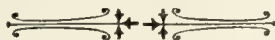
E. Contoli, inc
lit. G. Wenk e Figli – Bologna.

sono cioè oltre al punto all'infinito, le radici del discriminante della f. Si faccia ora in queste equazioni la posizione

$$x^3 = z\,; \tag{59}$$

viene per la (57) una trasformata della forma

$$108z^2(4z-1)\varphi''' + z(az+b)\varphi'' + (a_1 z + b_1)\varphi' + a_2\varphi = 0 \tag{60}$$

ed una trasformata pure della stessa forma per la (58). Ora si vede subito che queste equazioni, confrontate colla equazione generale del tipo ipergeometrico del Goursat, vi sono contenute come caso particolare; i loro punti singolari sono $z=0$, $z=\frac{1}{4}$, $z=\infty$, e da esse risulta che negli sviluppi in serie di potenze di z delle P_n e delle σ_n i coefficienti consecutivi sono fra loro in un rapporto che è funzione razionale dell'indice, col numeratore ed il denominatore di terzo grado nell'indice stesso. Risulta ancora da ciò che nello sviluppo di $P_n(x)$, gli esponenti di x sono congrui rispetto al modulo 3, come si è già osservato, e che lo stesso avviene per la $\sigma_n(x)$ nello sviluppo in serie di potenze negative di x.

Molte osservazioni si potrebbero fare su queste equazioni lineari (57) e (58) o sulle loro trasformate: in particolare si potrebbe notare che i loro integrali appartengono ad una stessa *specie* (*), secondo l'espressione del Poincaré, e che la presente Memoria non è altro in sostanza che lo studio di alcuni sistemi ricorrenti contenuti in questa *specie*. Questo studio si collega dunque col seguente problema, che sarebbe un nuovo ed interessante argomento di ricerche di cui la teoria delle funzioni ipergeometriche offre un primo esempio: « Trovare i sistemi ricorrenti contenuti in una data *specie* differenziale lineare. »

(*) Mém. *Sur les fonctions zétafuchsiennes*, p. 212.

ZIFIOIDI FOSSILI

E

IL ROSTRO DI DIOPLODONTE

DELLA FARNESINA PRESSO ROMA

MEMORIA

DEL PROF. GIOVANNI CAPELLINI

(Letta nella Sessione del 15 Febbraio 1891).

(CON TAVOLA)

In due Memorie pubblicate negli anni 1884 e 1885, intorno a resti di Zifioidi fossili raccolti in Italia (1), accennai la grande importanza degli avanzi di quei Cetacei per la cronologia geologica del Terziario e augurai che nuove scoperte mi offrissero la opportunità di tornare presto ad occuparmene.

Trascorsi poco più di due anni, la collezione dei talassoterii del nostro Museo fortunatamente si arricchiva di nuovi materiali ed una interessantissima pubblicazione del prof. P. J. Van Beneden sui Zifioidi dei mari d' Europa richiamava la mia attenzione sull' importante argomento (2). In quella Memoria il valentissimo naturalista belga tesse maestrevolmente la storia di questi strani cetacei i quali sebbene prediligano le profondità dei mari equatoriali ove trovano abbondantissima la loro esca, i cefalopodi, pure essendo cosmopoliti come tutti i cetodonti e la maggior parte dei misticeti, sovente intraprendono lontane peregrinazioni ed entrano anche nel Mediterraneo. Parecchi zifioidi che popolavano i mari d' Europa e d' America verso la fine dell' Era terziaria, emigrarono in seguito verso

---

(1) Capellini — Del Zifioide fossile (*Choneziphius planirostris*, Cuv. sp.) scoperto nelle sabbie plioceniche di Fangonero presso Siena. *Atti della R. Accademia dei Lincei.* Serie 4ª, Vol. I. Roma, 1885. — Resti fossili di *Dioplodon* e *Mesoplodon.* Memorie della *R. Accad. delle Scienze dell' Istituto di Bologna.* Serie IV, Tomo VI. Bologna, 1885.

(2) Van Beneden — Les Ziphioides des Mers d' Europe. Mém. de l' Acad. R. de Belgique T. XLI. Bruxelles, 1888.

Sud-Est ed oggi taluni dei loro discendenti, partendosi dai nostri antipodi, vengono a visitare le regioni un tempo predilette dagli avi. Quelli che fino ad ora furono segnalati o catturati nei mari d' Europa, vanno ripartiti nei generi *Hyperoodon, Ziphius, Micropteron, Dioplodon* e ad essi il Van Beneden ritiene che si debba aggiungere anche il genere *Physeter;* non convenendo, per questo, col distintissimo cetologo inglese il Flower (1) che pel Capidoglio (gen. *Physeter*) crea una famiglia nel sotto ordine dei Cetodonti e riunisce in una sotto famiglia *Ziphiinae* i generi *Hyperoodon, Ziphius, Mesoplodon* e *Berardius*. Il Van Beneden sostiene, e mi sembra con molte buone ragioni, che: « i Cetacei formano tre famiglie distinte, « perfettamente caratterizzate per tutta la loro organizzazione ed in parti- « colare per lo scheletro, per il genere di vita e per la loro ripartizione « geografica. »

Accettando pertanto le vedute del Van Beneden la lista dei zifioidi fossili italiani già noti, verrebbe ad arricchirsi anche del genere *Physeter,* già registrato in Toscana dal Lawley fino dal 1875 (2) e vi si dovrebbero anche aggiungere i generi affini intermedii tra i Physeterini e i Zifioidi, quali sarebbero *Physodon, Eucetus, Hoplocetus* del Gervais; nonché i generi *Priscophyseter, Physotherium* e *Berardiopsis* creati dal prof. Portis per resti di cetacei raccolti in Piemonte e che a dir vero lasciano desiderare avanzi meno incerti per il loro riferimento a nuovi tipi (3).

Per il genere *Physeter*, il Van Beneden si riferisce alla prima citazione del Lawley il quale asseriva di avere avuto da Volterra e da Orciano denti e porzioni di mascelle. In seguito il Lawley stesso registrò sotto il nome di *Physeter antiquus* parecchi denti raccolti nel podere delle Volpaie presso le Saline di Volterra e nelle argille delle vicinanze di Monte Catini in Val di Cecina. Di uno di tali denti, il meglio conservato, il museo di Bologna possiede un modello stato eseguito a Firenze sotto la direzione del prof. D' Ancona; l' originale si trova nella collezione Lawley a Montecchio ed è forse il solo che con sicurezza si possa riferire al vero genere *Physeter*.

Di altri denti raccolti pure presso le Volpaie ma dubitativamente riferiti al genere *Eucetus* ricordo di aver veduto nella collezione Lawley parecchi esemplari più o meno guasti ed incompleti, ed anzi alcuni avanzi me ne

---

(1) Flower — List of the Specimens of Cetacea in the Zoological Department. London, 1885.

(2) Lawley — Pesci ed altri vertebrati fossili del Pliocene toscano. *Atti della Soc. toscana di Scienze nat.*, maggio, 1874. Pisa, 1875. — Nuovi studi sopra ai pesci ed altri vertebrati fossili delle colline toscane, pag. 111. Pisa, 1876.

Van Beneden P. I. — Note sur un Cachalot nain du Crag d' Anvers. *Bull. Ac. R. de Belgique.* T. XLIV. N. 12. Bruxelles, 1877.

(3) Portis A. — Catalogo descrittivo dei Talassoterii rinvenuti nei terreni terziarii del Piemonte e della Liguria. *Memoria della R. Accad. delle Scienze di Torino.* Serie II, T. XXXVII. Torino, 1885.

furono donati per il museo di Bologna ove si trovano insieme con un discreto modello del migliore esemplare conservato nella citata raccolta. Altre ossa non ricordo di aver veduto e, per ora, non credo di dovermi occupare di questo genere con troppo scarsi e incompletissimi avanzi.

Resti di *Physeter antiquus*, Leidy, furono segnalati dal Gervais tra i fossili delle sabbie plioceniche di Montpellier, ma per ora non credo ne siano stati notati tra i fossili del Crag grigio del Belgio.

Per il *Choneziphius planirostris*, Cuv. sp. raccolto presso Siena, il Van Beneden si trova meco in perfettissimo accordo nel riconoscerne la stretta parentela col *Ziphius cavirostris* vivente, di cui furono catturati già parecchi esemplari anche nel Mediterraneo, come ebbi a notare altra volta accennando al cosmopolitismo dei cetodonti (1). Il Van Beneden inoltre ritiene che la stessa specie abbia avuto nomi diversi secondo le diverse regioni ove fu catturata e che per conseguenza si debbano abolire una dozzina di nomi specifici ritenendoli semplicemente come sinonimi del genere e della specie tipica *Ziphius cavirostris,* Cuv.

Tenendo conto del cosmopolitismo, anche per il *Micropteron Sowerbyi* conviene ammettere che non vi sieno barriere e un esame accurato e un giudizio scevro da idee preconcette induce a riconoscere che, con la specie arenatasi nelle coste della Sicilia nel 1790, si abbiano ad identificare anche gli esemplari raccolti in seguito al Capo di Buona Speranza ed alla Nuova Zelanda.

Il Van Beneden aggiunge: *Capellini a décrit et figuré des ossements de Mésoplodon ou Microptéron qu' il serait difficile de séparer de l' espèce vivante* (2). Con questa indicazione il mio egregio amico allude ai resti del *Mesoplodon D'Anconae,* Lawley, sp., provenienti dalle argille plioceniche delle Volpaie presso le Saline di Volterra e che in parte erano stati dal Lawley riferiti al genere *Dioplodon.* Ora conviene ricordare che nella Memoria « *Resti fossili di Dioplodon e Mesoplodon* » (3) non mancai di rilevare le grandi somiglianze dell' interessante zifioide fossile toscano con il *Mesoplodon Sowerbiensis,* ma per molte ragioni mi astenni dall' identificare il fossile col vivente.

Altrettanto ho creduto di dover fare per la cassa auditiva destra raccolta

---

(1) « Sous le titre: *Ziphioide fossile* le professeur Capellini a publié un Mémoire accompagné de fort beaux dessins dans lequel il fait la description d' un crâne d' un Ziphioide mis au jour, qui rappelle parfaitement le Ziphius cavirostre vivant encore dans les eaux de l' Italie. Van Beneden P. J. Les Ziphioides des Mers d' Europe; p. 82. *Mém. de l' Acad. R. de Belgique* T. XLI. Bruxelles, 1888.

Capellini G. — Del Zifioide fossile (*Choneziphius planirostris*) scoperto nelle sabbie plioc. di Fangonero presso Siena. *Mem. della R. Accad. dei Lincei,* Serie 4ª, T. I. Roma, 1885.

(2) Van Beneden — Mem. cit., pag. 100. Bruxelles, 1888.

(3) Capellini G. — Resti fossili di Dioplodon e Mesoplodon. Mem. della R. Accad. delle Scienze dell' Ist. di Bologna. Serie IV, Tom. VI, p. 302. Bologna, 1885.

presso Orciano, riflettendo che, trattandosi di così scarsi avanzi, fosse più prudente separare che confondere. Sta bene che i zifioidi viventi nel Mediterraneo e vaganti per tutto l' Oceano sieno da riconoscersi come i discendenti dei zifioidi pliocenici del Belgio, d' Italia e d' Inghilterra; ma che non abbiano punto variato in così grande distanza di tempo e che gli attuali sieno da identificarsi in tutto e per tutto con i loro antichissimi progenitori, è ciò che non sono ancora del tutto disposto ad ammettere. Nuove scoperte, nuovi studi comparativi permetteranno in seguito di sciogliere ogni dubbio al riguardo, come del resto si è fatto per le specie attuali.

Più grave quistione e di interesse anche maggiore per la geologia riguarda il genere *Dioplodon*. Paolo Gervais fondò il genere *Dioplodon* a proposito di un cranio che si trova nel Museo di Caen e che fu staccato dal cadavere galleggiante di un grande cetaceo che il capitano Vautier incontrò entrando nella Manica, tornando da un viaggio alle Colonie.

I naturalisti non sono d' accordo se il *Diplodon europaeus* si abbia a ritenere come genere e specie distinta, oppure se trattisi soltanto d' un vecchio maschio dell' ordinario *Micropteron Sowerbyi*. Flower, la cui grande autorità in fatto di cetacei e in particolare pei zifioidi merita la maggiore considerazione, ammette sei specie di *Micropteron* e tra queste vi annovera il *M. europaeus*. Disgraziatamente di questo animale, per ora, non fu raccolto che un solo esemplare e di esso, come ho già accennato, non fu neppure conservato l' intero scheletro. Il rostro evidentemente differisce da quello del *Micropteron Sowerbyi* per la forma e per la solidità; ma con tutto ciò non è sciolto il dubbio quanto al riferimento generico. Van Beneden fa notare che al dente sinistro dell' animale essendo stato trovato aderente un commensale il *Conchoderma Cuvieri*, si potrebbe sospettare che questo cetaceo non fosse europeo nel senso stretto della parola, ma piuttosto esotico.

Un altro zifioide di questo tipo che il Flower pure registra nel genere *Micropteron* è il *Dioplodon densirostris*, Blainv.; (*D. Seychellensis*, Gray). Fig. 1.

Di questa specie si conosce l' intero scheletro, e pei confronti istituiti sui denti pare che non differisca gran cosa dal *Mesoplodon Sowerbyi*.

Tanto il *Dioplodon europaeus* quanto il *D. Seychellensis* hanno grande importanza per la paleontologia, perchè è veramente a questo tipo di zifioide con rostro affilato, *belemnitiforme*, compattissimo e quasi eburneo che devonsi riferire la maggior parte dei rostri di zifioidi raccolti fin qui nel Crag di Suffolk in Inghilterra, nel Crag grigio di Anversa nel Belgio e nel pliocene di diverse parti d' Italia (1).

---

(1) La fig. 1, rappresenta uno scheletro di *D. Seychellensis* $^1/_{20}$ della grandezza naturale, con rostro un poco più affilato per dare una idea anche più approssimativa di quello che sarebbe il *Dioplodon* fossile.

Per le ragioni esposte altra volta trattando dei resti fossili di *Dioplodon* in Italia e considerando che lo stesso Van Beneden mantiene il genere *Dioplodon* per la specie catturata in Europa, penso che sia opportuno di continuare a registrare sotto questo nome, piuttosto che riferire tutto al genere *Micropteron*, i rostri di zifioidi del nostro pliocene che si accordano con quelli che l' Owen riferì semplicenente al genere *Ziphius* e che il Du Bus e l' Huxley registrarono in parte nei generi *Rhinostodes* e *Belemnoziphius*, senza punto confonderli con quelli che vanno poi riferiti al genere *Ziphirostrum* (1). Di uno splendido esemplare di tali rostri il Museo di Bologna ha potuto arricchirsi fino dal 1887 e trattandosi di una vera rarità paleontologica ho creduto opportuno di prepararne una completa illustrazione pei volumi di questa stessa Accademia che altra volta accolse tanto favorevolmente la già ricordata mia prima Memoria sui *Resti fossili di Dioplodon* e *Mesoplodon*.

In una breve nota inserita nel Bollettino della Società Geologica italiana ebbi già a narrare che nel dicembre 1887 invitato dal comm. Francesco Azzurri ad esaminare alcuni oggetti scavati a Monte Mario, ebbi la grata sorpresa di scoprire tra essi un bellissimo rostro di *Dioplodon* che i cavatori avevano giudicato essere semplicemente *un fucile petrificato.*

Gli oggetti che i cavatori asserivano di aver trovato insieme col *fucile petrificato* non avevano alcuna importanza nè paleontologica nè archeologica ed è evidente che, solo accidentalmente, dovevano essere capitati sotto alle sabbie marnose giallastre della Farnesina ove invece giaceva in posto il rostro del zifioide perfettamente conservato.

È prava abitudine di quasi tutti i cavatori di rompere quanto incontrano di strano e di cui non possono subito rendersi conto; ritengo quindi che altrettanto sia avvenuto pel fossile della Farnesina, sebbene i cavatori abbiano voluto assicurarmi che la rottura e le scheggiature avvennero casualmente, non potendosi però scusare della negligenza per la quale parte della estremità anteriore e due schegge dei premascellari, fortunatamente di poca importanza, andarono irremissibilmente perduti.

Per assicurarmi della provenienza del fossile e per potermi render conto

(1) Flower W. H. — On the recent Whales, with a description of the Skeleton of *Berardius* — *Transactions of the Zoological Society of London.* Vol. VIII, p. III, p. 203. London. 1872.

— A further Contribution to the Knowledge of the existing Ziphioid Wales. Genus *Mesoplodon.* Trans. of. the Zool. Soc. Vol. X, p. IX. London, 1878.

Owen R. — Monograph of the British fossil Cetacea from the red Crag. Gen. *Ziphius. Mem. of the Pal. Soc.* V. XXIII. London, 1870.

Du Bus — Sur differents Ziphioides nouveaux du Crag d' Anvers. *Bull. Acad. R. Belgique*, 2me Serie, T. XXV, p. 621-630. Bruxelles, 1868.

Van Beneden P. J. et Gervais P. — Ostéographie des Cétacés vivants et fossiles, p. 406, 419. Paris, 1880.

del suo giacimento, con una lettera del commendatore Azzurri essendomi indirizzato al direttore delle cave di argilla alla Farnesina e da esso essendo stato messo in rapporto con l'operaio Angelo Guaiti dal quale il fossile stesso era stato raccolto e poscia donato al direttore signor Navone, potei facilmente verificare che in realtà era stato scavato in un vero Crag grigio da non distinguersi dal Crag grigio di Anversa, in un piano superiore alle argille turchine che sono cavate per laterizii. Nella cava Ferri le argille fino al piano della escavazione nel 1888 misuravano una potenza di m. 15 e il Crag grigio degenerando, a poco a poco dal basso in alto, in sabbie marnose giallastre (le sabbie di Monte Mario) queste localmente si potevano valutare di circa cinque a sei metri di potenza.

Della esatta corrispondenza cronologica delle sabbie marnose grigie della Farnesina col Crag grigio del Belgio e col Crag di Suffolk in Inghilterra non resta più da dubitare, ed anche i resti dei molluschi che i professori Ponzi e Meli hanno fatto conoscere sotto il nome di fossili di Monte Mario ne sono una bella conferma (1). Il prof. Meli dopo aver enumerato le specie viventi ed estinte riconosciute finora tra i fossili di Monte Mario conclude che « per il *facies* generale della fauna gli strati fossiliferi di « Monte Mario sarebbero da collocarsi nella parte superiore del pliocene « recente. »

Dopo avere studiato la sezione del pliocene alla Farnesina accompagnato gentilmente dallo stesso prof. Meli, dopo avere raccolto i molluschi fossili più abbondanti nelle sabbie marnose grigie dalle quali proviene pure il rostro di *Dioplodon*, tenuto conto anche del rapporto delle specie viventi ed estinte non posso convenire col collega ed amico quanto alla cronologia delle marne sabbiose suddette le quali, per quanto ebbi già a notare altra volta parlando del giacimento dei resti di zifioidi in Italia e per quanto ho or ora accennato, dovrebbero corrispondere non alla parte recente bensì alla *base* del pliocene superiore, ovvero porzione più recente del pliocene inferiore, se nel pliocene si vogliono fare due sole divisioni. Che se nel pliocene, per maggiore facilitazione nella distribuzione dei resti fossili, si ammettessero tre divisioni, cosa non facile per le carte ma possibile almeno per le sezioni, allora il piano in cui si trovarono i resti di zifioidi corrisponderebbe nettamente al pliocene medio. So bene che in Belgio molti dei resti di cetacei furono indicati *incertae sedis,* tra essi i principali zifioidi; ma gli importanti avanzi raccolti in posto in Italia ed in Inghilterra permettono di indicare con grande esattezza l'orizzonte cronologico di detti avanzi.

Per il rostro della Farnesina anche il modo di fossilizzazione ricorda

---

(1) Ponzi G. e Meli R. — Molluschi fossili del Monte Mario presso Roma. *Memorie della R. Accad. dei Lincei.* Classe di Sc. fis. mat. e nat. Vol. III. Roma, 1886.

perfettamente i resti analoghi che in Belgio si trovano alla base delle sabbie grigie e più frequentemente nelle sabbie nere porzione superiore; analoga conservazione presentano i resti di vertebrati fossili che si incontrano nelle marne inferiori plioceniche nel Bolognese in corrispondenza delle amigdale di sabbie glauconifere che vi sono intercalate nella porzione superiore.

Nel catalogo dei fossili di Monte Mario pubblicato dal Reyneval nel 1854 (1) vi ha una interessante sezione dalla quale è pur facile di rendersi conto della successione stratigrafica che ho osservato anche alla cava Ferri alla Farnesina. Nella valle dell' Inferno è facile di vedere che le marne inferiori vanno a raccordarsi con le marne vaticane, pliocene inferiore e in parte forse anche rappresentanti degli strati più recenti marini del miocene superiore, e immediatamente sopra le marne o argille turchine inferiori stanno le sabbie fine marnose corrispondenti al Crag grigio del Belgio, porzione inferiore, con *Isocardia cor* e altri fossili caratteristici, i cui rapporti con le sabbie di Montpellier ho avuto più volte occasione di ricordare anche a proposito del *Choneziphius* di Fangonero presso Siena.

Passando ora ad occuparci più particolarmente della specie alla quale è da riferire il rostro di *Dioplodon* della Farnesina, devo anzitutto dichiarare che quantunque ne avessi notato subito gli stretti rapporti col *Dioplodon gibbus*, pure anche nella breve Nota pubblicata nel 1888 avvertii che presentava alcune particolarità per le quali forse non sarebbe stato possibile di identificarlo con esemplari tipici provenienti dal Crag di Suffolk.

Nella Tavola annessa a questa Memoria il nostro fossile è rappresentato a metà della grandezza naturale visto superiormente e lateralmente, fig. 2, 6, e vi sono unite tre sezioni trasverse, fig. 3, 4, 5, per farne apprezzare la forma che deriva dalla coalescenza o fusione delle diverse ossa del rostro: vomere, sopravomeriano, mascellari e premascellari. Confrontando le fig. 2, 6 con quelle del *Dioplodon gibbus,* Owen, rappresentato nelle Tav. II e III della Memoria più volte citata, si nota che l' esemplare della Farnesina, mentre per taluni caratteri ricorda il *D. gibbus,* per la forma generale alquanto più slanciata e per la base un poco meno dilatata conviene forse meglio con il *D. tenuirostris* col quale peraltro non è possibile di identificarlo (2).

La principale caratteristica per la quale Owen distinse col nome specifico « *gibbus* » alcuni dei resti del Crag rosso di Suffolk consiste nell' avere il sopravomeriano o prefrontale convesso transversalmente e con accentuata gibbosità o convessità anche nel senso della lunghezza; ma di ciò dirò

(1) Reyneval, Vanden Hecke et Ponzi — Catalogue des fossiles du Monte Mario, près Rome. Versailles, 1854.

(2) Owen — Mem. cit. p. 24. Pl. II, fig. 2; Pl. III, fig. 3; Pl. V, fig. 1, 2.

or ora più diffusamente. Nella faccia posteriore ed anche inferiormente si può vedere come sieno insieme saldate le diverse ossa e sovratutto si può bene apprezzare la forma del vomere e come si trovi per un certo tratto scoperto tra i mascellari. Nella Sezione fig. 5 ho poi riferito quanto si osserva nella estremità posteriore fratturata ed erosa a circa cinque centimetri dal punto corrispondente alla sezione stessa.

Ho valutato la distanza tra i due fori dei premascellari al loro sbocco posteriore e l'ho trovata eguale a quella riscontrata nel *D. gibbus*, cioè m. 0,032; ma anche tenuto conto della corrosione delle ossa nella loro estremità posteriore si nota che la base del rostro del *D. gibbus* è un poco più dilatata e che dopo una diecina di centimetri circa della sua lunghezza si restringe rapidamente, mentre il nostro esemplare in questo offre quasi una forma intermedia tra quella del *D. gibbus* e l'altra del *D. tenuirostris*.

L'esemplare è lungo m. 0,49; ma tenuto conto della estremità anteriore mancante, si può ritenere che fosse lungo circa m. 0,56 a m. 0,58 come fu calcolato da Owen per il *D. tenuirostris*.

Per la erosione e scheggiatura delle ossa, specialmente dei premascellari in parte dovuta al lungo soggiorno sul fondo del mare prima che l'esemplare fosse così bene fossilizzato, la porzione posteriore del rostro lascia molto da desiderare ed il sopravomeriano presenta allo scoperto una superficie maggiore alquanto di quella che doveva essere realmente quando i premascellari erano integri; malgrado ciò è facile di rilevare i vari limiti delle diverse ossa e di rendersi conto della forma tanto caratteristica del sopravomeriano, quale apparisce con sufficiente evidenza anche nella fig. 2 che rappresenta l'esemplare a metà della grandezza naturale.

Nella fig. 6 il rostro completato con linee punteggiate è visto pel lato sinistro; per essa è possibile di apprezzare la forma e lo sviluppo del mascellare e il solco longitudinale che ne segue i limiti con il premascellare, il quale nei due terzi anteriori della lunghezza costituisce come una parete verticale con il margine della base in parte gentilmente ripiegato in alto, per cui dagli intermascellari si hanno quasi due piccole doccie longitudinali di m. 0,150 a m. 0,180.

Ho già ripetutamente accennato i rapporti del *Dioplodon* fossile dei dintorni di Roma con il *D. gibbus;* questi rapporti si manifestano sopratutto nella forma del sopravomeriano per la quale però credo che il nostro esemplare non si possa identificare con quelli del Crag di Suffolk.

Il sopravomeriano, infatti, nella sua porzione posteriore presenta la caratteristica gibbosità, nel senso longitudinale, accennata e descritta da Owen per gli esemplari inglesi e da me notata in un frammento di rostro del pliocene di Calabria pel quale dovrò aggiungere tra poco alcune considerazioni; ma percorsi appena m. 0,15 l'osso si ristringe, la gibbosità

termina e l' osso si mostra sempre discretamente convesso nel senso trasversale ma leggermente concavo nel senso della lunghezza, come si rileva egregiamente anche dalla fig. 6. Percorso però un breve tratto di m. 0,05 a m. 0,06 il sopravomeriano torna a dilatarsi nel senso trasversale e si fa nuovamente gibboso in direzione longitudinale e questa seconda gibbosità che presenta il suo punto culminante a m. 0,34 circa dalla estremità posteriore del rostro torna ad assottigliarsi nella sua metà anteriore nella quale si nota altresí un principio di solco con un foro che accenna al passaggio di un vaso, ma intorno al quale non é possibile di dire esattamente a motivo della mancanza della estremità del rostro. Il *Dioplodon*, quindi, della Farnesina, a differenza della specie che fu nominata da Owen *D. gibbus* non presenta soltanto una, bensí due gibbosità sopravomeriane ben distinte ed accentuate.

Riguardo al modo di presentarsi del sopravomeriano, quando si osservi il rostro nella sua faccia superiore, vedi fig. 2, si nota che esso si presenta assai inegualmente largo e inegualmente scoperto nella sua lunghezza; sicché tenendo conto della porzione che, non ricoperta dai premascellari, prende parte alla configurazione esterna del rostro si hanno le seguenti misure. Tenuto conto della degradazione del margine superiore dei premascellari e misurando il sopravomeriano secondo i limiti ben riconoscibili con quelle ossa prima che fossero danneggiate, la maggior larghezza si nota in corrispondenza della grossa gibbosità posteriore, anzi al principio di essa in corrispondenza dell' accenno del leggero solco longitudinale che ho già avuto occasione di segnalare. In questo punto il diametro trasverso del sopravomeriano raggiunge la sua massima diminuzione di m. 0,030.

A metà della lunghezza di questa prima gibbosità la larghezza é già sensibilmente diminuita e raggiunge soltanto m. 0,026. La minore larghezza si verifica a metà della lunghezza della porzione leggermente concava o selliforme che si ha tra le due gibbosità, ed ivi la larghezza della porzione scoperta del sopravomeriano si riduce a m. 0,016. Dopo questo massimo ristringimento comincia un nuovo allargamento che corrisponde allo sviluppo della seconda gibbosità e raggiunge la sua massima dimensione circa alla metà della lunghezza di essa e cioé a circa tredici o quattordici centimetri di distanza dalla estremità rotta del rostro. In questo punto l' osso si presenta notevolmente rialzato nel senso della lunghezza e sentitamente convesso in direzione trasversale, come ben si rileva anche dalla corrispondente sezione fig. 3, nonché dalla fig. 6 che ci rappresenta il rostro visto pel lato sinistro; il suo diametro trasverso, sempre riferendoci alla parte scoperta, ha raggiunto di nuovo m. 0,026 per decrescere poi gradatamente verso la sua estremità anteriore. Su quest' osso come anche sopra i premascellari vi hanno tracce di perforazioni per opera di molluschi e prove

evidenti del lungo soggiorno sul fondo del mare prima di essere così bene fossilizzato come ora si trova. Al qual proposito devo ripetere che, per la clorite che ha preso parte alla fossilizzazione l' osso esternamente ha acquistato una tinta nero lucente la quale ricorda perfettamente i fossili provenienti dalle sabbie nera del Belgio. Si notano innumerevoli cristallini di pirite aderenti alla superficie delle diverse ossa, tanto più abbondanti in quanto le ossa stesse sono meno compatte e levigate.

Rilevata così la forma particolare e la importanza del sopravomeriano del nuovo rostro di *Dioplodon,* poiché nella designazione delle specie i cetologi tennero sempre in grandissimo conto le caratteristiche di quest' osso, parmi che dopo tutto l' esemplare della Farnesina meriti di essere distinto come specie nuova; almeno fino a tanto che di questi animali non si avranno resti più copiosi e più importanti pei quali sarà possibile di fondare sopra altre caratteristiche la distinzione delle varie specie. Con questo criterio, per ricordare la classica località ove fu raccolto questo primo esemplare, che spero non sarà l' ultimo, distinguerò la nuova specie col nome di: DIOPLODON FARNESINAE, *Capellini.*

Parlando dei resti di *Dioplodon* e *Mesoplodon* nella memoria più volte ricordata (1), ebbi a riferire che il frammento di rostro di *Dioplodon gibbus* donato dal prof. Domenico Lovisato alla R. Università di Roma proveniva da Serrastretta. Nell' autunno del 1889 trovandomi a Catanzaro coi colleghi della Società geologica italiana ebbi opportunità di rendermi conto della estensione del pliocene in Calabria, e dall' ingegnere Cortese e da altri che si erano interessati del rilevamento geologico dei dintorni di Serrastretta fui assicurato che non vi era traccia di Pliocene.

Quando quel frammento di rostro fu presentato nel 1879 al prof. Meli da cui mi venne gentilmente comunicato per studio, per vero dire non fu indicato che provenisse da deposito pliocenico, ma fu semplicemente accennato che era stato raccolto in terreno sciolto ma stratificato che io credetti di dover interpretare per sabbie plioceniche, perché in esse infatti si riscontrano abitualmente detti fossili.

Anche per la esatta provenienza non mancai di avvertire che mancavano notizie sicure intorno al ritrovamento di quella porzione di rostro e per conseguenza, dopo le nuove informazioni avute, ben lungi dal ritenere

(1) CAPELLINI — Resti fossili di *Dioplodon* e *Mesoplodon.* Mem. della R. Accad. delle Scienze dell' Istituto di Bologna. Serie IV, T. VI. Bologna, 1885.

il frammento di rostro di *Dioplodon gibbus* come proveniente dai dintorni di Serrastretta, dobbiamo pensare che il raccoglitore dal quale lo ebbe il Lovisato era di Serrastretta, ma che il fossile proveniva da ben altra località che non ci é stato possibile di conoscere. Questa rettifica ho creduto necessaria perché per ora in Italia non si hanno altri avanzi sicuri di quella specie dei quali sia altresí bene accertata la esatta provenienza.

Malgrado accurate ricerche nelle collezioni e le sollecite raccomandazioni ai raccoglitori di fossili, i resti di zifioidi continuano ad essere rarissimi e a quelli già fatti conoscere nel 1885 quasi nulla mi resta da aggiungere, se si eccettua il rostro di *Dioplodon* della Farnesina. Di fronte a tanta scarsità di materiali, ritenendo opportuno di far conoscere anche ogni frammento che viene ad accrescere la nostra collezione, indubbiamente la più interessante e la più completa se si tiene conto anche dei modelli, aggiungeró brevi parole intorno ad un frammento raccolto presso le Case bianche in Val di Cecina in Toscana.

Si tratta di un brutto frammento di rostro in cui peró si riconoscono alcune delle caratteristiche per le quali si distingue il *Dioplodon longirostris.*

L' esemplare, lungo circa otto centimetri appena, corrisponde alla estremità posteriore del rostro e malgrado che sia molto sciupato permette di apprezzare la forma trasversale del sopravomeriano, la fusione di quest' osso col vomere propriamente detto e in parte ancora i rapporti con i premascellari ed i mascellari, specialmente per il lato destro.

Le aperture posteriori dei fori vascolari che percorrono gli intermascellari corrispondono a due terzi della lunghezza del frammento e per la loro posizione rispetto al sopravomeriano e per il solco che quest' osso presenta, come anche per le sue relative dimensioni, non mi resta alcun dubbio sui rapporti strettissimi col *Dioplodon longirostris*, Owen, come l' esemplare già da me descritto e figurato che si trova nel Museo della R. Accademia dei Fisiocritici in Siena. Anche per lo stato di conservazione azzarderei di dire che non vi si notano differenze, per cui se non ne conoscessi la esatta provenienza avrei forse azzardato di credere che i due esemplari provenissero dalla stessa località. La imperfezione del frammento e la mancanza di una porzione di rostro corrispondente pel *Dioplodon Lawley* raccolto nella stessa località, non mi permettono di dire peró se con questa specie, meglio ancora che con il vero *D. longirostris,* si avrebbe da identificare il nuovo avanzo raccolto a Case Bianche. Nella fig. 7 l' esemplare é rappresentato per la faccia superiore che permette di apprezzare il solco del sopravomeriano; la sezione sottile trasversa mi ha mostrato come le ossa sono fuse insieme a tal segno da riescire difficile per non dire quasi impossibile di ben tracciare i limiti del vomere con i premascellari e di questi coi mascellari.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. 1. — *Dioplodon Seychellensis* Gray, $1/_{20}$ della grandezza naturale.

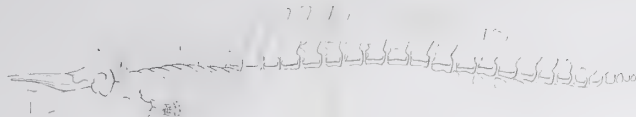
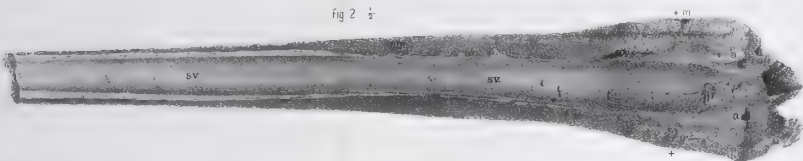
Fig. 2. — *Dioplodon Farnesinae,* Capellini. Rostro veduto per la faccia superiore, $1/_{2}$ del vero, completato con linee punteggiate.
m, mascellari.
pm, premascellari.
sv, sopravomeriano.
a a', aperture del condotto premascellare.

Fig. 3. — Sezione del rostro a circa m. 0,15 dalla estremità fratturata.

Fig. 4. — Id. id. a m. 0,26.

Fig. 5. — Id. id. a m. 0,42.
m, mascellare.
pm, premascellare.
v, vomere.
sv, sopravomeriano.

Fig. 6. — Rostro del *Dioplodon Farnesinae*; $1/_{2}$ del vero, visto pel lato sinistro e completato con linee punteggiate. Le lettere corrispondono alle indicazioni della fig. 2.

Fig. 7. — Frammento di rostro di *Dioplodon tenuirostris?* della *Casa bianca,* in grandezza naturale, visto per la faccia superiore.

SUL CONTEGNO E SULL' AZIONE

DEGLI

ZUCCHERI NELL' ORGANISMO

SECONDA COMUNICAZIONE

DEL

Professore PIETRO ALBERTONI

(Letta nella Sessione del 15 Febbraio 1891).

I. Assorbimento del maltosio, del saccarosio, dello zucchero di latte.

Nella mia precedente memoria io ho studiato l' assorbimento del glucosio in condizioni naturali. Ora comunico le esperienze relative all' assorbimento di varie altre sorta di zuccheri che entrano nella nostra alimentazione.

Animali d' esperimento furono sempre i cani, tenuti a digiuno per circa 24 ore, perché lo stomaco fosse vuoto. Questi animali per le condizioni del tubo gastro-enterico si avvicinano moltissimo all' uomo.

Dopo aver data la soluzione zuccherina che era assunta spontaneamente dall' animale, od iniettata nello stomaco con una sonda, si lasciava passare un determinato periodo di tempo e si sacrificava l' animale con iniezione d' aria nelle vene.

Il contenuto dello stomaco era raccolto a parte e per impedirne il passaggio nel duodeno si collocava subito una legatura sul piloro.

Ho esperimentato col *maltosio*, collo *zucchero di canna* e collo *zucchero di latte.*

Riferisco qui in breve la maniera colla quale ho proceduto e qualche esperienza, come esempio. Ho riunito poi tutti gli esperimenti in una tabella.

Il *maltosio* impiegato era puro e proveniva dalle fabbriche Grübler, Suchardt, Trommsdorff.

Prima dell' esperienza determinavo rispetto al reattivo di Fehling allungato con acqua la capacità riduttrice di una soluzione al 1 % del maltosio impiegato. Lo stesso reattivo era poi usato per l' esame dei liquidi che si trovavano nel tubo gastro-enterico, allungati, dopo averli purificati, approssimativamente nel rapporto di 1 %. 10 c. c. della nostra soluzione

di Fehling allungata, uguale a gr. 0,05 glucosio, corrispondevano a 0,072 di maltosio. Come è noto, secondo Soxhlet, 10 c. c. soluzione di Fehling allungata corrispondono a 0,074 maltosio.

Ecco un' esperienza :

Grammi 100 di maltosio, si sciolgono in 300 c. c. di acqua ; la soluzione ha la densità di 1,105 e misura c. c. 350.

Si somministra ad un cane di Kgr. 26,200, digiuno dalla sera precedente, e che si sacrifica dopo un'ora con iniezione d' aria nella vena giugulare. Nello stomaco si trovano c. c. 225 di liquido.

Si tratta con acetato neutro di piombo e si filtra, si allontana l' eccesso di piombo con H_2S, si filtra e ridotto esso liquido a c. c. 225 ha la densità di 1,060. Si allunga il liquido fino a c. c. 500.

Occorrono c. c. 1,7 del liquido per ridurre 10 c. c. del reattivo Fehling, corrispondente a gr. 0,072 del maltosio impiegato : quindi il liquido conteneva gr. 21,17 di maltosio.

Nell' intestino si trova poco liquido, molta bile e si riesce ad allontanare le sostanze estranee, mediante ripetute precipitazioni con acetato neutro di piombo e sublimato corrosivo. Esso contiene c. c. 0,376 maltosio.

Per le esperienze col *saccarosio* mi sono servito dello zucchero di canna del commercio, bene cristallizzato, perchè è quello di uso quotidiano nell' alimentazione. Siccome questo zucchero contiene sempre delle piccole quantità di glucosio e d'altra parte una porzione di esso può convertirsi in glucosio dello stomaco ; così mi parve più semplice ed esatto fondarmi sul dosamento del glucosio, secondo il metodo di Soxhlet (1).

Una soluzione 1 % dello zucchero di canna usato per tutte le esperienze veniva bollita con *HCl* fino ad operarne la metamorfosi in glucosio e titolata poi col reattivo di Fehling. Il liquido che veniva estratto dallo stomaco e dall'intestino dopo purificato si bolliva pure con *HCl* e vi si dosava poi il glucosio collo stesso reattivo di Fehling.

10 c. c. del nostro reattivo, eguale a gr. 0,05 di glucosio, corrispondevano a gr. 0,036 dello zucchero di canna impiegato.

Tutte le esperienze fatte nei grossi cani diedero dei risultati molto chiari e concordi, come si vedono riassunti nella tabella.

L'ultima serie di ricerche riguarda l'assorbimento dello *zucchero di latte*. Ho impiegato dello zucchero di latte puro e bene cristallizzato, che veniva dosato col liquido di Fehling. È noto che lo zucchero di latte è assai meno solubile nell' acqua degli altri zuccheri alla temperatura ordinaria, cioè nel rapporto di circa il 15 % a 10°. Le soluzioni più concentrate si ottenevano

---

(1) *Enciclopedia di Chimica,* Suppl. Vol. III, pag. 959.

collo scaldare il liquido fino alla temperatura del corpo ed è stato dato anche in parte semplicemente sospeso nell' acqua.

Dieci c. c. del reattivo Fehling = 0,005 glucosio erano ridotti da 0,08 zucchero di latte.

Riferisco una delle esperienze:

Il 1° Dicembre 1889 ho somministrato ad un cane digiuno, di Kgr. 18,500, grammi 100 di zucchero di latte sciolto in acqua calda; il volume della massa era c. c. 270, la densità 1,125.

Si dà a ore 2,24 pom., si sacrifica con iniezione d' aria nella vena giugulare a ore 3,24 pom.

Nello stomaco si trovano 290 c. c. di liquido, misto a saliva ed a muco, che filtrato attraverso a tela ha la densità di 1,085. Nell'intestino si trovano c. c. 185 di liquido denso per muco e bile.

Il liquido dello stomaco è trattato con acetato neutro di piombo, filtrato, trattato con H_2S. Si riduce il liquido a 1000 c. c. e si ha che c. c. 1,2 del liquido corrispondono a 10 c. c. del reattivo, cioè in 1000 c. c. gr. 66,66 zucchero di latte.

Il liquido intestinale trattato con acetato neutro di piombo e sublimato corrosivo, poi con H_2S diede un filtrato limpido che venne portato a 500 c. c. e di esso c. c. 6,5 riducevano 10 c. c. del reattivo = 0,08 lattosio e in 500 c. c. gr. 6,15 zucchero.

ANIMALE	ZUCCHERO SOMMINISTRATO	ACQUA DI SOLUZIONE	DENSITÀ DELLA SOLUZIONE	VOLUME DELLA SOLUZIONE	DURATA DELLA ESPERIENZA	LIQUIDO TROVATO NELLO STOMACO	DENSITÀ DEL MEDESIMO	QUANTITÀ DI ZUCCHERO CHE CONTIENE	LIQUIDO TROVATO NELL' INTESTINO	QUANTITÀ DI ZUCCHERO CHE CONTIENE	QUANTITÀ TOTALE DI ZUCCHERO ASSORBITO SU 100
1. Cane di Kgr. 26,200	100 gr. maltosio	300 c. c.	1,105	350 c. c.	1 ora	225 c. c.	1,060	gr. 21,17	12 c. c.	gr. 0,37	89,46
2. Cane di Kgr. 22,600	100 gr. maltosio	400 c. c.	1,074	455 c. c.	1 ora	390 c. c.	1,056	gr. 40,00	14 c. c.	gr. 0,63	59,37
3. Cane di Kgr. 20,500	50 gr. maltosio	50 c. c.	—	—	1 ora	—	—	gr. 11,86	—	gr. 1,27	86,87
4. Cane di Kgr. 21,400	100 gr. zucchero di canna crist.	100 c. c.	1,215	165 c. c.	—	—	—	—	175 c. c.	gr. 9,47 zucchero di canna	—
5. Cane di Kgr. 17	100 gr. zucchero di canna crist.	300 c. c.	1,095	350 c. c.	1 ora	185 c. c.	1,065	gr. 23,8	pochi c. c.	traccie	76,2
6. Cane di Kgr. 23	100 gr. zucchero di canna crist.	300 c. c.	1,100	360 c. c.	1 ora	300 c. c.	1,050	gr. 31,2	»	gr. 0,50	48,48
7. Cane di Kgr. 30	100 gr. zucchero di canna crist.	300 c. c.	1,100	360 c. c.	1 ora	245 c. c.	1,055	gr. 28,5	»	gr. 1,00	70,5
8. Cane di Kgr. 30	100 gr. zucchero di canna crist.	100 c. c.	1,215	—	1 ora	—	1,100	—	—	—	—
9. Cane di Kgr. 18,500	100 gr. zucchero di latte	—	1,125	270 c. c.	1 ora	290 c. c.	1,085	gr. 66,66 zucchero di latte	185 c. c.	gr. 6,15 zucchero di latte	27,19
10. Cane di Kgr. 17,100	100 gr. zucchero di latte	300 c. c.	1,100	345 c. c.	1 ora	325 c. c.	1,060	—	—	—	—
11. Cane di Kgr. 15,500	100 gr. zucchero di latte	—	1,060	500 c. c.	1 ora	290 c. c.	1,050	gr. 38,09	200 c. c.	gr. 7,1	54,81
12. Cane di Kgr. 21	100 gr. zucchero di latte	—	1,180	200 c. c.	1 ora	250 c. c.	1,080	gr. 59,61	260 c. c.	gr. 8,0	32,39
13. Cane di Kgr. 16,500	100 gr. zucchero di latte	—	1,080	460 c. c.	1 ora	500 c. c.	1,053	gr. 80,00	90 c. c.	gr. 2,66	17,34

Tutte queste esperienze dimostrano che la rapidità e intensità di assorbimento del maltosio e del saccarosio è assai grande ed un po' maggiore che quella del glucosio, in un'ora se ne assorbono 70 grammi circa. Fra la quantità di acqua e di zucchero che viene assorbito non vi ha rapporto di sorta: sempre scompare assai più di zucchero che di acqua. Questa può persino essere aumentata, quantunque la quantità di zucchero assorbito sia appena un po'minore del solito. La densità del liquido che si ritrova nello stomaco è sempre diminuita e si approssima ai limiti di quella del sangue. Solamente se la soluzione somministrata aveva una densità assai elevata, quantunque essa diminuisca relativamente di più rimane però più elevata che quella del sangue.

Invece lo zucchero di latte si comporta in maniera differente dagli zuccheri precedenti. La quantità che ne viene assorbita è comparativamente assai minore, specialmente da soluzioni più dense del sangue, ed oscilla da 20-40 % al massimo. Anche nell' intestino, oltre che nello stomaco, si ritrova sempre una certa quantità dello zucchero. Notevole è poi il fatto che stomaco e intestino insieme contengono più liquido di quello somministrato, tanto più se la soluzione era densa. E l' intestino contiene muco e bile in quantità maggiore dell' ordinario.

Questo spiega come lo zucchero di latte possa riuscire purgativo e venga a tale scopo impiegato dal popolo. M. Traube (1) lo ha raccomandato come leggiero, ma sicuro lassativo alle dose di 9-16 gr. in circa $1/2$ litro di latte caldo allungato, da prendere il mattino a digiuno. Secondo le mie osservazioni in giovani robusti una dose di 20 gr. sciolta in acqua tiepida ha azione purgativa nella massima parte dei casi.

Le soluzioni molto allungate di zucchero di latte sono quelle che passano più facilmente in assorbimento: il rapporto in cui detto zucchero si trova nel latte è adunque assai conveniente per l'assorbimento e si comprende come, secondo le esperienze fatte, anche lo zucchero, come tutti gli altri componenti del latte, venga assai bene assimilato nell' intestino. È probabile però che si debba allo zucchero l'effetto purgativo che produce il latte in alcune persone, per cui esse non riescono a tollerarlo.

2. Azione degli zuccheri sulla circolazione.

Il glucosio, il maltosio ed il saccarosio possiedono una spiccata influenza sulla circolazione, cioè aumentano la pressione sanguigna e la frequenza

---

(1) Centralbl. f. Med. Wiss. 1881 pag. 431.

del polso, dilatano i vasi sanguigni, rinforzano l'azione del cuore: come venne da me dimostrato nella precedente memoria.

Ho ora esaminato sotto lo stesso punto di vista lo zucchero di latte e il levulosio.

a) *Zucchero di latte.*

Lo zucchero di latte esercita un' azione propria sul sistema circolatorio, che é in parte decisamente opposta a quella che abbiamo già descritta per lo zucchero di canna, per il glucosio e per il maltosio.

Le esperienze relative a questo studio sono state fatte in cani curarizzati e non curarizzati, applicando il chimografio alla carotide per riconoscere i cangiamenti nella pressione sanguigna e nella frequenza del polso e l'oncometro al rene sinistro ed alla zampa destra per riconoscere i cambiamenti nel lume dei vasi.

Lo zucchero di latte introdotto per la giugulare in quantità di $\frac{1}{2}$-1 gr. per Kgr. in peso dell'animale determina un aumento di pressione di 10-20 mm. di mercurio, raramente in grado maggiore o minore. L'aumento si manifesta subito, e se la dose di zucchero iniettata é assai piccola può essere del tutto fugace. Si mantiene tanto più a lungo quanto più la dose di zucchero é elevata. Talvolta a quest'aumento di pressione segue, passati alcuni minuti, cioé colla scomparsa dell'azione dello zucchero per eliminazione colle orine o deposizione nei tessuti, un lieve abbassamento di pressione.

La *frequenza del polso* diminuisce, mentre la pressione si eleva; e la diminuzione di frequenza é sempre molto notevole, tanto più quando la frequenza prima era elevata.

Le *escursioni sistoliche* si fanno più ampie e pronunciate di due a sei millimetri di mercurio.

L'oncometro segna un aumento di volume del rene, contemporaneo alle modificazioni circolatorie precedentemente descritte. Quest'aumento di volume sta a rappresentare una dilatazione dei vasi renali e si osserva anche nei vasi della zampa.

Esso si produce in grado minore che per gli altri zuccheri: o, forse, viene reso meno evidente dalla rarefazione del polso. Per amore di brevità presento qui un quadro riassuntivo delle esperienze; il quale serve ad indicare le modificazioni più salienti.

ANIMALE	PRESSIONE SANGUIGNA NORMALE	FREQUENZA NORMALE DEL POLSO	ZUCCHERO DI LATTE INIETTATO	PRESSIONE DOPO L' INIEZIONE	FREQUENZA DEL POLSO DOPO L'INIEZIONE	ONCOMETRO AL RENE SINISTRO	
						PRIMA	DOPO
Cane di Kgr. 12, curarizzato.	126 mm. Hg.	130 al min.	15 gr.	138 mm. Hg.	114	11-12 ctm.	16-17 ctm.
Cane di Kgr. 5, non curarizzato.	150 mm. Hg. escursioni sfigmiche di 8 mm.	180 »	7 gr.	160 » escursioni sfigmiche di 10 mm.	80		
idem.	——	——	2ª iniezione di 15 gr. zucchero	160 »	90		
Cane di Kgr. 17,500, curarizzato.	160 mm. Hg.	180 »	10 gr.	174 »	180	10-11 ctm.	18-19 ctm.
idem.	190 »	180 »	10 gr. 2ª iniezione	204 »	180	2-3 ctm.	10-11 ctm.
Cane di Kgr. 12, curarizzato.	122 »	96 » escursioni sistoliche 2 mm.	17 gr.	154 » escursioni 27 mm.	60	12 ctm.	27 ctm.
Cane di Kgr. 7, non curarizzato.	161 »	320 »	10 gr.	175 »	156		
Cagna di Kgr. 8,700, curarizzata.	140 » escursioni sfigmiche 3-4 mm.	176 »	10 gr.	180 »	96	10 ctm.	21 ctm.
Cane di Kgr. 13,500. Ha molta paura, non è curarizzato.	162 »	72 »	20 gr.	160 »	48	——	——

Ho eseguito una duplice serie di ricerche allo scopo di determinare gli elementi che concorrono alla produzione dei fenomeni.

In cani a vaghi tagliati al collo si ha ancora per l'iniezione dello zucchero di latte la diminuzione della frequenza, l'aumento della pressione sanguigna, la dilatazione dei vasi. Si deve quindi escludere che detti fenomeni dipendano da semplice irritazione dell'origine centrale dei nervi vaghi.

In cani curarizzati a cui si inietti una piccola dose di atropina sufficiente per paralizzare l'apparecchio d'arresto del cuore non si ha più la diminuzione della frequenza del polso per l'iniezione dello zucchero di latte, ma si ottiene ancora l'aumento della pressione sanguigna.

Si deve quindi concludere che la diminuzione della frequenza dipende da irritazione dell'apparecchio d'arresto del cuore e l'aumento della pressione dipende da un'azione diretta dello zucchero sul cuore e sui vasi.

a) *Levulosio.*

Il levulosio é stato esperimentato come il lattosio in cani nei quali si applicava il chimografio e l'oncometro. I risultati delle esperienze riguardo alla pressione sanguigna ed alla frequenza del polso sono simili a quelli descritti per il lattosio. Si ottiene cioè un aumento di pressione e una diminuzione della frequenza del polso; ma in limiti più ristretti. Ecco un riassunto delle mie esperienze:

I. 29 novembre 1890 — Cane giovane di Kgr. 15, 200 non curarizzato

	FREQUENZA DEL POLSO	PRESSIONE SANGUIGNA
Normale	142	142-172
Iniezione per la vena giugulare di 15 gr. levulosio.		
Subito dopo	240	114-154
Dopo 9″	136	154-192
» 30″	100	152-192
» 1′	116	148-188
» 3′	168	138-164

II. 1° dicembre 1890 — Lo stesso cane dell'esperienza precedente sta bene.

	FREQUENZA DEL POLSO	PRESSIONE
Normale	188	134-178
Iniezione per la vena giugulare di 15 gr. levulosio.		
Subito dopo	283	100-194
Dopo 7″	132	154-184
» 1′	183	146-190
» 5′	196	134-182

III. 6 febbraio 1890 — Cagna di Kgr. 17, 500 curarizzata.

	ONCOMETRO	FREQUENZA DEL POLSO	PRESSIONE
Normale	10-11 ctm.	228	190
Iniezione per la vena giugulare di 10 gr. levulosio in 10 gr. acqua.			
Dopo, costantemente . .	10-11 »	222	180

escursioni sistoliche immodificate.

IV. 17 marzo 1890 — Cane di Kgr. 12, curarizzato.

	ONCOMETRO	FREQUENZA DEL POLSO	PRESSIONE	ESCURSIONI SISTOLICHE
Normale	4-5 ctm.	126	110	1,5 mm.
Durante l'iniezione (23 secondi) . .	2 »	136	110	1,5 »
Subito dopo . . .	15 »	66	130	8,9 »
Dopo 5 minuti . .	13 »	90	112	4 »

V. 20 novembre 1890 — Cane di Kgr. 20, 500, curarizzato.

	ONCOMETRO	FREQUENZA DEL POLSO	PRESSIONE	ESCURSIONI SISTOLICHE
Normale	11-12	112	150	3 mm.
Iniezione della vena giugulare di 12 gr. levulosio, in 12 gr. d'acqua.				
Subito dopo	17	129	150	id.
Dopo 24″	—	114	164	id.
» un minuto	18-19	66	186	9 mm.
» 1′, 31″	21-22	72	180	9 »
» 5′	18-19	—	160	8 »
» 7′	10-11	—	—	—

VI. 10 novembre 1890 — Cane di Kgr. 8, 200, curarizzato.

	ONCOMETRO	FREQUENZA	PRESSIONE
Normale	9-10	—	134
Iniezione per la vena giugulare di 15 gr. levulosio in 15 gr. d'acqua.			
Subito dopo.	14-15	—	120
Dopo 33″	—	—	160
» 2′	—	—	146
» 5′	—	—	130
» 6′	—	—	128

3. Azione del lattosio e del levulosio sulla secrezione urinaria.

Riguardo al lattosio confermo quanto sembra che fosse già noto a Ippocrate, il quale secondo quanto riferisce Kobert (1) consigliava di som-

(1) Kobert — Historische studien aus dem pharmakologischen Institute zu Dorpat. Bd. I. 1889.

ministrare nell'idropisia incipiente otto tazze di latte, preferiva il latte di asina che noi sappiamo contiene assai più zucchero; per cui doveva conoscerne l'azione diuretica. È facile verificare quest'azione e determinare una poliuria diabetica iniettando il lattosio nel sangue in piccola quantità. Il fenomeno si mantiene finchè l'eccesso di zucchero sia stato eliminato. Le mie esperienze coll'oncometro hanno dimostrato che i vasi renali si dilatano. Ma l'effetto diuretico non dipende dall'iperemia renale, che è un fattore concomitante, bensì da eccitazione dell'epitelio secretore renale. Come è noto specialmente German Sée ha ancora nel decorso anno raccomandato lo zucchero di latte, quale diuretico. Veramente negli animali esso non provoca la diuresi più del glucosio. Però, siccome secondo le esperienze di Hofmeister il galattosio e il lattosio, dati per bocca, vengono in piccola quantità più facilmente a comparire nelle urine del destrosio, del levulosio e dello zucchero di canna, così si comprende come il lattosio potrebbe avere la preferenza. Infatti gli zuccheri provocano la diuresi specialmente mentre vengono a passare nelle orine. È per questa circostanza che il loro effetto diuretico, che sarebbe di alto valore se potessero introdursi direttamente nel sangue, riesce ben limitato se dati per bocca. Può darsi ancora che il lattosio dato per bocca riesca più diuretico degli altri zuccheri in quanto egli richiama acqua all'intestino, e questa venendo poi riassorbita si eliminerebbe per le orine. Nelle idropisie una parte dell'acqua versata nei tessuti sarebbe così richiamata dal lattosio nell'intestino e poi emessa coi reni.

Invece il *levulosio* si comporta, rispetto alla secrezione urinaria in maniera ben differente. Esso non determina affatto, o ben poco, la diuresi. Era già stato avvertito che il levulosio riesce bene tollerato nei diabetici. Cohnheim scrive che parecchie specie di zucchero, come per esempio la mannite, lo zucchero di frutta, o levulosio non hanno influenza sulla eliminazione dello zucchero (1).

La seguente esperienza dà un esempio dell'effetto diuretico di vari zuccheri.

In una cagna di Kgr. 15 curarizzata si vuota la vescica e vi si lascia il catetere.

Si iniettano per la vena giugulare 10 gr. levulosio sciolto in tanta acqua tiepida che l'intero volume della massa raggiunge i 20 c. c. In 12 minuti dopo l'iniezione si hanno 7 c. c. d'orina, che dà la reazione dello zucchero. Passata mezz'ora si iniettano per la stessa vena 10 gr. zucchero di latte sciolto in acqua tiepida, volume della massa 20 c. c. in 12 minuti si hanno 22 c. c. d'orina. Passata altra mezz'ora si iniettano 10 gr. glucosio in tanta acqua da avere 20 c. c. e in 12 minuti si ottengono 34 c. c. d'orina.

---

(1) Cohnheim — Lezioni di Patologia, trad. del dott. Napolitani V. II. pag. 86.

4. Influenza dello zucchero sulla temperatura del corpo.

Butte (1) ha recentemente veduto che iniettando 3 a 4 gr. di glucosio per Kgr. in peso nella vena safena o giugulare del cane succede un aumento di temperatura, la quale dopo un'ora si eleva da 39,1 a 40,7°. Egli riferisce quest'esperienza per provare la combustione del glucosio nell'organismo e l'aumento delle combustioni interstiziali da esso determinato. Ma l'esperienza di Butte, che sarebbe interessante, incontra una grave obbiezione.

Si sa che l'iniezione in circolo delle più diverse sostanze e dello stesso sangue omogeneo defibrinato produce la febbre: e a questa causa poteva ben attribuirsi l'aumento di temperatura veduto da Butte.

Per esaminare quindi l'asserzione di detto autore io ho dato ad un grosso cane del glucosio per bocca e misurata la temperatura nel periodo dell'assorbimento di esso. Ecco l'esperienza:

Ore	10, 50	Temperatura rettale	38,3
»	1, 20	100 gr. glucosio in 100 c. c. d'acqua	
»	2, —	Temperatura rettale	38,6
»	2, 35	» »	38.3
»	3, —	» »	38,5

Durante il periodo adunque in cui circa 100 gr. di glucosio entrano nel sangue e nei tessuti per le vie naturali non si verifica aumento di temperatura.

CONCLUSIONE

Il maltosio, e sopratutto il saccarosio vengono assorbiti anche più facilmente e rapidamente del glucosio. In un'ora sono assorbiti 70-80 gr. su 100.

Invece ben diversamente si comporta lo zucchero di latte. La quantità che ne viene assorbita è comparativamente assai minore, specialmente da soluzioni più dense del sangue, ed oscilla da 20-40 gr. su 100. Anche nell'intestino, oltre che nello stomaco si ritrova sempre una certa quantità dello zucchero. Notevole è poi il fatto che lo stomaco e intestino insieme contengono più liquido di quello somministrato, tanto più se la soluzione era densa. E l'intestino contiene muco e bile in quantità maggiore dell'or-

---

(1) Butte — C. R. Soc. de Biologie, Avril 28, 1888 pag. 410 e Centralbl. f. Phys. 1888 pag. 355.

dinario. Questo spiega come il lattosio possa riuscire purgativo e venga a tale scopo impiegato dal popolo.

Le soluzioni molto allungate di zucchero di latte sono quelle che passano più facilmente in assorbimento: il rapporto in cui detto zucchero si trova nel latte è adunque assai conveniente per l'assorbimento e si comprende anche come lo zucchero, al pari di tutti gli altri componenti del latte, venga assai bene assimilato nell' intestino. È chiaro però che si debba attribuire allo zucchero l'effetto purgativo che produce il latte in alcune persone, per cui esse non riescono a tollerarlo.

Il lattosio e il levulosio esercitano un'azione propria sul sistema circolatorio, che è in parte identica, in parte decisamente opposta a quella già da me descritta per il glucosio, il maltosio, il saccarosio. Essi aumentano la pressione sanguigna nei limiti di 10-20 mmgr. e più, ed invece di aumentare diminuiscono la frequenza del polso in grado notevole. La sistole si fa più ampia. I vasi si dilatano.

L'aumento della pressione dipende dall'azione diretta sul cuore e la diminuzione di frequenza da irritazione dell'apparecchio d'arresto intracardiaco.

La secrezione urinaria cresce per lo zucchero di latte: invece il levulosio non provoca la diuresi e può usarsi nei diabetici.

Gli zuccheri assorbiti per le vie naturali non fanno aumentare la temperatura del corpo e l'asserzione di Butte dipende dalle speciali condizioni in cui si è messo.

DEL SALICILATO DI SODA
NELLA CURA DEL TETANO

NOTA

DEL

PROFESSOR GIOVANNI BRUGNOLI

(Letta nella Sessione delli 8 Marzo 1891).

L'osservazione clinica deve essere sempre la sovrana regolatrice in Medicina.
BURRESI.

Gli studi e le ricerche, che fin da 15 anni or sono intrapresi, sulle applicazioni terapeutiche del salicilato di soda in parecchie malattie dell'uomo mi mostrarono da prima la grande possanza di questo farmaco nel portare a guarigione le poliartriti reumatiche con tanta prontezza e sicurezza da dichiarare che ne tronca il corso, e che ne é il vero specifico. E nella memoria che scrissi su questo argomento e sul risultato di tale esperienze, e che presentai a questa illustre Accademia (1), aggiunsi pure fatti ed osservazioni da cui mi risultava che solo quando l'artrite era di natura reumatica si ammiravano i brillanti successi del salicilato e non mai nelle doglie articolari sifilitiche, scorbutiche, da migliare ecc.; come pure se usavasi quale antipiretico nelle malattie con altissima febbre, come la pneumonite cruposa, la erisipola, il tifo, il vaiuolo, la scarlattina, se di spesso vi dà qualche utile effetto, abbassando temporariamente la temperatura, moderando i sintomi molesti, cooperando alcun poco a limitare il male e ad accorciarne la durata, non ne tronca cosi quasi d'un tratto il corso come nella poliartrite reumatica. E ne arguii che il salicilato di soda spiegasse la sua possente azione terapeutica sulla *condizione, o diatesi reumatica,* intorno alla quale mi pronunziai dover essere di natura

(1) *Il salicilato di soda considerato quale specifico nella cura del reumatismo articolare acuto.* Storie e riflessioni. V. Memorie Ser. III, T. IX, pag. 477 — 1878.

infettiva mettendo a confronto la virtù del chinino nelle malattie da infezione da malaria con quella del salicilato di soda nella infezione reumatica. E da ciò fin d'allora fui portato al sospetto che un micro-organismo, un fungo, piuttosto che una alterazione chimica del sangue ne fosse la patogenesi: sospetto che è anche più confermato dal fatto della frequente successiva endocardite, il quale sta con tutte le altre forme di endocardite che sono prodotte da un microrganismo.

Le molte e ben spiegate proprietà terapeutiche che furono constatate nel salicilato di soda non solamente quale antireumatico, ma quale refrigerante e quale rimedio analgico, indussero a metterlo a prova nella cura di molte malattie, nelle quali bene si appalesava l'indicazione di abbassare la temperatura, di calmare dolori, e se ne fu trovata utile l'applicazione nella pneumonite, nella febbre tifoide, nella difterite, come anche nella sciatica, nella cefalea ecc., i risultati ottenuti non sono al certo da paragonarsi a quelli che si hanno nella cura del reumatismo articolare; se in questo tronca il corso della malattia, in quella, come dissi, modera i sintomi bensì, ma non ne accorcia il periodo ciclico.

E con altra Memoria presentata a questa R. Accademia nell'Aprile del 1882 (1) mi feci ad annunziare che assai rilevanti risultati io aveva conseguito dal salicilato di soda nel trattamento della pleurite essudativa; che se non se ne otteneva la risoluzione così pronta come nel reumatismo articolare, egli è bene da considerare che in questo caso vi ha un essudato siero-fibrinoso da assorbire, e talvolta in notevole quantità, il che non può aver luogo in poche ore.

Che questo farmaco spieghi un'attività tutta speciale nell'ottenere una pronta e sollecita risoluzione della pleurite essudativa reumatica lo provano già i molti casi pratici che io riferii in quella memoria e molti e molti altri che ho osservato di poi, e che amici e colleghi mi hanno comunicato, come pure il lavoro speciale pubblicato dal Dott. Drzewicki (2): proposta di cura che alcuni giornali medici anche italiani oggi hanno riportata quale novità straniera.

A spiegare poi in qual modo il salicilato di soda agisce sulla pleurite essudativa e su quella specie che i medici dicono reumatica, veniva facile e piana la induzione in rispetto alle altre applicazioni terapeutiche, che cioè sull'elemento reumatico spiegasse la sua azione medicamentosa.

Come appendice a quella memoria aggiunsi pure, che basato sul concetto farmacologico che il salicilato di soda agisca come rimedio specifico

---

(1) *Il salicilato di soda quale specifico nella cura della pleurite essudativa reumatica e forse anche del tetano reumatico.* V. Memorie Ser. IV, T. III, p. 634 — 1882.

(2) Gazz. degli Ospedali. Milano, 1890, p. 312.

sulla condizione o diatesi reumatica, ne aveva fatta applicazione in due casi di tetano così detto spontaneo, o reumatico e con così sollecito e brillante risultato da farne le meraviglie in confronto in ispecie di quei casi da me veduti e curati nella mia lunga pratica privata ed ospitaliera, i quali pel maggior numero ebbero fine letale, ed i pochissimi guariti non risorsero che dopo un tempo assai lungo e molto stentatamente.

Le molte e bizzarre circostanze che si osservano nel tetano, sia rispetto alle diverse cagioni che lo producono in ordine in ispecie alla contagiosità, sia per la varietà dei reperti che vi dà l'anatomia patologica, sia pei poco confortanti risultati della terapia, hanno portato diverse teorie sulla patogenesi del tetano, le quali poi tutte si incontrano su qualche fatto che vi fa capitale opposizione, a tal che venne ammesso il sospetto che la malattia fosse di origine infettiva. Tuttavia ci risultava sempre assai eclatante il fatto clinico che vi hanno casi di tetano susseguiti ad una ferita, e casi di tetano susseguiti a rapidissime variazioni di temperatura, ad un bagno freddo a corpo sudato, quindi all'antica distinzione sempre riconosciuta ed assai valutata, di tetano traumatico e di tetano spontaneo o reumatico; quello assegnato alla chirurgia, questo alla medicina; e se ad interpretare la condizione morbosa di quello si ricorreva ad una reazione dei centri nervosi, puramente reflessa sotto l'influenza della ferita, alla condizione o diatesi reumatica per l'altro.

Dietro questi concetti che il tetano spontaneo derivasse da condizione reumatica, e che il salicilato di soda di questo elemento morboso fosse il rimedio specifico per eccellenza, nel 1879 curai il primo caso di tetano con questo farmaco, e così sorpreso dal pronto e felice risultato ottenuto, in altro caso nel 1882 ne feci nuova prova con eguale successo e comunicai le relative istorie a questa R. Accademia, come ho di già accennato.

Dopo d'allora le dottrine relative al tetano sono di molto cambiate; nuove ricerche cliniche e sperimentali hanno dimostrato essere realtà il sospetto emesso fino da Beniamino Travers ed accarezzato da Roser, Panum, Ricardoon e Billroth, che il male sia di natura infettiva. È ben noto come nel 1884 i Dottori Carle e Rattone (1) comunicassero alla R. Accademia di Medicina di Torino di avere prodotto il tetano in animali coll'iniettare acqua distillata, nella quale avevano fatto macerare una piaga che aveva dato causa ad un tetano mortale in un uomo, e come in seguito alle esperienze di Nicolaïer, di Flügge, di Rosenbach anche con terra vegetale, il Verneuil nel 1887 formulasse davanti all'Accademia delle Scienze di Francia la conclusione che il tetano spontaneo non esiste, che sempre

(1) *Studio sperimentale sulla etiologia del tetano* (Gior. della R. Accademia di Medicina di Torino, 1884, N. 3).

proviene dal penetrare germi infettivi per la via di una soluzione di continuo del tegumento interno o del tegumento esterno. È stato quindi adottata la dottrina che il tetano è prodotto da un micro-organismo, il bacillo di Nicolaïer, il quale forse non agisce soltanto per sè, per la sua nutrizione, ma per le ptomaine che separa, che sarebbero secondo il Brieger la *tetanina*, la *tetanotoxina* e la *spasmotoxina*, l'azione combinata delle quali formerebbe il tossico che dà luogo a quell'insieme morboso che caratterizza il tetano.

Questi risultati sperimentali hanno al certo atterrato l'ipotesi che l'elemento morboso reumatico, o la diatesi, sia la causa del tetano spontaneo o medico, e che il salicilato di soda si sia mostrato utile nella cura perchè combatte la diatesi reumatica. D'altra parte hanno reso manifesto che tanto il tetano spontaneo che il traumatico dipendono ambidue da una infezione prodotta dallo stesso micro-organismo, e che quindi debba ritenersi ad ambidue convenire la stessa cura.

Essendo stato collocato nella Sezione Medica dell'Ospedale Maggiore, a me affidata, un ragazzetto preso da tetano traumatico lo trattai colla cura del salicilato di soda, come avevo praticato negli altri due casi sopra citati di tetano spontaneo, e gli effetti conseguiti furono assai soddisfacenti come risulta dalla istoria che vado a riportare e che in gran parte venne raccolta dal medico assistente Dott. Filiberto Gherardini.

Il soggetto di questa osservazione è il ragazzo Ghedini Guglielmo, contadino, nato e dimorante a Quarto, Comune di Castenaso presso Bologna. Noto ancora che in quella stessa casa tempo addietro un giovane garzone in seguito a ferite venne colto dalla stessa malattia e trasportato alla Clinica per tetano traumatico. Dodici giorni prima di entrare nell'Ospedale gli si era casualmente conficcato uno stecchetto di vimine nel lato interno del piede destro ed una parte rimase entro la ferita che presto suppurò e soltanto dopo quattro giorni ne uscì; l'infermo non si ebbe i dovuti riguardi e cure, e girovagò pel campo a piedi scalzi; dopo due o tre giorni comincia ad avvertire dolori vaganti per il corpo specialmente alla nuca ed al dorso. Questi dolori erano accompagnati da un senso di tensione e stiratura e non passarono che due giorni (otto giorni dopo la riportata ferita) che cominciò ad avere difficoltà nel divaricare le mascelle, ad iniziarsi il trisma. Questi fatti si andarono gradatamente accentuando fino a fare ben manifesta la rigidezza delle mascelle, della nuca e del tronco. Visitato dal medico ed all'annunzio d'essere inviato all'Ospedale la contrazione si fece generale per alcuni istanti.

Entrava nell'Ospedale il 27 aprile, aveva una rigidità dolorosa dei muscoli della nuca, trisma marcato, rigidità tetanica dei muscoli della regione cervico-dorsale colla testa piegata all'indietro, colla faccia propria

ed il riso sardonico di questa malattia; anche i muscoli del tronco e dell'addome erano in preda a contrazione tonica; con accessi abbastanza frequenti le contrazioni toniche si esacerbavano e si estendevano a guisa di convulsione clonica, e bastava a produrli un lieve urto al letto, uno scuotimento qualsiasi, un rumore forte, uno stimolo qualunque che lo eccitasse e specialmente il tocco della ferita e parti vicine. Il quadro sintomatologico del tetano era completo. La temperatura oscillò sempre fra + 38.0, 38.5, 38.7, le pulsazioni 94-100, respirazioni 30-36. La ferita presentava ancora qualche punto suppurante, la quale veniva lavata di tanto in tanto con soluzione di sublimato corrosivo, e non tardò a cicatrizzare.

In questo stato di cose intrapresi subito la cura col salicilato di soda, dandolo in soluzione per la via dello stomaco, da prima grammi 4, poi 6 al giorno. Il malato si prestò con tutto il suo volere facendo ogni sforzo possibile per prendere il farmaco ordinatogli.

L'influenza benefica della cura si fece palese fino dai primi giorni; ben presto la temperatura scese al normale; gli accessi di contratture e convulsioni estese in otto o dieci giorni scemarono d'assai di frequenza e di intensità, presto scomparvero affatto e più non si presentarono, sebbene l'infermo giacesse in una sala d'infermi ove gli stimoli, luce, rumori non mancavano ad eccitarle. Gradatamente pure le contrazioni toniche si sciolsero, rimase uno stato di rigidezza delle parti state prese dal male che scomparve affatto. L'amministrazione del salicilato di soda si continuò per 15 giorni e fino al 14 maggio.

Indi il malato presentò libertà di movimenti, i quali si fecero sempre più spediti, ed affatto guarito uscì dallo Spedale il 4 giugno essendovi stato trattenuto oltre il bisogno per volere della famiglia di lui, timorosa di una ricaduta o che non fosse completamente ristabilito.

Noterò pure che nella speranza che l'antipirina potesse agire maggiormente, come analgico, del salicilato di soda, quella a questo volli sostituire e nel giorno 2 maggio, 5° giorno di trattamento curativo, invece del salicilato, diedi due grammi di antipirina divisa in 4 parti. I sintomi tutti si esacerbarono, fuvvi inoltre agitazione e delirio, il giorno dopo ripreso l'uso del salicilato cessò quell'aumento di male e la malattia tornata al grado di prima dopo breve tempo si avviò alla risoluzione.

Sono pertanto tre casi di tetano curati col salicilato di soda che hanno avuto una guarigione completa e sollecita. Fatto che mi sembra di molta importanza se si consideri quanto grande e straordinaria sia la mortalità di questa malattia: nella guerra franco-prussiana, colle cure e medicature più oculate e regolari che fu possibile fare, di 321 casi di tetano soltanto 21 guarirono, cioè fuvvi la mortalità di circa il 90 per cento; se si consideri che i cultori della scienza e della pratica non sono soddisfatti dei

cento metodi terapeutici proposti contro il tetano, i quali vengono dichiarati, inefficaci ed anche nocivi, che si va in traccia di uno che serva veramente al bisogno, e che anche in oggi venne annunziato da Behring e Kitasato che la guarigione del tetano sperimentale si sarebbe ottenuta con le iniezioni del siero di animali resi preventivamenie refrattari a tale malattia con successive inoculazioni.

Ma sorge già un fatto che pone in dubbio la proposta. Alla Società di Medicina di Berlino il Dott. Baginsky nella seduta del 4 febbraio scorso ha dato comunicazione di avere injettato siero sanguigno di un coniglio refrattario in un caso di tetano dei neonati nel quale era stato rinvenuto il bacillo tetanigeno, ma la malattia per nulla si mostrò influenzata da questa cura e ne seguì la morte (1).

Questi tre fatti poi, ammesso che il felice risultato si debba al salicilato di soda, confermerebbero la teoria che non vi ha differenza di condizione morbosa fra tetano traumatico e tetano spontaneo, essendo i due primi casi di questa ultima specie, quello ora riferito dell' altra.

Infine mi domando in qual modo e per quale azione il salicilato di soda può tornar utile a curare il tetano? Se questo farmaco non distrugge il principio infettante (il bacillo tetanigeno del Nicolaïer od i suoi prodotti) come fa forse nella infezione, o diatesi reumatica, io penso che la dottrina ammessa del Sée che cioè esso spieghi un'azione elettiva sui fenomeni di sensibilità al dolore e che per l'analgesia prodottasi, riferibile al centro nervoso ricevente ed elaboratore delle impressioni periferiche, attutisca gli spasmi ed i dolori, che sono causa di esaurimento delle forze e della vitalità, produca gli effetti salutari che si sono osservati. Qualche caso di guarigione ottenuto dal ch. Prof. De Renzi col tenere il malato lontano da ogni stimolo che ecciti le contrazioni tetaniche, luce, calore, rumori, scosse, la cura del riposo assoluto (2), appoggierebbero questa ipotesi.

Ulteriori fatti clinici ed anche ricerche di laboratorio potrebbero a mio avviso meglio convalidare la proposta medicatura.

---

(1) *Gazz. degli Ospedali* - 1891, pag. 114.
(2) *Rivista clinica e terapeutica* diretta dal prof. E. De Renzi, Anno XI, pag. 1, 1889.

INDICE

MEMORIE

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DELL' ISTITUTO DI BOLOGNA

SERIE V. — TOMO I

Fascicolo Terzo.

BOLOGNA

TIPOGRAFIA GAMBERINI E PARMEGGIANI

1891

OSSERVAZIONI MICROSCOPICHE

SOPRA I COSÌ DETTI

CORPUSCOLI TERMINALI DEI TENDINI DELL' UOMO

E SOPRA

ALCUNE PARTICOLARI PIASTRE NERVOSE SUPERFICIALI

CHE SI TROVANO NEI MEDESIMI TENDINI

MEMORIA

DEL DOTT. VITTORIO MAZZONI

(Letta nella Sessione del 25 Gennaio 1891).

(CON DUE TAVOLE)

Il Golgi (1), investigando il modo di terminare dei nervi nei tendini dell' uomo, oltre agli organi muscolo-tendinei ne scoprí alcuni altri, che chiamó col nome di gomitoli, clave, diverse forme di corpuscoli paciniani. Egli fermó più specialmente la sua attenzione agli organi muscolo-tendinei, ma nondimeno dalla descrizione che fa dei corpi terminali si puó dedurre, che alla superficie dei tendini dell' uomo si trovino diverse maniere di corpuscoli nervosi: in alcuni, che assomiglió ai corpuscoli paciniani, la fibra nervea va effettivamente a metter capo, e mostra un estremo finale rigonfiato, altri invece rappresenterebbero dei corpi che la fibra attraversa soltanto, mostrando essi un ramo afferente ed uno efferente.

In questa seconda maniera di corpuscoli la fibra penetrata nell' interno forma una semplice ansa, e torna poi ad uscire per portarsi alla sua destinazione, mentre in altri si dispone in una serie complicata di piccole anse aggrovigliate a guisa di gomitolo, ma del suo ultimo e vero termine egli non parla nè dà alcuna figura.

Il Golgi fa pure menzione di alcuni rari corpuscoli tendinei, i quali si mostrano in relazione con due fibre nervee, ma non puó stabilire con certezza se veramente si tratti di una sola fibra, che, pervenuta nell' interno del corpo terminale, lo attraversi per seguitare poi il suo cammino, ovvero se sono due le fibre entranti in direzione opposta.

Avendo io condizionati buon numero di esemplari microscopici, che

(1) *Sui nervi nei tendini dell'uomo e di altri vertebrati e di un nuovo organo nervoso terminale muscolo-tendineo.* (Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino; Serie II, Tomo XXXII).

servirono ad illustrare il lavoro del prof. Ciaccio sulle terminazioni nervose tendinee dei vertebrati, ritrovai in quei tendini dell' uomo che sottoposi a sottile indagine (pronatore rotondo, bicipite, flessore superficiale delle dita, estensore comune delle dita) parecchi corpuscoli terminali, nei quali mi venne dato seguire il vero modo, onde la fibra nervea va a por fine nel loro interno. Fu nel contermine tra muscolo e tendine, in quella specie di tessuto connettivo fibrillare lasso, che circonda il tendine, e che si continua col perimisio esterno, ove rinvenni i corpuscoli nervosi finali; quindi essi non apparterrebbero esclusivamente nè al tendine nè al muscolo, ma ad un invoglio connettivo comune sì all' uno che all' altro. In questo medesimo invoglio mi fu dato pur anche di mettere in evidenza un' altra maniera di terminazione nervosa, la quale ora è semplice, limitata in forma di piastra, ora invece si presenta quale intreccio plessiforme più o meno complicato.

Nelle mie ricerche mi son valso del cloruro d'oro secondo i metodi, del Löwit e del Fischer, e nel maggior numero dei casi feci pure una seconda colorazione col carminio di Beale allungato nell' acqua. Dal metodo di Fischer ottenni i migliori risultati, specialmente giovandomi di soluzioni diluite di ferrocianuro, all' azione del quale sottoponeva i preparati, quando una precipitazione troppo abbondante del sale d'oro, tingendo intensamente i corpuscoli, non mi permetteva di seguire il cammino della fibra nervea nel loro interno.

Corpuscoli nervosi terminali.

Come già più sopra ho detto, i corpuscoli nervosi han sede nel connettivo rado, che avvolge il tendine, e che si continua alla superficie del muscolo col perimisio esterno. È però frequente il caso di trovarne ancora nello spessore del muscolo in mezzo al connettivo, che partisce i fasci muscolari, chiamato dagli anatomici endomìsio; mentre non mi venne dato scoprirne mai alcuno nell' interno del tendine. La forma, ch' essi mostrano, è varia, come è varia la loro grandezza.

Ve n' hanno dei grandi e dei piccolissimi, ora in forma di pera, ora di figura più o meno globosa. Ogni corpuscolo è il più di sovente circondato da buon numero di capsule strettamente avvicinate l' una all' altra e rivestite alla faccia interna da cellule endoteliche, i cui nuclei si addimostrano in modo manifesto tingendo i preparati col carminio. Alcune altre volte invece, sebbene di rado, il corpuscolo è involto da una sola capsula. Tanto nell' uno che nell' altro caso la cavità interna contiene una sostanza sottilmente granosa, la quale serve di sostegno all' estremo terminale della fibra nervea. Il caso, che più di frequente si osserva, è di vedere una sola fibra nervosa, la quale, penetrando nei corpi terminali, si spoglia delle sue guaine;

e di queste la più esterna o perineurica si continua alle capsule, che al di fuori lo rivestono, mentre la guaina dello SCHWANN e la midollare si arrestano, ma probabilmente la prima si continua ancora per un certo tratto sopra il cilindro dell'asse, il quale adagiato sulla sostanza granosa seguita il suo cammino, e percorrendo una via più o meno diritta o tortuosa termina entro il corpuscolo all'estremo opposto a quello, per dove è entrato, mostrando un ingrossamento finale di forma e grandezza variabile; di maniera che nel loro insieme hanno l'apparenza di quei corpuscoli figurati dal CIACCIO (1), e ch'egli rinvenne nella tela fibrosa dei muscoli della gamba del ratto albino. In taluni altri corpuscoli il cilindrasse penetrato nella cavità interna si avvolge parecchie volte all'ingiro, formando un intreccio irregolare, e lungo il suo decorso dà origine a piccoli rami laterali, i quali, parimente che il tronco principale, terminano ad estremo libero alquanto ingrossato. Alcune volte la fibra nervea poco prima di raggiungere il corpuscolo si partisce in due, le quali alla lor volta entrano nel corpo terminale, ed, intrecciandosi in modo diverso fra loro o disponendosi ciascuna lungo il margine corrispondente della sostanza granosa, si ramificano più o meno spesso senza mai anastomizzarsi. Lo stesso fatto si osserva quando son due le fibre entranti in direzione opposta: in tal caso esse si avanzano l'una incontro all'altra e, col piegarsi e ripiegarsi reiterate volte, formano una specie di gomitolo, il quale è reso più implicato dai rami, che si spiccano lateralmente da ciascuna delle due fibre, che pur mantenendo la propria individualità terminano con tanti piccoli ingrossamenti finali, quante sono le appendici che da ognuna si staccano. Una forma rara di corpuscoli nervosi è quella, in cui la sostanza granosa è contenuta entro una sola capsula, la quale alla faccia interna mostra un semplice rivestimento endoteliale: in questa maniera di corpuscoli la fibra, appena entrata, si divide in sottili fibrille, ognuna delle quali, formando un'ansa, segna il suo termine mercè un evidentissimo rigonfiamento globoso, che alcune volte si dà a vedere circondato da una piccola zona di sostanza granosa trasparente.

In fine io dico, che i corpuscoli, i quali si rinvengono alla superficie dei tendini e delle estremità finali dei muscoli dell'uomo, essendo pur diversi per la forma e per il modo di disporsi dell'elemento nervoso, è certo però, che le terminazioni delle fibre nervee nel loro interno sono sempre di un modo, cioè ad estremità libere più o meno ingrossate. Secondo le osservazioni del CIACCIO, tali corpi nervosi non sono propri esclusivamente dell'uomo, ma comuni ad altri mammiferi, sebbene nel ratto albino, dov'egli le scoprì, si mostrino solo nella forma più semplice di corpuscoli dell'HERBST,

---

(1) *Intorno alle piastre nervose finali ne' tendini de' vertebrati.* (Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna; Serie IV, Tomo X).

mentre gli altri, di figura più implicata, richiamano alla mente i corpuscoli articolari del W. Krause.

Piastre ed intrecci nervosi finali.

Oltre alle suddette forme di corpuscoli rinvenni pure un'altra maniera di terminazioni nervose, la quale si mostra in relazione assai intima coi vasi, i quali corrono nel connettivo, che ricopre i tendini e i muscoli dell'uomo. La sua forma è variabile; ora si appalesa quale piastra nervosa terminale, ora quale intreccio plessiforme, essendo tali apparenze in costante attinenza col numero e qualità dei vasi, coi quali vanno a porsi in rapporto.

Piastre nervose.

Ciascuna fibra nervea deputata a risolversi in piastra si spicca il più di sovente dal medesimo fascio, da cui traggono origine le fibre, che si portano ai corpuscoli terminali, e, dopo un cammino più o meno lungo, spogliata delle sue guaine, il cilindro dell'asse puro si ramifica reiterate volte, formando un intreccio varicoso ben limitato, del quale ogni singolo ramo termina ad estremità libera un po' ingrossata all'apice. Tale è l'apparenza, che si osserva nei preparati ottenuti mercè una buona reazione col cloruro d'oro; ma, se ci facciamo a colorarli col carminio, in allora si mostrano altri importanti particolari. Per tal mezzo si vede, come la piastra nervosa non poggia sul tessuto connettivo rado, in mezzo al quale essa si rinviene, ma su di un fitto e largo suolo di nuclei allungati, sottilmente granosi, i quali, ancora per un certo tratto, circondano al di fuori la terminazione della fibra nervea.

Nel maggior numero dei casi il suolo nucleato è percorso da una piccola arteria, che, seguendo un andamento rettilineo o più o meno tortuoso, lo attraversa, passando immediatamente al di sotto dei rami della piastra; non è però raro di vedere, come lungo il suo tragitto l'arteria dia origine ad altri più piccoli vasellini sanguigni. Per mettere in chiaro la natura del tessuto spessamente nucleato, che serve di sostegno alla terminazione nervosa, e per riconoscere, se pur vi era una qualche relazione fra questa e i vasi sottostanti, io ho fatto dei tagli trasversi di alcuni preparati ottenuti prima per diligente dilacerazione ed inclusi poi in paraffina.

All'esame microscopico di esemplari così condizionati si vede chiaramente, come il connettivo rado nel punto corrispondente alla piastra si addensa, mostrandosi costituito da sottili fascetti fibrillari strettamente avvicinati, con entrovi un abbondante numero di corpuscoli connettivali, che, nelle preparazioni ottenute per semplice dilacerazione, mostrano l'apparenza

di nuclei disposti in piani diversi. In mezzo a questo connettivo fitto s' internano, per un certo tratto, il maggior numero delle ultime diramazioni della fibra nervea, e di queste, alcune segnano il lor fine nello spessore del tessuto, altre invece si addossano alle pareti di quella piccola arteria, che quasi sempre corre sotto alla piastra, e, penetrando fin tra la tunica muscolare e l' intima, quivi terminano sia nell' uno come nell' altro caso ad estremi liberi alquanto ingrossati. Il Ciaccio (1) pur anche descrisse e figuró una di quelle speciali piastre nervose con terminazione de' nervi ad anella, la quale vide, nel tendine del retto superiore dell' uomo, contrarre tali rapporti con un' arteria, che, insinuandosi tra la tunica media e l' interna, terminava disponendosi circolarmente.

Intrecci nervosi terminali.

È ciascuno formato da una o più fibre nervee midollari, le quali, ridotte a puri cilindri dell' asse, col dividersi e suddividersi replicate volte danno origine ad un complicato intreccio irregolare, d'apparenza varicosa, il cui ultimo termine é rappresentato da tante estremità libere, quanti sono i rami, che si spiccano per ogni fibra, e si differenzia dall'altra, che ho chiamato col nome di piastra, per la forma più implicata, per le sue maggiori dimensioni e per la mancanza di quel tessuto connettivo fibrillare fitto ricco di nuclei, che le serve di sostegno. Tale maniera di terminazione si distende sulle reti formate da piccole arterie e da capillari, che sono alla superficie dei tendini e dei muscoli dell' uomo; accadendo spesso di vedere taluni degli estremi suoi finali, rappresentati da piccoli rigonfiamenti o da minutissimi fiocchetti, arrestarsi sulle pareti dei vasi, che corrono al di sotto della terminazione nervosa: il qual fatto se avvenga solo per accidentalità io nol so, ma é peró indubitato, che esistono almeno dei rapporti di contatto fra questi intrecci nervosi e le reti vascolari sottostanti, essendo pure ammesso dal Ciaccio, ch'essi sieno di spettanza dei vasi sanguigni.

(1) loc. cit.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Significato delle lettere adoperate per la dichiarazione delle figure, le quali furono disegnate mercè la Camera lucida Abbé-Zeis all' altezza del tavolino del microscopio.

fn, fibra nervea.
gp, guaine perineuriche.
ca, capsule.
nca, nuclei delle capsule.
sg, sostanza granosa.
et, estremità terminali delle fibre nervose.
cf, connettivo fibrillare.
agn, aggregato di nuclei.
ivs, intreccio di vasellini sanguigni.
sci, sostanza connettiva internucleare.
nu, nuclei.
ifn, intreccio finale nervoso.

Fig. 1.ª — Corpuscolo nervoso finale della superficie del tendine flessore superficiale delle dita, simile a quelli del Pacini; e la fibra nervea termina con una sola estremità libera alquanto ingrossata.

Fig. 2.ª — Altro corpuscolo simile al primo, appartenente alla superficie tendinea del pronatore rotondo; in questo la fibra, prima di raggiungere la clava interna, manda di lato un piccolo e sottile ramo, il quale nell' atto che si spicca si partisce in due, che finiscono ciascuno rigonfiato a modo di piccolo bottone. La fibra, seguitando il suo cammino, indentra nella clava, e, percorrendola in tutta la sua lunghezza, quando é arrivata all' estremo opposto di essa, si ripiega all' indietro, e va a finire con tre partimenti ingrossati in cima.

Fig. 3.ª — Corpuscolo nervoso dell' endomisio, ritrovato al capo terminale del muscolo bicipite. La fibra nervea, ripiegandosi su se stessa, forma una specie di gomitolo, dal quale partono tante appendici laterali, che terminano ciascuna ad estremità libera.

Fig. 4.ª — Corpuscolo nervoso della superficie tendinea del pronatore rotondo. In esso la fibra, avanti di penetrare nella cavità interna, si divide in due rami, che poi s' intrecciano insieme, ed ognuno dei quali termina ad estremo libero.

Fig. 5.ª — Corpuscolo nervoso appartenente alla superficie terminale del muscolo pronatore rotondo. La fibra nervosa, prima di raggiungere il corpuscolo, si divide in due, ognuna delle quali segue l' uno dei margini della sostanza granosa, e lungo il suo decorso si risolve in una quantità di piccoli rami, senza che mai le divisioni di una fibra si anastomizzino con quelle dell'altra; ma ogni singolo ramo termina ad estremo libero.

Fig. 6.ª — Corpuscolo nervoso della superficie tendinea del pronatore rotondo. Le due fibre nervee, che nascono dal partirsi di un' unica fibra, si avvolgono replicate volte a spira, e terminano ad estremi liberi in mezzo alla sostanza granosa.

Fig. 7.ª — Corpuscolo della superficie del muscolo estensore comune delle dita (capo finale). La sostanza granosa è involta da una sola capsula, e la fibra nervea si risolve in minute e variose fibrille, le quali al loro estremo mostrano un ingrossamento finale di forma globosa.

Fig. 8.ª — Corpuscolo della superficie del tendine pronatore rotondo. In questo si osservano due fibre, che, nascendo da un solo e medesimo fascio, si portano al corpuscolo, penetrano nella sostanza granosa, entrando ognuna dall' estremo opposto, e, col dividersi reiterate volte, formano un complicato intreccio, mantenendo però la loro individualità; terminano infine ad estremo libero alquanto rigonfiato.

Fig. 9.ª — Due piastre nervose appartenenti al perimisio esterno dell'estremità tendinea del muscolo bicipite. In ciascuna si osserva un grande accumulo di nuclei, sopra e dentro al quale giace la piastra, formata dalla divisione dicotomica di una sola fibra nervea midollare, che termina con de' piccoli ingrossamenti di forma pressochè rotonda. In mezzo ad uno dei suoli nucleati corre una rete vascolare, nell' altro un solo capillare accompagna per un certo tratto la fibra, e si perde poi in mezzo al fitto dei nuclei.

Fig. 10.ª — Taglio trasverso di una consimile piastra, appartenente alla superficie del tendine del pronatore rotondo. Si osserva, come le ultime ramificazioni nervose costitutive della piastra terminano con un estremo a modo di piccolo bottone.

Fig. 11.ª — Altro consimile taglio di una piastra del perimisio esterno del

pronatore rotondo. Si vedono i medesimi particolari che nella Fig. 10.ª

Fig. 12.ª — Piastra nervosa della superficie del tendine estensore comune delle dita, in cui lo strato dei nuclei é percorso da un'arteria.

Fig. 13.ª — Taglio longitudinale della stessa piastra, il quale mostra come gli estremi terminali della fibra nervea contraggono degli intimi rapporti colle pareti dell' arteria.

Fig. 14.ª — Taglio obliquo della medesima, che mostra come l' estremitá nervose attraversando le pareti dell' arteria terminano ad estremi liberi tra la tunica media e l' interna.

Fig. 15.ª — Perimisio esterno del capo finale del muscolo flessore superficiale delle dita. Intreccio plessiforme formato da reiterate ramificazioni del cilindro dell'asse, il quale riposa alla superficie di una rete di vasellini sanguigni.

Dott.r V. Mazzoni.

Fig. 1. Fig. 7. Fig. 8.

et sg ca gp sg et fn et nca sg fn gp

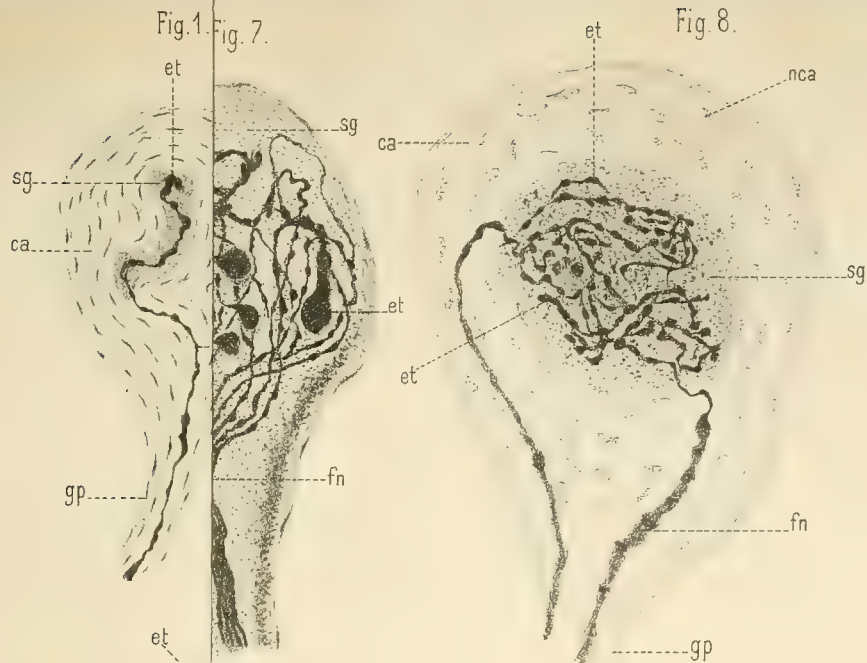
et sn ca fn ifn

Fig. 12.

ar cf et fn sn

Pio. P.o Gregori, dis. dal nat. ed

Lit. G. Wenk e Figli — Bologna.

Pio P.o Gregori, dis. dal nat. ed in pietra
Lit. G. Wenk e Figli — Bologna

CONSIDERAZIONI

SULLA

TEORIA MATEMATICA DEL MAGNETISMO

MEMORIA

DEL

PROF. EUGENIO BELTRAMI

(Letta nella Sessione delli 22 Febbraio 1891).

Fra le difficoltà che s'incontrano nello svolgimento metodico dei concetti posti a base dell'ordinaria teoria matematica del Magnetismo, quale venne inaugurata da Coulomb e grandemente promossa da Poisson, la maggiore è senza dubbio quella che procede dall'intrinseca indeterminatezza di ciò che chiamasi *elemento magnetico.* Mentre, infatti, la deduzione dei più fondamentali strumenti della ricerca non può essere resa indipendente da qualche postulato relativo alla natura, alla forma ed alla distribuzione di questi elementi, è mancato fino ad ora ogni plausibile motivo di circoscrivere, con ipotesi più o meno precise, l'indeterminatezza di cui si tratta. Queste difficoltà si affacciano in particolar modo nell'indagine relativa alle leggi dell'induzione magnetica, qualora si vogliano ricavare le equazioni caratteristiche di questa dai principii stessi della dottrina del magnetismo, e non già da un appello ulteriore ai risultati dell'osservazione.

Egli è appunto per isfuggire a tali difficoltà che, nella mia Memoria del 1884 *Sulla teoria dell'induzione magnetica,* inserita nei volumi di quest'illustre Accademia, ho cercato di svolgere una serie di considerazioni tendenti a stabilire le equazioni anzidette senza invocare altre ipotesi, circa la natura degli elementi magnetici, all'infuori di quelle che si potevano fondare sulle più ovvie analogie coi fenomeni elettrostatici. Fin d'allora, infatti, ero venuto nell'opinione (come si può vedere dal Proemio della citata Memoria) che convenisse francare il più possibile la dottrina del Magnetismo da qualunque supposizione, o, se si vuole, da qualunque rappresentazione schematica troppo particolareggiata ed artificiale.

E tale opinione, non che essere scossa da successivi e reiterati

studii sul medesimo argomento, è andata invece sempre più rafforzandosi, così da convertirsi finalmente nell'intima convinzione che il concetto di elemento magnetico potesse senz'alcun danno essere ora messo del tutto in disparte, e dovesse venir sostituito da quello di *polarità magnetica*. Per tale sostituzione, già iniziata da THOMSON e da MAXWELL, ma non attuata (per quanto a me sembra) nella sua piena ed assoluta integrità, non viene affatto abbandonato il terreno della classica dottrina di POISSON; giacchè il più mirabile risultato di questa è stato di porre in sodo l'esistenza di una funzione potenziale elementare:

$$v = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} \alpha + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} \beta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} \gamma ,$$

distinta dalla newtoniana

$$v = \frac{\mu}{r}$$

(benchè con questa strettamente collegata), la qual funzione somministra per così dire la chiave dei fenomeni ove interviene una polarità elettrica o magnetica, a quel modo stesso che l'altra porge la spiegazione ultima dei fenomeni d'indole puramente *apolare*. Dal punto di vista che io propongo le due funzioni testè riportate devono considerarsi come alcunchè di primitivo e di irreducibile, per quanto, in via storica, la prima abbia potuto essere ottenuta e considerata come una derivazione della seconda, mercè appunto il concetto provvisorio di elemento magnetico. Questo modo di vedere non può neppur sollevare serie obbiezioni dal punto di vista didattico, essendochè nella stessa teoria del potenziale newtoniano si presenta spontaneamente la funzione

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$$

che appartiene al tipo *polare*, e la di cui discussione, debitamente interpolata nell'esposizione di quella teoria, può molto opportunamente preparare e giustificare il trapasso dalla dottrina delle forze apolari a quella delle polari.

Egli è con questi intendimenti che mi sono provato a svolgere, nella presente Memoria, una teoria matematica del Magnetismo esente da qualunque ipotesi arbitraria, fuorchè da quella che le serve essenzialmente di

base, voglio dire da quella che consiste nell'assumere *a priori* l'indicata forma di funzione elementare, per costruire con essa la teoria anzidetta. Questo modesto tentativo non mi è sembrato del tutto vano, neppur di fronte alle recenti e ben più radicali dottrine proposte dal chiaro HERTZ per dominare l'intero campo dei fenomeni elettrici e magnetici: giacchè parmi che ogni nuova elaborazione dei metodi che resero già tanti e sì segnalati servigii alla scienza non possa non arrecare qualche lume, per quanto tenue, al definitivo giudizio che si dovrà fare di quelli, rispetto al migliore assetto che la scienza stessa aspira a conseguire.

Del resto la teoria quí esposta si restringe ai capitoli più fondamentali, ed anche di questi non tocca se non le parti sulle quali maggiormente si riflettevano le incertezze del primitivo punto di partenza. Ho tuttavia approfittato dell'occasione sia per mettere in miglior luce alcune proposizioni che non mi paiono abbastanza note, come ad esempio il teorema sull'ortogonalità integrale delle forze di specie diversa (§ 9), sia per generalizzare ed al tempo stesso per precisare maggiormente la trattazione di qualche problema importante, come è quello dell'induzione magnetica in seno ad un mezzo indefinito polarizzabile (§ 16), sia finalmente per mostrare la conciliabilità dell'esposta dottrina con fenomeni d'induzione più complessi di quelli che risulterebbero già spiegati dalla teoria di POISSON (§ 17). All'incontro ho dovuto rinunciare, per non eccedere la giusta misura d'una Memoria accademica, ad ogni raffronto elettromagnetico, malgrado la quasi impossibilità di separare nettamente la teoria matematica del Magnetismo da quella dell'Elettromagnetismo. Ma di quest'altra teoria spero potermi diffusamente occupare in altra Memoria, e però di proposito mi sono astenuto nella presente da ogni questione avente con quella un necessario collegamento. Aggiungerò, per ultimo, che non senza motivo ho conservato, come nella già citata Memoria *Sull'induzione magnetica*, la maggior generalità alla funzione quadratica che comparisce nelle equazioni d'induzione. Da un lato, infatti, non ne risulta veruna complicazione essenziale nelle deduzioni e dimostrazioni relative; dall'altro, le recenti ingegnosissime ricerche del ch. PICARD (*) hanno stabilito che equazioni a coefficienti variabili, del genere di quelle cui alludo, non lasciano d'essere accessibili ad un'analisi rigorosa, per ciò che spetta all'esistenza ed alla natura dei loro integrali.

§ **1.** Quando un punto (a, b, c) dello spazio è centro d'una forza ma-

(*) *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles* (nel *Journal de Mathématiques*, 1890).
Sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre par leurs valeurs le long d'un contour fermé (nel *Journal de l'Ecole polytechnique*, 1890).

gnetica, l'azione (unitaria) che ne risulta sopra un altro punto (x, y, z), a distanza finita dal primo, è retta da una funzione potenziale v. Ponendo

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

questa funzione ha la forma:

$$(1) \qquad v = \frac{\mu}{r}$$

se il punto (a, b, c) è sede d'una *massa magnetica* μ; ed ha invece la forma:

$$(1)_a \qquad v = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} \alpha + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} \beta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} \gamma$$

se il punto (a, b, c) è sede d'una *polarizzazione magnetica* (α, β, γ). Quest' ultima funzione può ridursi alla forma monomia:

$$(1)_{a'} \qquad v = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \delta,$$

ove $\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ designa l'intensità assoluta della polarizzazione ed s la direzione dell'asse magnetico, od asse di polarizzazione.

Quando esiste un sistema continuo di centri di forza magnetica, cioè una distribuzione magnetica occupante uno spazio S, od una superficie σ, le precedenti espressioni sono applicabili all'azione (sui punti a distanza finita) che emana rispettivamente da un elemento di spazio dS, o di superficie $d\sigma$. In questo caso si pone in (1):

$$\mu = k dS, \quad \text{oppure} \quad \mu = h d\sigma,$$

dove k ed h rappresentano le densità (cubica, o superficiale) del magnetismo residente nell'intorno del punto (a, b, c). Nelle stesse condizioni si pone in $(1)_{a,a'}$:

$$\alpha = m_a dS, \quad \beta = m_b dS, \quad \gamma = m_c dS, \quad \delta = m dS,$$

oppure

$$\alpha = l_a d\sigma, \quad \beta = l_b d\sigma, \quad \gamma = l_c d\sigma, \quad \delta = l d\sigma,$$

dove m_a, m_b, m_c rappresentano le componenti unitarie (cioè riferite all'unità di volume) della polarizzazione esistente nell'intorno del punto (a, b, c) ed m rappresenta l'intensità assoluta (unitaria) di questa stessa polarizzazione; significati analoghi hanno i simboli l_a, l_b, l_c, l rispetto alle distribuzioni polari di superficie. Di queste ultime distribuzioni si darà solo un cenno nel § finale: tutti gli altri svolgimenti che quí seguono si riferiscono alle distribuzioni polari in tre dimensioni.

§ **2.** Si consideri l'integrale:

$$\int\left(\frac{\partial U}{\partial a}m_a+\frac{\partial U}{\partial b}m_b+\frac{\partial U}{\partial c}m_c\right)dS$$

esteso ad un qualunque spazio S dotato di polarizzazione magnetica m. Il simbolo U rappresenta una qualunque funzione monodroma, continua ed in generale finita delle coordinate a, b, c, funzione che può tuttavia diventare infinita come r^{-1} in punti isolati. Le funzioni m_a, m_b, m_c sono monodrome, finite e generalmente continue, ma possono diventare discontinue lungo certe superficie, che si indicheranno complessivamente (includendovi anche le superficie terminali dello spazio S) con σ. Mediante le identità del tipo:

$$\frac{\partial U}{\partial a}m_a=\frac{\partial(Um_a)}{\partial a}-U\frac{\partial m_a}{\partial a}$$

e l'applicazione del notissimo teorema di trasformazione d'integrali tripli, si ottiene immediatamente la formola:

$$\int\left(\frac{\partial U}{\partial a}m_a+\frac{\partial U}{\partial b}m_b+\frac{\partial U}{\partial c}m_c\right)dS=\int UkdS+\int Uhd\sigma, \tag{2}$$

dove si è posto:

$$(2)_a \qquad \left\{\begin{aligned} k&=-\left(\frac{\partial m_a}{\partial a}+\frac{\partial m_b}{\partial b}+\frac{\partial m_c}{\partial c}\right),\\ h&=-(m_n+m_{n'})\,. \end{aligned}\right.$$

In quest'ultima espressione le lettere n ed n' designano le direzioni delle due opposte normali, erette in uno stesso punto d'una superficie di discontinuità, ed m_n, $m_{n'}$ designano le componenti di m secondo queste due direzioni, componenti calcolate rispettivamente coi valori di m_a, m_b, m_c relativi a ciascuna delle due regioni verso cui le normali n, n' si dirigono.

Rispetto ad ogni punto d'una superficie *terminale,* si riterrà che la direzione della normale *interna* sia n, epperò si dovrà porre, per un tal punto, $m_{n'} = 0$, cioè $h = -m_n$.

L'equazione (2) può essere applicata, sotto certe condizioni, anche allo *spazio infinito*, che si designerà, ove occorra, con S_∞. In tale ipotesi, oltrechè delle vere superficie di discontinuità e delle vere superficie terminali, bisogna tener conto anche della superficie all'infinito, σ_∞, la quale dà luogo, nel secondo membro dell'equazione (2), ad un termine della forma:

$$-\int U m_n d\sigma_\infty .$$

Se, denotando con R la distanza d'un punto di σ_∞ da un qualunque polo fisso situato nel finito, si ha in ogni direzione:

$$\lim (R^2 U m) = 0 \qquad \text{per} \qquad R = \infty ,$$

il termine complementare testè scritto scompare dalla formola, la quale riprende la forma (2). Questa circostanza si verifica, in particolare, quando, annullandosi all'infinito la funzione U, il prodotto $R^2 m$ tende, per $R = \infty$, verso un limite finito.

§ **3.** La formola generale (2) conduce a stabilire, nel modo più semplice, parecchie importanti proprietà delle polarizzazioni magnetiche in tre dimensioni.

Vi si ponga, in primo luogo,

$$U = \frac{1}{r} ,$$

dove r è la distanza del punto (a, b, c) da un punto qualunque (x, y, z). Si trovano per tal modo due espressioni equivalenti:

$$V = \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} m_a + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} m_b + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} m_c \right) dS , \tag{3}$$

$$V = \int \frac{k dS}{r} + \int \frac{h d\sigma}{r} \tag{3$_a$}$$

d'una medesima funzione V delle coordinate x, y, z, la quale è la così detta *funzione potenziale* della distribuzione magnetica esistente nello spazio S.

Queste due espressioni equivalenti hanno caratteri essenzialmente diversi: la prima presenta la detta funzione *in forma polare,* cioè come corrispondente alla *distribuzione polare* (α, β, γ), la seconda la presenta *in forma apolare*, cioè come corrispondente alla *distribuzione apolare* (k, h). Considerata sotto questa seconda forma, V apparisce quale *ordinaria funzione potenziale newtoniana* (di spazio e di superficie). L'essenziale diversità di carattere delle due espressioni risalta nel modo più netto, quando lo spazio S si concepisca diviso, in modo qualunque, in due o più parti. Siffatta divisione non ha veruna influenza sulla composizione dell'espressione polare (3), la quale resta sempre identicamente eguale alla somma delle espressioni formate similmente per ciascuna delle parti in cui si concepisce diviso lo spazio S; mentre invece, se si scomponesse in corrispondenza l'espressione $(3)_a$, attribuendo a ciascuna parte le porzioni di superficie σ che le competono, i frammenti di funzione V così ottenuti non possederebbero più (in generale) la dovuta equivalenza coi frammenti omologhi della funzione (3). Tale equivalenza non si potrebbe ristabilire se non facendo intervenire, insieme colle primitive superficie σ, le sezioni arbitrariamente fatte in S, computando due volte ciascuna d'esse fra le superficie terminali ed introducendo così altri integrali di superficie i quali, nella ricomposizione, si eliderebbero poi di nuovo a due a due.

Ponendo

$$(3)_b \qquad F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

si ottengono in queste quantità F_x, F_y, F_z le componenti di quella forza F, che si dice *forza magnetica* esercitata sopra un polo unitario collocato nel punto (x, y, z). Quando questo punto è *fuori* dello spazio S occupato dalla distribuzione magnetica di cui V è la funzione potenziale, la forza così determinata è quella che *effettivamente* agisce in quel punto, conformemente alle premesse fondamentali del § 1. Rispetto ai punti *interni* ad S, queste medesime premesse lasciano indeciso se le componenti $(3)_b$ sieno quelle della forza effettiva. Esse conservano però, in ogni caso, il significato di componenti della forza emanante dalla distribuzione apolare (k, h), cosicchè la forza F, definita da esse, si dovrebbe denominare *forza magnetica apolare:* si può tuttavia conservarle la denominazione convenzionale, omai passata in uso, di forza magnetica, senz'altro.

È anche passato in uso di denominare *magnetismo libero* quello che si può concepire come costituente la distribuzione apolare (k, h). Esso non rappresenta, come questa, alcunchè di assolutamente fisso e determinato. Ogni sezione fatta idealmente in un corpo magnetico, di data polarità, fa

comparire una carica di magnetismo libero su ciascuna delle due faccie della sezione.

§ **4.** Ponendo nella formola (2) $U = 1$ si ottiene l'equazione:

$$\int k dS + \int h d\sigma = 0, \tag{4}$$

dalla quale consegue che la massa totale della distribuzione apolare (ossia del magnetismo libero) equipollente ad una data distribuzione polare è sempre *nulla*; e ciò, sia che quest'ultima si consideri nella sua totalità, sia che se ne consideri soltanto quella parte che si riferisce ad una qualsivoglia porzione, anche indefinitamente piccola, dello spazio polarizzato.

È questa la proprietà fondamentale che caratterizza la polarità e che ha suggerita la considerazione degli elementi magnetici, come una plausibile rappresentazione materiale del fatto. Come tale, questa rappresentazione possiede una indiscutibile importanza storica: ma le difficoltà che accompagnano lo svolgimento ulteriore di tale concetto ne consigliano l'abbandono, tanto più ch' esso condurrebbe inevitabilmente ad assegnare un limite inferiore al campo di validità del teorema (4), senza che ben si vegga il vantaggio che da tale limitazione potrebbe ritrarsi per la spiegazione dei fatti, o per il migliore assetto della teoria.

§ **5.** Ponendo successivamente nella formola (2) $U = a, b, c,$ si ottengono le tre relazioni seguenti:

$$\left\{ \begin{aligned} \int m_a dS &= \int a k dS + \int a h d\sigma, \\ \int m_b dS &= \int b k dS + \int b h d\sigma, \\ \int m_c dS &= \int c k dS + \int c h d\sigma. \end{aligned} \right. \tag{5}$$

I secondi membri di queste equazioni rappresentano quelli che, giusta una denominazione usitata nella Statica, sono da designarsi come i *momenti*, secondo i tre assi, della distribuzione apolare (k, h) esistente nello spazio S. L'equivalenza di questi momenti ai tre integrali di volume costituenti i primi membri, equivalenza che sussiste, si noti bene, qualunque sia lo spazio S a cui si attribuisce la polarità m, giustifica la denominazione di *momenti unitarii*, o di *componenti di momento unitario,* attribuite comunemente alle quantità m_a, m_b, m_c (l'epiteto di *unitario* riferendosi al *volume*). Le stesse eguaglianze (5) dimostrerebbero anche, se ve ne fosse d'uopo, che, al mutare della terna ortogonale di riferimento, le componenti m_a, m_b, m_c si trasformano al modo delle componenti d'un ordinario momento statico, cioè al modo delle velocità, delle forze, etc.

§ 6. Si ponga

$$V' = \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} m_a' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} m_b' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} m_c' \right) dS'$$

$$= \int \frac{k' dS'}{r} + \int \frac{h' d\sigma'}{r},$$

cioè (§ 3) si rappresenti con V' la funzione potenziale d'una seconda distribuzione polare m', esistente in uno spazio S', spazio che si suppone *arbitrariamente* scelto rispetto ad S. Dalla formola (2), ponendo $U = V'$, si deduce:

$$\int \left(\frac{\partial V'}{\partial a} m_a + \frac{\partial V'}{\partial b} m_b + \frac{\partial V'}{\partial c} m_c \right) dS = \int V' k dS + \int V' h d\sigma$$

e similmente, immaginando fatti i debiti scambii di simboli,

$$\int \left(\frac{\partial V}{\partial a} m_a' + \frac{\partial V}{\partial b} m_b' + \frac{\partial V}{\partial c} m_c' \right) dS' = \int V k' dS' + \int V h' d\sigma'.$$

I secondi membri di queste due equazioni sono eguali fra loro, poichè ciascun d'essi rappresenta il potenziale mutuo delle due distribuzioni apolari (k, h), (k', h'): quindi anche i primi membri sono eguali fra loro, cioè si ha sempre:

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\int \left(\frac{\partial V}{\partial a} m_a' + \frac{\partial V}{\partial b} m_b' + \frac{\partial V}{\partial c} m_c' \right) dS' \\ &= \int \left(\frac{\partial V'}{\partial a} m_a + \frac{\partial V'}{\partial b} m_b + \frac{\partial V'}{\partial c} m_c \right) dS. \end{aligned}$$

Ma quest' eguaglianza non deve interpretarsi senz' altro come espressione del *principio di reciprocità dei potenziali mutui,* in quanto questo principio possa per avventura essere esteso alle distribuzioni *polari.* I due membri della precedente eguaglianza non rappresentano, in generale, il potenziale mutuo delle due distribuzioni polari m, m'. Come risulta dalle relazioni che precedono la (6), e come si avrà occasione di rammentare in seguito (§ 10), essi non rappresentano veramente questo potenziale se non quando i due spazii S, S' non abbiano veruna parte in comune.

Ciò nondimeno l'eguaglianza (6), considerata dal punto di vista pura-

mente analitico, è sempre vera, anche quando, in particolare, i due spazii S, S' coincidano fra loro, e rappresenta una proprietà di cui si può far uso molto vantaggiosamente in varie occasioni.

§ **7.** Vi sono distribuzioni polari la cui funzione potenziale V è *nulla in tutto lo spazio.* Sono evidentemente (§ 3) quelle, e quelle sole, per le quali sussiste: in ogni punto dello spazio S da esse occupato, l'equazione

$$\frac{\partial m_a}{\partial a} + \frac{\partial m_b}{\partial b} + \frac{\partial m_c}{\partial c} = 0, \tag{7}$$

in ogni punto d'una superficie di discontinuità l'equazione

$$m_n + m_{n'} = 0 \tag*{(7)$_a$}$$

ed in ogni punto d'una superficie terminale l'equazione

$$m_n = 0. \tag*{(7)$_b$}$$

L'equazione (7) caratterizza quella classe di distribuzioni polari che si dicono *solenoidali*; l'equazione $(7)_a$ esprime che la componente *normale* del momento polare è dovunque *continua* nell'interno dello spazio S; l'equazione $(7)_b$ esprime che questa stessa componente normale è nulla lungo tutte le superficie terminali, ossia che lungo queste superficie la polarizzazione è *tangenziale.*

Se dunque si pone il quesito: Quali sono le distribuzioni polari, in un dato spazio, a cui corrisponde la stessa distribuzione apolare che ad una polare data? è ovvia la risposta. Le distribuzioni cercate sono quelle, e solamente quelle che si ottengono dalla data sovrapponendo ad essa una qualunque delle distribuzioni polari (relative allo spazio dato) che hanno la funzione potenziale dovunque nulla.

§ **8.** Dalle due forme (3), $(3)_a$ della funzione potenziale magnetica si deduce immediatamente, per noti teoremi,

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta_2 V = -4\pi k = 4\pi\left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_z}{\partial z}\right), \\ &\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n'} = -4\pi h = 4\pi(m_n + m_{n'}), \end{aligned}\right. \tag{8}$$

equazioni di cui la prima sussiste in tutti i punti dello spazio e la seconda in tutti i punti d'ogni superficie di discontinuità, o terminale. Nella prima

equazione si è scritto m_x, m_y, m_z in luogo di m_a, m_b, m_c, per indicare che i valori di queste componenti si riferiscono al punto qualunque (x, y, z) dello spazio infinito, e tali valori debbono ritenersi $=0$ quando questo punto sia esterno allo spazio S, occupato dalla polarizzazione m di cui V è la funzione potenziale.

Ricordando le espressioni $(3)_b$ ed introducendo un nuovo vettore G, definito dalle tre componenti:

$$(8)_a \qquad \begin{cases} G_x = F_x + 4\pi m_x, \\ G_y = F_y + 4\pi m_y, \\ G_z = F_z + 4\pi m_z, \end{cases}$$

le equazioni (8) prendono le forme seguenti:

$$(8)_b \qquad \begin{cases} \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} = 0, \\ G_n + G_{n'} = 0, \end{cases}$$

nella seconda delle quali G_n e $G_{n'}$ sono le componenti di G secondo le direzioni n ed n' delle due opposte normali erette in uno stesso punto di σ, componenti calcolate coi valori che G_x, G_y, G_z prendono in ciascuna delle due regioni verso cui le due normali si dirigono. Queste due equazioni conducono a stabilire una proprietà importantissima del vettore G.

Sia S_1 uno spazio qualunque e σ_1 la superficie che lo limita. Dalla prima equazione $(8)_b$ segue

$$\int \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} \right) dS_1 = 0$$

e di qui, in virtù della seconda equazione $(8)_b$, la quale elimina l'influenza di quelle superficie, o porzioni di superficie σ, che eventualmente attraversassero lo spazio S_1,

$$(8)_c \qquad \int G_{n_1} d\sigma_1 = 0,$$

dove n_1 è la normale interna a σ_1. Considerando il vettore G come rappresentativo d'una *forza* ed adottando una locuzione ben nota, si ha dunque il teorema seguente: *Il flusso della forza G, attraverso una qualunque superficie chiusa, è sempre nullo.* È facile vedere che, reciprocamente, questa proprietà non può sussistere *incondizionatamente* (cioè qualunque sia

a superficie chiusa) per una forza G, se le componenti di questa forza non soddisfanno alle equazioni $(8)_b$.

La forza F $(3)_b$ non possiede mai, incondizionatamente, la proprietà in discorso, a meno che essa non sia nulla dovunque. Infatti se nelle equazioni $(8)_b$ si sostituiscono le espressioni $(8)_a$ dalle componenti di G, si trova subito che quelle equazioni non sono soddisfatte dalle componenti di F se non quando i momenti polari soddisfanno alle equazioni (7), $(7)_a$, $(7)_b$ del § 7, nel qual caso è nulla la funzione V ed è quindi nulla dovunque la forza F.

Ora la proprietà testè riconosciuta per il vettore G è precisamente quella che, ammettendo l'universale validità del noto teorema circa il flusso di forza che attraversa una superficie chiusa, dovrebbe competere alla forza emanante da una distribuzione dotata della proprietà che *ogni* superficie chiusa contenga una massa totale *nulla*; come appunto avviene (§ 4) per ogni distribuzione apolare equipollente ad una polare. È dunque naturale di assumere il vettore G come rappresentativo della *forza polare*, da contrapporsi in tal qual modo alla *forza apolare* F, colla quale essa non coincide che nello spazio vuoto.

La nuova forza G è quella stessa che Thomson distingue coll'appellativo di *elettromagnetica* e che Maxwell denomina invece *induzione magnetica.*

§ **9.** È utile raccogliere e mettere fra loro a riscontro i diversi caratteri delle due forze F, G.

La forza polare G soddisfa sempre alla condizione solenoidale; la forza apolare F in generale no. Infatti per la prima forza sussiste sempre la prima equazione $(8)_b$, mentre per la seconda si ha (in virtù di $(3)_b$, oppure di $(8)_a$)

$$\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=4\pi k\,.$$

La componente normale della forza polare G si mantiene continua attraverso qualunque superficie di discontinuità, o terminale; quella della forza apolare F in generale no. Infatti per la prima componente sussiste sempre la seconda equazione $(8)_b$, mentre per l'altra si ha (in virtù di $(3)_b$, oppure di $(8)_a$)

$$F_n+F_{n'}=4\pi h\,.$$

Ogni componente tangenziale della forza apolare F si mantiene continua attraverso qualunque superficie di discontinuità, o terminale; ogni analoga componente della forza polare G in generale no. La prima proprietà segue

$(3)_{a,b}$ da ciò che V è funzione continua in tutto lo spazio; la seconda segue dalla prima e dalle relazioni $(8)_a$, le quali permettono anche di determinare la discontinuità d'ogni componente tangenziale della forza G.

Ogni tubo di forza polare è necessariamente interminato, vale a dire o rientra in sè stesso, o si perde all'infinito. Ciò segue immediatamente dall'equazione $(8)_c$, applicata ad un tubo di forza polare chiuso da due diaframmi; giacchè quest'equazione esprime l'assoluta costanza del flusso di forza polare lungo tutto il tubo. Niuna analoga proprietà è incondizionatamente enunciabile rispetto ad un tubo di forza apolare, l'equazione corrispondente alla $(8)_c$ essendo per questa forza, in virtù di $(8)_{a,c}$,

$$\int F_{n_1} d\sigma_1 + 4\pi \int m_{n_1} d\sigma_1 = 0$$

ed il secondo termine di quest'equazione non potendo essere nullo incondizionatamente, se non quando sieno adempiute le condizioni specialissime del § 7, cioè quando sia dovunque $V = 0$ e quindi anche $F = 0$.

Si considerino ora due distribuzioni polari arbitrarie e sieno F_x, F_y, F_z le componenti della forza apolare F emanante dalla prima, G_x', G_y', G_z' quelle della forza polare G' emanante dalla seconda. Dall'identità

$$F_x G_x' = -\frac{\partial V}{\partial x} G_x' = V \frac{\partial G_x'}{\partial x} - \frac{\partial (V G_x')}{\partial x}$$

e dalle due analoghe si ricava, in virtù della prima equazione $(8)_b$, applicata alla seconda distribuzione,

$$F_x G_x' + F_y G_y' + F_z G_z' = -\left\{ \frac{\partial (V G_x')}{\partial x} + \frac{\partial (V G_y')}{\partial y} + \frac{\partial (V G_z')}{\partial z} \right\},$$

equazione che sussiste in ogni punto dello spazio. Si ha poi, dalla seconda equazione $(8)_b$, in ogni punto d'una superficie di discontinuità σ', relativa alla seconda distribuzione,

$$V(G_n + G_{n'}) = 0.$$

Di qui si ricava subito

$$\int (F_x G_x' + F_y G_y' + F_z G_z') dS_\infty = \int V G_n' d\sigma_\infty,$$

cosicchè se in ogni direzione si verifica la convergenza

$$\lim (R^2 V G_n') = 0 \quad \text{per} \quad R = \infty,$$

si ha

$$\int(F_x G_x' + F_y G_y' + F_z G_z')dS_\infty = 0. \tag{9}$$

La condizione dianzi accennata è manifestamente soddisfatta quando amendue le distribuzioni polari sono tutte nel finito, ma può sussistere, sotto certe restrizioni, che si riterranno di regola adempiute, anche quando l'una o l'altra od amendue invadano tutto lo spazio. Ciò ammesso, l'equazione (9) rappresenta un'importantissima proprietà di correlazione delle due forze F e G', la quale si può designare col nome di *ortogonalità integrale* delle due forze, polare ed apolare, relative a due distribuzioni in tre dimensioni del tutto arbitrarie ed indipendenti (che possono, naturalmente, coincidere anche in una sola) (*).

§ **10.** Dall'equazione (9) si deduce molto facilmente un'altra importante formola ben nota, che si suole stabilire in altra guisa.

Sostituendo nell'equazione anzidetta le espressioni di G_x', G_y', G_z' desunte dalle tre equazioni analoghe alle $(8)_a$, si trova

$$\int(F_x F_x' + F_y F_y' + F_z F_z')dS_\infty + 4\pi\int(F_a m_a' + F_b m_b' + F_c m_c')dS' = 0,$$

dove S' è lo spazio occupato dalla seconda distribuzione. Quest'equazione si può scrivere $(3)_b$ sotto la forma

$$\int\left(\frac{\partial V}{\partial a} m_a' + \frac{\partial V}{\partial b} m_b' + \frac{\partial V}{\partial c} m_c'\right)dS' = \frac{1}{4\pi}\int\Delta_1 VV' dS_\infty \tag{10}$$

e costituisce la formola cui si alludeva.

Questa formola può servire di verificazione alla già stabilita eguaglianza (6), bastando por mente alla forma simmetrica del suo secondo membro. Essa somministra, nel caso che le due distribuzioni non abbiano parti comuni, una nuova espressione del loro potenziale mutuo. Quando questa condizione non si verifica, il significato di potenziale mutuo non appartiene a ciascuna delle espressioni precedenti (come s'è già avvertito) se non *in senso apolare*, cioè con solo riguardo al magnetismo libero delle due distribuzioni.

Questa distinzione è essenziale ed è utile renderla esplicita mercè una segnatura speciale. Date dunque due distribuzioni polari m, m', occupanti

---

(*) Questo teorema si trova dimostrato, in forma ed estensione alcun poco diverse, in una Nota *Sulla teoria del potenziale,* equazione $(6)_c$ (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, per l'anno 1883).

gli spazii S, S' arbitrariamente scelti, colle rispettive funzioni potenziali V, V', si designerà col simbolo $\mathbf{P}(V, V')$ il loro *potenziale mutuo apolare*, cioè il potenziale mutuo dei rispettivi magnetismi liberi. Si avrà quindi [(6), (10)]:

$$\text{(11)} \qquad \mathbf{P}(V, V') = \int\left(\frac{\partial V}{\partial a} m_a' + \frac{\partial V}{\partial b} m_b' + \frac{\partial V}{\partial c} m_c'\right) dS'$$

$$= \int\left(\frac{\partial V'}{\partial a} m_a + \frac{\partial V'}{\partial b} m_b + \frac{\partial V'}{\partial c} m_c\right) dS$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int \Delta_1 V V'. dS_\infty .$$

Si designerà invece col simbolo $P(V, V')$ il *potenziale mutuo polare* delle stesse due distribuzioni. L'espressione analitica di questo potenziale è per ora incognita: si può solo affermare che sussiste l'eguaglianza:

$$\text{(11)}_a \qquad P(V, V') = \mathbf{P}(V, V')$$

quando le due distribuzioni *non abbiano veruna parte in comune.*

Si denoterà parimente con $\mathbf{P}(V)$ l'*autopotenziale apolare* della distribuzione di funzione potenziale V, cioè il potenziale sovra sè stesso del magnetismo libero di questa distribuzione, e con $P(V)$ l'*autopotenziale polare* della medesima distribuzione. L'espressione di $\mathbf{P}(V)$, rispetto alla quale vale la regola

$$\mathbf{P}(V, V) = 2\mathbf{P}(V),$$

può subito darsi (11) nella doppia forma:

$$\text{(12)} \qquad \mathbf{P}(V) = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial V}{\partial a} m_a + \frac{\partial V}{\partial b} m_b + \frac{\partial V}{\partial c} m_c\right) dS$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int \Delta_1 V . dS_\infty .$$

L'espressione analitica di $P(V)$ deve per ora considerarsi come incognita in ogni caso. Solo è da tenersi per fermo ch'essa non potrebbe assolutamente mai essere la stessa di quella di $\mathbf{P}(V)$, e ciò per una ragione altrettanto semplice quanto perentoria: ed è che ne risulterebbe $P(V) = 0$ per ognuna di quelle infinite distribuzioni polari (§ 7), la di cui funzione potenziale è dovunque nulla; mentre è manifesto che, fintantochè esiste una polarità qualsiasi, deve potersi assegnare una quantità finita di ener-

gia potenziale, misurata dall'autopotenziale vero, o polare, ed equivalente al lavoro che ha dovuto essere speso per costituire lo spazio S in quello stato di polarità, che è condizione necessaria, quand'anche solo potenziale, di qualche efficienza magnetica [*].

§ **11.** Ora come può conseguirsi la determinazione del vero valore di $P(V)$? Una via che, a prima giunta, potrebbe parere conducente a questo fine, è la seguente.

Si concepisca diviso lo spazio S, occupato dalla distribuzione di funzione potenziale V, in parti $S_1, S_2, \dots$ e sieno $V_1, V_2, \dots$ le funzioni potenziali di queste singole parti. Il potenziale di tutto il corpo S, meno la parte S_i, su questa parte medesima, è espresso $(11)_a$ da

$$\mathbf{P}(V-V_i, V_i) = \mathbf{P}(V, V_i) - 2\mathbf{P}(V_i)$$

e la semisomma di tutti i potenziali mutui analoghi a questo è data da

$$P' = \frac{1}{2}\Sigma_i \mathbf{P}(V, V_i) - \Sigma_i \mathbf{P}(V_i),$$

ossia da

$$P' = \mathbf{P}(V) - \Sigma_i \mathbf{P}(V_i)$$

Se, aumentando indefinitamente il numero e diminuendo indefinitamente l'estensione delle parti S_i, in cui viene diviso lo spazio S, questa quantità P' tendesse verso un limite finito P, indipendente dal modo di suddivisione, si potrebbe pensare che questo limite fosse per l'appunto la quantità cercata.

Senonché la forma stessa dell'espressione di P' mostra subito che questo procedimento non può essere atto all'uopo. Infatti le singole quantità

---

[*] Non è del tutto facile rilevare qual fosse il pensiero di MAXWELL intorno a questa *vexata quæstio* dell'autopotenziale magnetico. Nell'art. 632 del *Treatise* (Ed. II) verrebbe indicata senza altro l'espressione $\mathbf{P}(V)$: ma nell'Art. 440 e nella Nota I al Cap. XI, Parte IV, è fatto cenno d'altre forme, per lo meno rispetto ai corpi indotti. Il *termine complementare quadratico* (veggasi il successivo § 12) era già stato aggiunto da BETTI (*Teorica delle forze newtoniane,* 1879) in base a considerazioni istituite sugli elementi magnetici. Mercè considerazioni di simile natura, benchè di carattere più indeterminato, esso è stato pure introdotto ed usato nella citata mia Memoria del 1884. Lo stesso termine complementare si era già presentato, come conseguenza delle equazioni d'induzione nei corpi isotropi, a VON HELMHOLTZ, nella Memoria del 1881 *Ueber die auf das Innere magnetisch oder dielektrisch polarisirten Körper wirkenden Kräfte* (formole $2_{f,g}$). In un recentissimo lavoro di C. NEUMANN (*Neue Sätze ueber das elektrostatische und ueber das magnetische Potential,* nei *Berichte* della Società Reale di Sassonia, 1890) è stabilita un'espressione Ω dell'energia magnetica d'un sistema di corpi, nella quale comparisce un termine complementare di forma ancor più generale, e cioè nella forma corrispondente alla legge d'induzione nei corpi isotropi generalizzata da KIRCHHOFF (veggasi il successivo § 17).

$\mathbf{P}(V_i)$ non possono mai essere, per loro natura, minori di zero, epperò P' non può mai risultare maggiore di $\mathbf{P}(V)$: ne consegue che l'obbiezione derivante dall'ipotesi $V=0$ non viene punto eliminata, e può anzi venire aggravata dalla comparsa d'un risultato negativo. E, del resto, si può facilmente escogitare un caso in cui il processo conduce ad un valore nullo per P', senza che neppur sia nulla la funzione V. Il corpo S sia una sfera magnetizzata uniformemente e le parti $S_1, S_2, \ldots$ sieno gli involucri in cui questa sfera è divisa da superficie sferiche interne le une alle altre ed alla superficie sferica terminale. Il processo condurrebbe in questo caso a formare la semisomma dei potenziali mutui di tutte le coppie d'involucri. Ora in ciascuna di queste coppie uno dei due involucri comprende l'altro nella sua cavità interna, ed è notissimo che, nella cavità d'un involucro sferico magnetizzato uniformemente, la funzione potenziale dell'involucro stesso è costante, donde consegue che il potenziale dell' involucro esterno sull'interno è nullo. Essendo nullo il potenziale mutuo di ciascuna coppia d'involucri, è nulla la semisomma P' di tutti questi potenziali e rimane sempre tale comunque si aumenti il numero e si diminuisca il volume degli involucri parziali. Coll' adottato metodo di suddivisione del corpo sferico si giungerebbe quindi ad una conclusione inammissibile: e ciò basta ad infirmare tutto il procedimento.

Ciò nondimeno giova proseguire nella facile indagine del valore generale dianzi simboleggiato per P', a cagione delle singolari deduzioni cui per tal modo si giunge.

Per semplicità si ponga l'espressione di $\mathbf{P}(V_i)$ sotto la forma $[(1)_a, (12)]$

$$\mathbf{P}(V_i)=\frac{1}{2}\int\frac{\partial V_i}{\partial s}\, m dS_i,$$

dove s è la direzione della polarizzazione m nel posto dell'elemento dS_i. Supponendo che gli spazii parziali S_i sieno già così piccoli da potersi in ciascun d'essi considerare, senza error sensibile, il momento m come costante in grandezza e direzione, si può porre

$$V_i=-m_i\frac{\partial U_i}{\partial s_i}, \quad \text{dove} \quad U_i=\int\frac{dS_i}{r},$$

m_i ed s_i essendo la grandezza e la direzione del momento costante in S_i; epperò si ha

$$\mathbf{P}(V_i)=-\frac{m_i^2}{2}\int\frac{\partial^2 U_i}{\partial s_i^2}\, dS_i,$$

ossia

$$\mathbf{P}(V_i) = \frac{m_i^2}{2} \int \frac{\partial U_i}{\partial s_i} \cos(n_i, s_i) d\sigma_i ,$$

dove n_i é la normale interna alla superficie σ_i, termine dello spazio S_i.

Si consideri ora una suddivisione *particolare* dello spazio S in ispazii parziali S_i; si attribuisca, cioé, a questi la forma di piccoli prismi, la di cui superficie laterale sia formata di linee di magnetizzazione e le di cui basi sieno normali a queste linee. In tal caso la precedente espressione si riduce a

$$\mathbf{P}(V_i) = \frac{m_i^2}{2} \int \frac{\partial U_i}{\partial n_i} d\sigma_i' ,$$

dove σ_i' rappresenta l'insieme delle due basi. Sostituendo per U_i la sua espressione si ottiene successivamente

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(V_i) &= \frac{m_i^2}{2} \int d\sigma_i' \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_i \\ &= \frac{m_i^2}{2} \int dS_i \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} d\sigma_i' \\ &= \frac{m_i^2}{2} \int (\sigma_i')_{dS_i} dS_i , \end{aligned}$$

dove il simbolo scritto sotto l'ultimo integrale rappresenta l'angolo visuale della superficie σ_i' rispetto ad un punto dell'elemento di volume dS_i. Ció posto, se la sezione del prisma infinitamente piccolo S_i diventa evanescente di fronte all'altezza di esso, il detto angolo visuale non ha un valore finito se non per elementi dS_i situati nell'immediata prossimitá delle basi, epperó l'integrale

$$\int (\sigma_i')_{dS_i} dS_i$$

ha col volume S_i un rapporto evanescente. Se, invece, l'altezza del prisma diventa evanescente di fronte alla sezione, il medesimo angolo visuale non differisce sensibilmente da 4π se non nell'immediata prossimitá della superficie laterale, epperó si ha

$$\lim \mathbf{P}(V_i) = 2\pi m_i^2 S_i .$$

Nel primo caso si ottiene dunque

$$\lim P' = \mathbf{P}(V)$$

e, nel secondo,

$$\lim P' = \mathbf{P}(V) - 2\pi \int m^2 dS .$$

Questi risultati assumono una forma più esplicita se si osserva che dalle equazioni $(8)_a$, poste sotto la forma

$$G_x - F_x = 2\pi m_x , \quad \text{ecc.}$$

si deduce, quadrando e sommando,

$$F^2 + G^2 - 2(F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z) = 16\pi^2 m^2 ,$$

e di qui, integrando su tutto lo spazio, con riguardo all'equazione (9),

$$(13) \qquad \frac{1}{8\pi}\int F^2 dS_\infty + \frac{1}{8\pi}\int G^2 dS_\infty = 2\pi \int m^2 dS .$$

I limiti trovati per P' nei due casi testè considerati si possono pertanto rappresentare così:

$$1^\circ \text{ caso} \qquad \lim P' = + \frac{1}{8\pi}\int F^2 dS_\infty ,$$

$$2^\circ \text{ caso} \qquad \lim P' = - \frac{1}{8\pi}\int G^2 dS_\infty .$$

Questi risultati mettono in evidenza l'assoluta inaccettabilità del procedimento indicato, giacchè questo nè conduce ad un limite unico e determinato, nè rimove la possibilità di valori nulli per $P(V)$, chè anzi rende possibili valori negativi di questa stessa quantità.

§ **12.** Conviene dunque battere un' altra e miglior via, e tale è quella cui guida la considerazione seguente.

S' immagini nuovamente che nello spazio infinito esistano due distinte distribuzioni polari m, m', occupanti gli spazii S, S' comunque scelti. Si può concepire l'insieme di queste due distribuzioni come un unico sistema polare, il quale deve possedere, come tale, un autopotenziale $P(V+V')$, che ne misuri la totale energia potenziale. Ora, qualunque sia per essere l'espressione analitica di questa grandezza, si può ammettere

come evidente, od almeno come diretta conseguenza del concetto di energia, ch'essa debba equivalere alla somma di tre altre espressioni rappresentanti:

1°) l'energia propria della prima distribuzione isolatamente considerata;

2°) l'energia della seconda distribuzione;

3°) l'energia risultante dalla simultanea sussistenza delle due distribuzioni, l'una in presenza dell'altra. Si deve dunque avere

$$P(V+V')=P(V)+P(V')+P(V,V').$$

Ma, d'altra parte, per la definizione analitica (§ 10) dei potenziali apolari, si ha pure, identicamente,

$$\mathbf{P}(V+V')=\mathbf{P}(V)+\mathbf{P}(V')+\mathbf{P}(V,V'),$$

relazione la quale, del resto, esprime la stessa legge testè invocata, con solo riguardo ai magnetismi liberi delle due distribuzioni. Ora, quando i due spazii S, S' non hanno veruna parte in comune, si ha, come s'è già più volte notato,

$$P(V,V')=\mathbf{P}(V,V');$$

in questo caso, dunque, formando la differenza delle due equazioni testè scritte, si ottiene;

$$P(V+V')-\mathbf{P}(V+V')=[P(V)-\mathbf{P}(V)]+[P(V')-\mathbf{P}(V')].$$

Ciò posto, la differenza $P(V)-\mathbf{P}(V)$, qualunque ne possa essere l'espressione analitica, è una grandezza che dipende unicamente dalla natura della polarizzazione m e del corpo S, e può essere opportunamente designata con

$$P(V)-\mathbf{P}(V)=p(S),$$

dove p indica una certa operazione, ancora incognita, da farsi sugli elementi analitici che definiscono la polarità e la natura fisica del corpo S, affine di ottenere l'espressione effettiva di quella differenza. Per la stessa ragione si ha

$$P(V')-\mathbf{P}(V')=p(S')$$

e così pure

$$P(V+V')-\mathbf{P}(V+V')=p(S+S'),$$

dove p rappresenta sempre la medesima operazione incognita. Quest'operazione è quindi tale che deve sempre aversi

$$p(S+S')=p(S)+p(S'),$$

sotto la sola condizione che gli spazii S, S' non abbiano parti comuni. Da quest'equazione si passa subito alla

$$p(S)=\Sigma p(\Delta S),$$

dove ΔS è una qualunque delle parti in cui può concepirsi diviso lo spazio S, conservando, naturalmente, a ciascuna la polarità che le spetta nel campo totale S, e quindi alla

$$p(S)=\int_S p(dS).$$

Ora la quantità $p(dS)$ non può avere che la forma ψdS, dove ψ è una funzione incognita delle condizioni fisiche e polari che regnano nell'intorno di quel qualunque punto (a, b, c) di S, al quale è circostante l'elemento dS: si ha dunque finalmente

$$P(V)=\mathbf{P}(V)+\int\psi dS, \tag{14}$$

dove non resta più da determinare che la funzione incognita ψ, la quale, come si può già prevedere, deve dipendere dalle componenti locali m_a, m_b, m_c ed eventualmente dalle loro derivate, come pure dalle condizioni fisiche del posto ove esiste la polarizzazione individuata da queste componenti.

La dottrina fin quì svolta non somministra, nè può somministrare verun altro lume circa la natura della funzione ψ. Vi è però una legge imprescindibile a cui niuna grandezza meccanica può sottrarsi, ed è la *legge dell'omogeneità*, la quale circoscrive entro certi confini la ricerca della natura di tale funzione. Indicando, come d'uso, con L, M, T le unità concrete di lunghezza, di massa e di tempo, si deve, come è notissimo, poter esprimere ogni energia in unità della specie ML^2T^{-2}. Dovendo quindi l'energia parziale $\int\psi dS$ soddisfare a questa condizione, si riconosce intanto che la funzione ψ dev'essere della specie $ML^{-1}T^{-2}$. Nasce da ciò naturalmente l'idea di ricercare di quale specie sia la grandezza m, dalle di cui componenti la funzione ψ deve certamente dipendere. A tal fine basta osservare che dovendo (1) essere μ^2r^{-2} una forza, cioè una gran-

dezza della specie MLT^{-2}, μ dev'essere della specie $M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}$: d'altronde μ è (§ 1) una grandezza della stessa specie di kdS e di $hd\sigma$, epperò (5) mdS è una grandezza della stessa specie del prodotto di μ per una linea. Ne risulta che m è della specie $M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}$ e quindi m^2 della specie $ML^{-1}T^{-2}$; dal che finalmente consegue che ψ *è una grandezza della stessa specie di* m^2.

La più semplice ipotesi che si possa quindi fare sulla forma della funzione ψ è che questa sia una funzione quadratica ed omogenea delle tre componenti m_a, m_b, m_c, con coefficienti (costanti o variabili) di dimensione zero rispetto a tutte tre le unità fondamentali, coefficienti che possono essere discontinui, se il corpo che si considera presenta delle superficie di discontinuità fisica. Quest'ipotesi s'accorda appuntino colle conseguenze della teoria di Poisson ed è quella che si ammetterà nei successivi §§, salvo il far cenno più tardi (§ 17) della logica possibilità d'altre forme meno semplici.

A complemento delle indicazioni date dianzi sulle dimensioni d'alcune grandezze magnetiche, si può aggiungere che μ essendo, come si è veduto, della specie $M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}$, ogni funzione potenziale V è della specie $M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-1}$ e quindi ogni forza apolare F della specie $M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}$, cioè della stessa specie di m. Di questa stessa specie è quindi $(8)_a$ anche ogni forza polare G: anzi avrebbe bastato por mente alle citate equazioni $(8)_a$ per concludere che m è della specie delle derivate prime di V rispetto alle coordinate e che quindi (14) la seconda parte dell'energia $P(V)$ doveva contenere m^2 nella stessa guisa in cui la prima contiene F^2: ma giovava stabilire direttamente la dimensione di m.

La necessità che $P(V)$ conservi un valore positivo anche per quelle distribuzioni per le quali è dovunque $V=0$, implica la necessità che il termine $\int\psi dS$ si mantenga positivo per ogni sistema di valori non tutti nulli delle componenti m_a, m_b, m_c, e quindi che ψ sia funzione quadratica *essenzialmente positiva* di queste componenti. Anche ciò verrà ammesso nel seguito, salvo il ritornare più tardi sopra l'eventualità d'una ipotesi contraria.

Per determinare il potenziale mutuo di due distribuzioni polari m, m', le quali si concepiscano come esistenti in un medesimo spazio S, basta osservare che, in base alla formola (14), si ha

$$P(V+V') = \mathbf{P}(V+V')$$

$$+\int\left\{\psi_m+\psi_{m'}+\frac{\partial\psi}{\partial m_a}m_a'+\frac{\partial\psi}{\partial m_b}m_b'+\frac{\partial\psi}{\partial m_c}m_c'\right\}dS,$$

donde segue (14)

$$(14)_a \qquad P(V,V') = \mathbf{P}(V,V') + \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial m_a} m_a' + \frac{\partial \psi}{\partial m_b} m_b' + \frac{\partial \psi}{\partial m_c} m_c' \right) dS \,.$$

Questa formola sussiste anche se S è soltanto la *regione comune* a due distinte distribuzioni m, m', di cui sieno V, V' le funzioni potenziali, giacché i potenziali mutui delle *regioni non comuni* non danno termini che alla parte apolare $\mathbf{P}(V,V')$ di $P(V,V')$.

§ **13.** Il problema dell'induzione magnetica si pone assai facilmente in equazione, mercé i risultati precedenti, invocando il principio del *minimo di energia.*

Sieno S_o, S gli spazii occupati da due distribuzioni magnetiche, spazii che si supporranno finiti e non aventi parti comuni. Se V_o è la funzione potenziale della prima distribuzione, V quella della seconda, il potenziale P di tutto il sistema è esprimibile nella forma

$$(15) \qquad P = P(V_o) + P(V) + P(V_o, V) \,.$$

La magnetizzazione di S_o si suppone *permanente*, quella di S *temporaria*: V_o è quindi una funzione data ed invariabile, V è invece una funzione incognita della specie (3), dipendente dalla distribuzione polare che si forma *per induzione* in S, sotto l'azione dell'*inducente* S_o. Ammettendo l'invocato principio, questa distribuzione *indotta* m dev'essere tale che, comunque essa venga alterata (entro certi limiti, ristretti quanto si voglia, ma comprendenti un campo finito), il potenziale totale non possa che aumentare di valore.

La cercata distribuzione indotta sia quella di cui V è la funzione potenziale ed m il momento polare. Sia V' la funzione potenziale d'un'altra qualunque distribuzione m', nello stesso spazio S. Una *variazione* arbitraria della vera distribuzione indotta m si può concepire come risultante dalla sovrapposizione della nuova distribuzione m' alla m. Il potenziale P' del sistema così *variato* è espresso da:

$$P' = P(V_o) + P(V+V') + P(V_o, V+V') \,,$$

ossia da:

$$P' = P(V_o) + P(V) + P(V') + P(V,V') + P(V_o,V) + P(V_o,V') \,,$$

talché si ha

$$P' - P = P(V') + P(V,V') + P(V_o,V') \,,$$

o, più semplicemente $(14)_a$,

$$(15)_a \qquad P' - P = P(V_o + V, V') + P(V').$$

Bisogna dunque che per valori abbastanza piccoli, ma del resto arbitrarii, dei momenti *varianti* m', questa differenza $P' - P$ risulti costantemente maggiore di zero. Tale è già (§ 12) il suo ultimo termine $P(V')$, qualunque sia la distribuzione m'.

Per introdurre la condizione limitativa di quei valori di m' per i quali la proprietà or detta deve verificarsi, si denoti per poco con P_h' ciò che diventa P' quando m', V' diventino rispettivamente hm', hV' e si osservi [(14), $(14)_a$] essere

$$P(hV') = h^2 P(V'), \quad P(V_o + V, hV') = hP(V_o + V, V').$$

Si ha quindi

$$P_h' - P = h\{P(V_o + V, V') + hP(V')\}.$$

Di qui risulta che se, comunque sia scelta la distribuzione variante m', la quantità $P(V_o + V, V')$ non è nulla, si può sempre attribuire ad h un tal valore, con tal segno, che, per esso e per ogni valore numericamente più piccolo, la differenza $P_h' - P$ sia e si mantenga minore di zero. Se invece la detta quantità è nulla, questa differenza è certamente maggiore di zero. La condizione necessaria e sufficiente del minimo di energia è quindi

$$(15)_b \qquad P(V_o + V, V') = 0,$$

e la sussistenza di tale condizione, di fronte all'equazione $(15)_a$ in cui non è imposto alcun limite d'intensità alla distribuzione variante m', mostra già che si tratta d'un *minimo assoluto ed unico.* Infatti l'equazione $(15)_a$ dà

$$(15)_c \qquad P' = P + P(V'),$$

cioè $P' > P$ incondizionatamente.

La trovata condizione $(15)_b$, debitamente sviluppata coll'aiuto della formola $(14)_a$, conduce all'equazione

$$\int\left\{\left(\frac{\partial(V_o+V)}{\partial a}+\frac{\partial\psi}{\partial m_a}\right)m_a'+\left(\frac{\partial(V_o+V)}{\partial b}+\frac{\partial\psi}{\partial m_b}\right)m_b'+\left(\frac{\partial(V_o+V)}{\partial c}+\frac{\partial\psi}{\partial m_c}\right)m_c'\right\}dS=0,$$

la quale non può sussistere, qualunque sieno le funzioni varianti m_a', m_b', m_c', se non sussistono, in ogni punto dello spazio indotto S, le equazioni:

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial(V_o+V)}{\partial a}+\frac{\partial\psi}{\partial m_a}=0,\\ &\frac{\partial(V_o+V)}{\partial b}+\frac{\partial\psi}{\partial m_b}=0,\\ &\frac{\partial(V_o+V)}{\partial c}+\frac{\partial\psi}{\partial m_c}=0,\end{aligned}\right.$$

e queste sono le cercate *equazioni dell' induzione magnetica.*

Se queste equazioni si moltiplicano ordinatamente per m_a, m_b, m_c, poscia si sommano e del risultato si prende l'integrale esteso a tutto lo spazio S, si ottiene un'equazione la quale non è evidentemente altro che la $(15)_b$, fatto $V'=V$, cioè

$$P(V_o+V, V)=0,$$

che è quanto dire

$$(16)_a\qquad P(V_o, V)+2P(V)=0.$$

Di qui risulta, in primo luogo, che se fosse $V_o=0$ si dovrebbe avere $P(V)=0$, equazione la quale (§ 12) non può verificarsi che per

$$m_a=m_b=m_c=V=0 \text{ dovunque.}$$

Ciò dimostra il teorema che le equazioni d'induzione non ammettono mai se non una soluzione unica; giacchè è chiaro che la differenza di due soluzioni, se una tal differenza potesse esistere, dovrebbe soddisfare (16) alle stesse equazioni che la funzione V per $V_o=0$. Questa dimostrazione verrà però richiamata in seguito (§ 15), per essere nuovamente discussa in confronto con un'altra deduzione del teorema d'unicità.

In secondo luogo è da notarsi che dalle due equazioni (15), $(16)_a$ risulta:

$$(16)_b\qquad P=P(V_o)-P(V),$$

relazione da cui seguono due proprietà degne di menzione. L'una è che si ha sempre

$$P(V)<P(V_o),$$

perché P è quantità sempre maggiore di zero; l'altra è che $P(V)$ può considerarsi come l'espressione del lavoro che si dovrebbe spendere per trasportare lentamente il corpo indotto S dal suo posto attuale a distanza infinita, in presenza del corpo inducente S_o; o, viceversa, del lavoro che il detto corpo potrebbe compiere, venendo dall'infinito a collocarsi nel suo posto attuale [*].

Se m', V' rappresentano la distribuzione indotta e la relativa funzione potenziale, nel supposto che il corpo S venga sottratto all'azione dell'inducente S_o ed esposto a quella d'un altro inducente S_o', di funzione potenziale V_o', si hanno ad un tempo $(15)_b$ le due equazioni

$$P(V_o + V, V') = 0, \quad P(V_o' + V', V) = 0,$$

donde segue

$$P(V_o + V, V') = P(V_o' + V', V),$$

o, più semplicemente,

$$P(V_o, V') = P(V_o', V),$$

cioè, in forma esplicita,

$$(16)_c \quad \int\left(\frac{\partial V_o}{\partial a}m_a' + \frac{\partial V_o}{\partial b}m_b' + \frac{\partial V_o}{\partial c}m_c'\right)dS = \int\left(\frac{\partial V_o'}{\partial a}m_a + \frac{\partial V_o'}{\partial b}m_b + \frac{\partial V_o'}{\partial c}m_c\right)dS.$$

Quest'equazione contiene l'importante *teorema di reciprocità*, stabilito per la prima volta da KIRCHHOFF rispetto ai corpi isotropi. Non occorre qui insistere sulle utili applicazioni di tale teorema, che trovansi esposte nella già citata Memoria *Sull'induzione magnetica* e che, insieme a molte altre considerazioni più o meno speciali, escono dal quadro del presente lavoro.

È utile invece ricordare che la qui ammessa ipotesi circa la quadraticità della funzione ψ conduce di necessità alla conclusione, non confermata dall'esperienza, che variando in un rapporto costante i momenti del corpo inducente, debbano variare nello stesso rapporto anche quelli del corpo

---

[*] In virtù della relazione $(16)_a$ questo risultato è in accordo con uno degli importanti teoremi recentemente stabiliti da C. NEUMANN nella Memoria già citata alla fine del § 10 (cfr. il teorema a p. 127 della Memoria di NEUMANN). Del resto la ricordata relazione $(16)_a$ non differisce, in sostanza, da quella segnata (3) nella mia Memoria del 1884, ov'essa era stata dedotta da considerazioni d'altro genere.

indotto. Si vedrà nel § 17 come, senza uscire dai caratteri generali imposti alla detta funzione dalle considerazioni del § 12, si possa modificarne la forma in guisa da avvicinarsi meglio ai risultati indicati dall'osservazione. L'ipotesi quadratica resta peró sempre applicabile alle induzioni di moderata intensità e, come tale, e per le sue proprietà peculiari, possiede un' importanza preponderante rispetto alla teoria generale della polarizzazione.

§ **14.** La terna d'equazioni (16) contiene in sè tutto il problema dell'induzione magnetica, ma non ne lascia chiaramente rilevare la natura analitica, poichè le quattro funzioni incognite m_a, m_b, m_c, V sono fra loro legate da una relazione *integrale,* cioè dalla (3). Per ridurre il problema a termini più espliciti occorre una trasformazione, che é la seguente.

Si ponga

$$V_o + V = U \tag{17}$$

e si concepiscano risolute le equazioni (16), cioè le

$$\frac{\partial \psi}{\partial m_a} = -\frac{\partial U}{\partial a}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial m_b} = -\frac{\partial U}{\partial b}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial m_c} = -\frac{\partial U}{\partial c},$$

rispetto alle componenti m_a, m_b, m_c, di cui i primi membri sono funzioni lineari ed omogenee. Le soluzioni hanno la forma:

$$m_x = -\Psi'\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right), \quad m_y = -\Psi'\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right), \quad m_z = -\Psi'\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right), \tag{17$_a$}$$

dove Ψ è la funzione quadratica *reciproca* di Ψ, formata coi tre argomenti

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z},$$

funzione che si potrà, se giovi, designare più distintamente con $\Psi(U)$. Si sono sostituite le coordinate x, y, z alle a, b, c perchè, a differenza delle equazioni (16), che sussistono solamente entro lo spazio S, le nuove equazioni $(17)_a$ si possono e debbono considerare come valide *in tutto lo spazio.* Basta per ciò, in armonia con una convenzione già fatta al principio del § 8, attribuire ai coefficienti della quadratica Ψ il valor *zero* in tutto lo spazio esterno al corpo indotto S.

Sostituendo le espressioni di m_x, m_y, m_z, date da queste equazioni $(17)_a$,

nei secondi membri delle $(8)_a$, si ottiene (17)

$$G_x = \frac{\partial V_0}{\partial x} - \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} + 4\pi \Psi' \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) \right\}, \quad \text{etc.}$$

ossia

$$(17)_b \quad G_x = \frac{\partial V_0}{\partial x} - \Phi' \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right), \quad G_y = \frac{\partial V_0}{\partial y} - \Phi' \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right), \quad G_z = \frac{\partial V_0}{\partial z} - \Phi' \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right),$$

dove Φ, ovvero $\Phi(U)$, é una nuova funzione quadratica ed omogenea, formata cogli stessi argomenti di Ψ, e legata con questa dalla relazione

$$(18) \qquad \Phi(U) = \frac{\Delta_1 U}{2} + 4\pi \Psi(U).$$

Sostituendo finalmente le precedenti espressioni $(17)_b$ di G_x, G_y, G_z nelle due equazioni $(8)_b$, caratteristiche delle forze polari, si ottiene

$$(18)_a \qquad \nabla U = \Delta_2 V_0,$$

$$(18)_b \qquad D_n U + D_{n'} U = \frac{\partial V_0}{\partial n} + \frac{\partial V_0}{\partial n'},$$

dove per brevitá si é posto:

$$(18)_c \qquad \begin{cases} \nabla U = \dfrac{\partial}{\partial x} \Phi' \left(\dfrac{\partial U}{\partial x} \right) + \dfrac{\partial}{\partial y} \Phi' \left(\dfrac{\partial U}{\partial y} \right) + \dfrac{\partial}{\partial z} \Phi' \left(\dfrac{\partial U}{\partial z} \right), \\ D_n U = \Phi' \left(\dfrac{\partial U}{\partial x} \right) \dfrac{\partial x}{\partial n} + \Phi' \left(\dfrac{\partial U}{\partial y} \right) \dfrac{\partial y}{\partial n} + \Phi' \left(\dfrac{\partial U}{\partial z} \right) \dfrac{\partial z}{\partial n}. \end{cases}$$

È da avvertire, rispetto a quest' ultima segnatura, che nel calcolare il valore di $D_n U$ bisogna sempre far uso di quelle espressioni, cosí di U come di Φ (funzione i cui coefficienti possono, come quelli di Ψ, essere discontinui lungo certe superficie, e *debbono* in ogni caso considerarsi come tali lungo le superficie terminali), che si riferiscono *alla regione verso la quale si dirige la normale n;* cosicché, per esempio, quando si tratti dei punti di una superficie terminale di S, si deve porre per essi

$$\Phi = \frac{\Delta_1 U}{2}, \quad \text{e quindi} \quad D_{n'} U = \frac{\partial U}{\partial n'},$$

se n' è ritenuta essere la direzione della normale *esterna*.

Delle due equazioni in U $(18)_{a,b}$ la prima è valida *in tutto lo spazio*, la seconda *nei punti d'ogni superficie di discontinuità* (a rigore, nei punti di qualunque superficie), cioè tanto nei punti di σ quanto in quelli di σ_o (superficie di discontinuità e terminali di S_o). Queste equazioni $(18)_{a,b}$ si possono considerare come il risultato dell'eliminazione di m_a, m_b, m_c fra le (16).

Per tal modo la soluzione del problema d'induzione viene a dipendere dalla determinazione d'un'unica funzione U monodroma, continua e finita (per la sua definizione (17)), la quale deve possedere i requisiti seguenti:

I. Di soddisfare in tutto lo spazio all'equazione $(18)_a$;

II. Di avere le derivate prime continue e finite in tutto lo spazio, tranne nei punti delle superficie di discontinuità, dove dev'essere soddisfatta l'equazione $(18)_b$;

III. Di diportarsi all'infinito come una funzione potenziale di masse situate nel finito.

Infatti, nota che sia una tal funzione U, le equazioni $(17)_a$ fanno conoscere senz'altro la distribuzione indotta m, mentre la (17) fa conoscere la funzione potenziale V di questa distribuzione.

Le precedenti condizioni I, II, III sono *caratteristiche*, cioè non possono essere soddisfatte da due distinte funzioni U', U''. Infatti la differenza U di queste due supposte soluzioni, oltre che alle altre condizioni generali, dovrebbe soddisfare, come facilmente si riconosce, alle due equazioni in cui si convertono le $(18)_{a,b}$ per $V_o = 0$. Ora dalle equazioni $(17)_b$, moltiplicate ordinatamente per le derivate di U e sommate, si deduce, con una integrazione su tutto lo spazio e con riguardo al teorema generale (9),

$$(18)_d \qquad \int \Phi(U) dS_\infty - 2\pi \mathbf{P}(V_o, U) = 0 \,,$$

donde, per $V_o = 0$,

$$(18)_e \qquad \int \Phi(U) dS_\infty = 0 \,.$$

Ma la funzione quadratica $\Phi(U)$ è, per le ipotesi fatte sulla ψ e quindi anche sulla $\Psi(U)$, essenzialmente positiva in tutto lo spazio: quindi quest'ultima equazione non può essere soddisfatta che da $U = 0$ dovunque; e ciò esclude ogni possibile differenza fra le due soluzioni supposte distinte.

Così anche per questa via è stabilita l'unicità di soluzione del problema d'induzione.

§ **15.** La dimostrazione precedente, messa a fronte di quella del § 13, dà luogo ad alcune osservazioni.

E primieramente apparisce $(18)_e$ che la condizione necessaria e sufficiente per poter concludere da quella che la differenza di due soluzioni U dev'essere nulla, è che la quadratica $\Phi(U)$ (18) sia dovunque positiva (come è già, per definizione, in ogni punto esterno al corpo S). Ora ciò avviene senza dubbio quando è positiva la quadratica $\Psi(U)$, che è quanto dire l'antica ψ, ma potrebbe anche avvenire senza che questa fosse tale. Quindi la precedente dimostrazione stabilisce l'unicità di soluzione in condizioni più larghe che non fossero quelle sotto le quali tale proprietà venne stabilita nel § 13.

In realtà però si può modificare la deduzione fatta in quest'ultimo §, per guisa da giungere alla medesima conclusione. Basta infatti trascrivere l'espressione (14) nella forma:

$$P(V) = \frac{1}{8\pi}\int \Delta_1 V dS' + \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\Delta_1 V}{2} + 4\pi\psi\right)dS\,,$$

dove S' rappresenta tutto lo spazio escluso del corpo S, ed osservare che, per la positività di quest'espressione, è sufficiente quella di

$$\frac{\Delta_1 V}{2} + 4\pi\psi(m_a, m_b, m_c)$$

in ogni punto di S. Ora, nei riguardi della dimostrazione da darsi, questa espressione equivale a

$$\frac{\Delta_1 V}{2} + 4\pi\Psi\left(\frac{\partial V}{\partial a}, \frac{\partial V}{\partial b}, \frac{\partial V}{\partial c}\right),$$

giacchè, per l'ipotesi $V_o = 0$, dovrebbero sussistere $(17)_a$ le relazioni

$$m_a = -\Psi'\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right), \quad \text{etc.},$$

e questa seconda espressione quadratica non è (18) altro che $\Phi(V)$. Dunque, rinunciando alla primitiva ipotesi della necessaria positività di ψ, e conservando soltanto quella della positività di $P(V)$, si giungerebbe egualmente alla conclusione più generale di cui s'è detto.

Or qui si presenta una circostanza singolare, la quale vien messa più chiaramente in rilievo quando si assuma la quadratica ψ in forma canonica, cioè quando si ponga

$$\psi = \frac{1}{2}\left(\frac{m_a^2}{\varkappa_a} + \frac{m_b^2}{\varkappa_b} + \frac{m_c^2}{\varkappa_c}\right).$$

La riduzione di ψ a questa forma può essere fatta con una conveniente scelta d'assi *fissi*, se i coefficienti di ψ sono *costanti*, od anche se, essendo questi variabili, il corpo S possiede tre assi ortogonali fissi di simmetria magnetica; ma può, in ogni caso, concepirsi effettuata per ciascun punto di S in particolare. Le quantità (senza dimensione) $\varkappa_a$, $\varkappa_b$, $\varkappa_c$ sono i cosidetti *coefficienti di suscettibilità*, secondo i tre assi, nel primo caso, e secondo tre determinate direzioni ortogonali variabili da punto a punto, nel secondo. La funzione reciproca Ψ è data, in queste ipotesi, da

$$\Psi(U) = \frac{1}{2}\left\{\varkappa_x\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \varkappa_y\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \varkappa_z\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right\}$$

e si ha quindi

$$\Phi(U) = \frac{1}{2}\left\{\mu_x\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \mu_y\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \mu_z\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right\},$$

dove si è posto

$$(19)_a \qquad \mu_x = 1 + 4\pi\varkappa_x, \quad \mu_y = 1 + 4\pi\varkappa_y, \quad \mu_z = 1 + 4\pi\varkappa_z,$$

dove, cioè, le quantità μ_x, μ_y, μ_z sono i cosidetti *coefficienti di permeabilità*, che si riducono all'unità nello spazio esterno al corpo S, spazio in cui si deve porre $\varkappa_x = \varkappa_y = \varkappa_z = 0$. Le condizioni necessarie e sufficienti per la positività di Φ sono quindi:

$$(19)_b \qquad \mu_x > 0, \quad \mu_y > 0, \quad \mu_z > 0,$$

in tutto lo spazio.

Ciò premesso, si osservi che essendo (14)

$$P(V) = \frac{1}{8\pi}\int F^2 dS_\infty + \int \psi dS,$$

si può (13) scrivere anche

$$(19)_c \qquad P(V) = -\frac{1}{8\pi}\int G^2 dS_\infty + \int(\psi + 2\pi m^2)dS,$$

dove, rispetto agli assi cui si riferisce l'espressione (19), è

$$\psi + 2\pi m^2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{\mu_a m_a^2}{\varkappa_a} + \frac{\mu_b m_b^2}{\varkappa_b} + \frac{\mu_c m_c^2}{\varkappa_c}\right\}.$$

Ne risulta che se, essendo soddisfatte in ogni punto le condizioni $(19)_b$, sono in ogni punto di S negativi i coefficienti $\varkappa_a, \varkappa_b, \varkappa_c$; ovvero, in altri termini, se, essendo positiva la quadratica Φ, è invece negativa la ψ, riesce necessariamente negativa $(19)_c$ anche l'espressione dell'energia. Ora, in questo caso, cadono tutte le deduzioni del § 13, mentre non cessa, in virtù delle trasformazioni del § 14, di sussistere il teorema d'unicità di soluzione delle equazioni d'induzione.

Il qui accennato caso d'eccezione ai ragionamenti del § 13 (*) è importante a notarsi, per ciò ch'esso non corrisponde già ad una mera possibilità astratta, ma si presenta in una classe di fenomeni reali, in quelli, cioè, che si riferiscono ai corpi diamagnetici; e l'incongruenza del risultato che si verificherebbe per questi corpi, rispetto al segno dell'energia, non è un argomento di picciolo peso in favore dell'ipotesi, già più volte messa innanzi ed ora diventata più che mai probabile, d'una polarizzabilità magnetica di tutto lo spazio ambiente.

Quest'ipotesi verrà trattata nel § successivo. Qui giova aggiungere, a modo di complemento, alcune poche osservazioni circa formole incontrate nel § precedente.

Collo stesso procedimento con cui si dedusse l'equazione $(18)_d$, si può stabilire l'equazione più generale:

$$(20)\quad \int \left\{ \Phi'\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\frac{\partial U'}{\partial x} + \Phi'\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial U'}{\partial y} + \Phi'\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)\frac{\partial U'}{\partial z} \right\} dS_\infty - 4\pi P(V_o, U') = 0\,,$$

dove U' è, come U, una funzione potenziale di distribuzione magnetica finita ed in tre dimensioni. Eliminando, con noti processi, le derivate di U', si può dare a quest'equazione la forma:

$$\int U' \left\{ \nabla U - \Delta_2 V_o \right\} dS_\infty$$

$$+ \int U' \left\{ D_n U + D_{n'} U - \left(\frac{\partial V_o}{\partial n} + \frac{\partial V_o}{\partial n'}\right) \right\} d\sigma = 0\,,$$

dove σ è il complesso di *tutte* le superficie di discontinuità. Da questa unica formola, stante l'arbitrio che regna circa U', si ricavano nuovamente le due equazioni $(18)_{a,b}$.

Attribuendo ad U' il significato di *variazione*, δU, della funzione U, l'equazione (20) diventa quella stessa che si otterrebbe annullando la va-

(*) Cfr. l'articolo *Note fisico-matematiche*, nei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo per il 1889.

riazione δ della quantità

$$\frac{1}{4\pi}\int \Phi(U)dS_\infty - \mathbf{P}(V_o, U).$$

Finalmente dall'equazione

$$2\int \Phi dS + \int U\nabla U dS + \int U(D_n U + D_{n'} U)d\bar{\sigma} + \int U D_n U d\sigma = 0$$

si deduce che una funzione U, assoggettata alla condizione che ∇U debba prendere valori dati in ogni punto di uno spazio S terminato da una superficie σ ed attraversato da superficie di discontinuità $\bar{\sigma}$, è del tutto individuata quando sien dati, lungo le superficie $\bar{\sigma}$ e σ, sia i valori della funzione stessa, sia quelli di $D_n U + D_{n'} U$ e, rispettivamente, di $D_n U$, sia finalmente in parte gli uni ed in parte gli altri. Ciò si collega col problema dell'induzione magnetica per via di certe considerazioni che sono state esposte nei §§ 12, 13 della Memoria *Sull' induzione magnetica*, ove è stato soltanto ommesso di considerare l'esistenza di superficie di discontinuità non terminali.

§ **16.** S'immagini che sieno di nuovo in presenza, come nel § 13, i due corpi S_o ed S, ma che, al tempo stesso, tutto lo spazio sia occupato da un mezzo isotropo polarizzabile. È ragionevole ammettere che questo mezzo invada anche lo spazio occupato da ciascuno dei corpi S_o ed S. Senonché, rispetto al secondo, l'esistenza entro di esso d'una parte del mezzo deve considerarsi, nel qui ammesso ordine d'idee, come la stessa causa efficiente della suscettibilità magnetica del corpo, variamente atteggiata secondo la natura di questo (la quale si rispecchia nei coefficienti della relativa funzione ψ); mentre invece il primo corpo deve considerarsi come polarmente *inerte*, cioè come liberamente pervaso dal mezzo, sul quale esso non esercita che un'azione *apolare*. In tale concetto lo spazio, che si dirà S', da riguardarsi come effettivamente occupato dal mezzo modificatore dell'induzione, è quello escluso dal solo corpo S, talché, denotando con m, m' i momenti indotti in S ed in S', con V, v le rispettive funzioni potenziali, con V_o la funzione potenziale inducente, si ottengono (§ 14) le seguenti equazioni d'induzione:

per il corpo S:

$$m_x = -\Psi'\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right), \quad m_y = -\Psi'\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right), \quad m_z = -\Psi'\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right),$$

per il mezzo S':

$$m_x' = -\varkappa\frac{\partial U}{\partial x}, \quad m_y' = -\varkappa\frac{\partial U}{\partial y}, \quad m_z' = -\varkappa\frac{\partial U}{\partial z};$$

dove si è posto

$$U = V_o + V + v$$

e dove $\varkappa$ è il coefficiente di suscettibilità del mezzo.

Le tre equazioni per m' si possono riguardare come comprese in quelle per m (estese in tal caso a tutto lo spazio), e ciò considerando Ψ come una funzione quadratica che possieda, in S, l'espressione generale già prima supposta ed, in S', l'espressione

$$\Psi = \frac{\varkappa}{2} \Delta_1 U.$$

Con tale considerazione, se si rammentano le equazioni fondamentali $(18)_{a,b}$ del § 14 e se si pone

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa,$$

si trova facilmente che le condizioni, debitamente particolareggiate, che definiscono univocamente la funzione U (supposta positiva la quadratica Φ e la costante μ) sono le seguenti:

I. In ogni punto di S si ha:

$$\nabla U = \Delta_2 V_o$$

I.' ed in ogni punto di S':

$$\mu \Delta_2 U = \Delta_2 V_o.$$

II. In ogni punto d'una superficie di discontinuità *interna* ad S si ha:

$$D_n U + D_{n'} U = \frac{\partial V_o}{\partial n} + \frac{\partial V_o}{\partial n'},$$

II.' in ogni punto d'una superficie terminale di S:

$$D_n U + \mu \frac{\partial U}{\partial n'} = \frac{\partial V_o}{\partial n} + \frac{\partial V_o}{\partial n'}$$

II." ed in ogni punto d'una superficie di discontinuità o terminale di S_o:

$$\mu \left(\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n'} \right) = \frac{\partial V_o}{\partial n} + \frac{\partial V_o}{\partial n'}.$$

La sola circostanza che esige qualche riflessione è il modo di diportarsi della funzione U all'infinito: nel caso attuale, infatti, questa funzione non può senz'altro considerarsi come funzione potenziale di masse tutte situate nel finito. Se non che, osservando che in tutto lo spazio esterno ad S e ad S_o si ha (I')

$$\Delta_2 U = 0$$

e che quindi U è funzione potenziale di masse che non possono aver sede se non in S, in S_o ed all'infinito, si riconosce agevolmente (mercé considerazioni analoghe a quelle fatte da Kirchhoff nella Lez. XVI, § 7, della *Meccanica*) come, ammettendo che la polarizzazione m' del mezzo debba essere nulla all'infinito, il che è necessario per rendere determinato il problema, si possa nuovamente stabilire che

III. I caratteri della funzione U all'infinito sono quelli d'una funzione potenziale di masse situate nel finito.

Ciò posto, si confrontino queste varie condizioni cui è soggetta la funzione U, e che la definiscono completamente, con quelle che dovrebbero sussistere per l'analoga funzione se lo spazio S' fosse *neutro*, cioè se fosse $\mu = 1$. Si riconosce tosto che le condizioni I, II e III resterebbero in questo caso identicamente le stesse, mentre le I', II', II'' muterebbero, e cioè diverrebbero ordinatamente le seguenti:

$$\Delta_2 U = \Delta_2 V_o,$$

$$D_n U + \frac{\partial U}{\partial n'} = \frac{\partial V_o}{\partial n} + \frac{\partial V_o}{\partial n'},$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n'} = \frac{\partial V_o}{\partial n} + \frac{\partial V_o}{\partial n'}.$$

Or ecco come si può ristabilire l'accordo *formale* di tutte le condizioni. Si ponga

$$\Phi = \mu \Phi', \qquad V_o = \mu V_o'$$

e si denotino con ∇', D_n' le operazioni ∇ e D_n eseguite colla quadratica Φ' anziché colla Φ. Per tale semplice sostituzione le due equazioni I, I' vengono a coincidere nell'unica

$$\text{I}_a \qquad \nabla' U = \Delta_2 V_o',$$

valida in tutto lo spazio, mentre le II, II', II'' vengono a coincidere in que-

st'altra unica equazione

$$\mathrm{II}_a \qquad D_n' U + D'_{n'} U = \frac{\partial V_o'}{\partial n} + \frac{\partial V_o'}{\partial n},$$

valida per tutte le superficie di discontinuità e terminali così di S come di S_o. La funzione U individuata da queste condizioni I_a, II_a e dalla III è ancora la stessa di prima, poiché il passaggio dalla quadratica Φ alla Φ' non importa che la divisione di tutti i coefficienti per la *costante* μ, vale a dire che invece di porre

$$\Phi(U) = \frac{\Delta_1 U}{2} + 4\pi\Psi(U) \qquad \text{in } S,$$

$$= \frac{\mu}{2}\Delta_1 U \qquad \text{in } S'$$

si deve porre

$$\Phi'(U) = \frac{\Delta_1 U}{2\mu} + \frac{4\pi}{\mu}\Psi(U) \qquad \text{in } S,$$

$$= \frac{\Delta_1 U}{2} \qquad \text{in } S'.$$

Ma mentre la funzione U, definita dalle condizioni I, I', II, II', II'', III, è quella che soddisfa all'equazione

$$U = V_o + V + v$$

e che corrisponde alla simultanea considerazione dei soliti due corpi S_o, S e dell'*ambiente magnetico*, quella definita dalle condizioni I_a, II_a e III soddisfa invece (§ 14) all'equazione

$$U = V_o' + V'$$

e corrisponde alla considerazione d'un inducente S_o di funzione potenziale V_o' e d'un indotto S di funzione potenziale V', *ad ambiente neutro.* La necessaria eguaglianza

$$V_o + V + v = V_o' + V'$$

dà quindi

$$V' = V + v + V_o - V_o',$$

cioè

$$V_o' = \frac{V_o}{\mu}, \qquad V' = V + v + \frac{4\pi\varkappa}{\mu} V_o.$$

La prima di queste due equazioni fornisce il noto teorema che l'esistenza d'un ambiente di permeabilità μ impicciolisce *apparentemente* il valore di ogni funzione potenziale inducente nel rapporto da μ ad 1. La seconda stabilisce la relazione che passa fra la funzione potenziale indotta *apparente* V', la vera V e quella, v, relativa all'ambiente. Si può osservare che, se non esistesse il corpo S, si avrebbe $V=V'=0$ e quindi

$$v=-\frac{4\pi\varkappa}{\mu}V_o:$$

denotando con v_o questo particolare valore (indipendente da S) della funzione potenziale indotta nel mezzo indefinito, si può dunque scrivere

$$V'=V+v-v_o\,.$$

L'effetto apparente dell'esistenza d'un mezzo si riconosce più distintamente supponendo che ψ abbia la forma (19), giacchè si ha in tal caso

$$\Phi'=\frac{1}{2}\left\{\mu_x'\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\mu_y'\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\mu_z'\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right\},$$

dove

$$\mu_x'=\frac{\mu_x}{\mu},\quad \mu_y'=\frac{\mu_y}{\mu},\quad \mu_z'=\frac{\mu_z}{\mu}\,.$$

E poichè, ponendo

$$\mu_a'=1+4\pi\varkappa_a',\quad \mu_b'=1+4\pi\varkappa_b',\quad \mu_c'=1+4\pi\varkappa_c',$$

risulta

$$\varkappa_a'=\frac{\varkappa_a-\varkappa}{\mu},\quad \varkappa_b'=\frac{\varkappa_b-\varkappa}{\mu},\quad \varkappa_c'=\frac{\varkappa_c-\varkappa}{\mu},$$

si vede come, pur essendo positivi i quattro coefficienti di suscettibilità *vera* $\varkappa_a$, $\varkappa_b$, $\varkappa_c$, $\varkappa$, possano diventare negativi i coefficienti di suscettibilità *apparente* $\varkappa_a'$, $\varkappa_b'$, $\varkappa_c'$: si vede, cioè, come l'ipotesi della polarizzabilità di tutto lo spazio ambiente permetta di spiegare i fatti del diamagnetismo, senza rinunziare alle condizioni imposte dalla necessità che la vera espressione dell'energia si mantenga sempre positiva.

§ **17.** Si è fatto allusione, nei §§ 12 e 13, alla possibilità di attribuire alla funzione ψ una forma diversa dalla quadratica. Or ecco qualche breve cenno in proposito, limitato, per semplicità, al caso dei corpi isotropi.

Si osservi primieramente che le equazioni d'induzione magnetica (16) sussistono per qualsiasi forma della funzione ψ, qualora si considerino come ricavate dal porre $=0$ la variazione del potenziale totale P.

Nel caso d'un corpo isotropo, in cui la funzione ψ non può dipendere che dall'unico argomento m, quelle equazioni esprimono che l'asse magnetico è in ogni punto (a, b, c) diretto nel senso della forza magnetica totale $\mathbf{F}$ di componenti

$$-\frac{\partial(V_o+V)}{\partial a}, \quad -\frac{\partial(V_o+V)}{\partial b}, \quad -\frac{\partial(V_o+V)}{\partial c},$$

mentre la grandezza m del momento indotto è data da

$$\psi'(m)=\mathbf{F}. \quad (21)$$ (*)

Se si ammette l'ipotesi quadratica, cioè se si pone

$$\psi(m)=\frac{m^2}{2\varkappa}, \quad (21)_a$$

dove $\varkappa$ è il coefficiente di suscettibilità del corpo, ha luogo la relazione:

$$\psi'(m)=\frac{m}{\varkappa}=\mathbf{F}, \quad (21)_b$$

che stabilisce la proporzionalità fra il momento m e la forza $\mathbf{F}$.

Egli è appunto perchè l'esperienza non conferma tale proporzionalità, se non per moderate intensità di forza inducente, ed accenna invece, per induzioni d'intensità sempre crescente, all'esistenza d'un limite superiore finito per il valore del momento unitario indotto, che è stata congetturata la possibilità d'una relazione d'altra forma fra $\mathbf{F}$ ed m, relazione che dovrebbe ridursi alla forma $(21)_b$ per valori molti piccoli di queste due grandezze.

Che tale possibilità non ripugni punto alla imprescindibile condizione

---

(*) Se si assumesse una funzione k di m, tale che quest'equazione (21) prendesse la forma $m=k\mathbf{F}$, si avrebbe

$$\frac{m}{k}=\psi'(m), \quad \text{donde} \quad \psi(m)=\int\frac{m\,dm}{k},$$

e la forma che ne risulterebbe (14) per $P(V)$ si troverebbe in accordo coll'espressione generale $\mathfrak{Q}$ dell'energia magnetica, data da C. Neumann nella Memoria già citata, equazione (28).

(§ 12) del dover essere ψ una grandezza omogenea col quadrato di un momento unitario, risulta dalla semplicissima considerazione seguente.

Se esiste, per il dato corpo isotropo, un valore assoluto M del momento unitario, il quale sia limite superiore d'ogni possibile valore del momento indotto in esso corpo, questa grandezza M non può non essere un *parametro magnetico* essenziale, che deve, come tale, intervenire nell'espressione della funzione ψ, caratteristica per il corpo nei riguardi magnetici. Ció posto, per essere il rapporto $m : M$ un numero astratto, basta formare un'espressione del tipo

$$\psi(m) = M^2 \chi\left(\frac{m}{M}\right),$$

per ottenere una classe molto generale di funzioni $\psi(m)$, soddisfacenti alla duplice condizione di contenere il parametro M e di rappresentare una quantità omogenea col quadrato d'un momento unitario (supposto che la funzione arbitraria χ sia, per sè stessa, di dimensione zero). Collo stesso tipo di funzioni si può poi, ed in infiniti modi, soddisfare anche alle altre condizioni, egualmente necessarie, che ψ si riduca alla forma $(21)_a$ per piccoli valori di m e dia luogo alla convergenza di m verso il valore limite M, quando la forza $\mathbf{F}$ cresca indefinitamente. Se si pone, per semplicità,

$$\frac{m}{M} = \theta,$$

queste ultime condizioni richiedono che sia

$$\chi(\theta) = \frac{\theta^2}{2\varkappa}, \qquad \chi'(\theta) = \frac{\theta}{\varkappa}$$

per θ infinitamente piccolo e

$$\chi'(\theta) = \infty$$

per $\theta = \pm 1$.

Una funzione semplicissima che soddisfa alle due condizioni per $\chi'(\theta)$ è

$$\chi'(\theta) = \frac{\theta}{\varkappa\sqrt{1-\theta^2}},$$

donde, integrando e determinando la costante in modo da soddisfare alla

condizione per $\chi(\theta)$, si deduce:

$$\chi(\theta) = \frac{1 - \sqrt{1 - \theta^2}}{\varkappa}$$

e conseguentemente

$$(21)_c \qquad \psi(m) = \frac{M(M - \sqrt{M^2 - m^2})}{\varkappa}$$

(radicale positivo). La relazione fra il momento m e la forza $\mathbf{F}$ è, per tale funzione,

$$(21)_d \qquad \mathbf{F} = \frac{Mm}{\varkappa\sqrt{M^2 - m^2}}, \quad \text{ovvero} \quad m = \frac{\varkappa M \mathbf{F}}{\sqrt{M^2 + \varkappa^2 \mathbf{F}^2}},$$

ossia ancora, in forma razionale,

$$\frac{1}{m^2} = \frac{1}{\mathbf{m}^2} + \frac{1}{M^2},$$

dove $\mathbf{m}(= \varkappa \mathbf{F})$ designa il valore che spetterebbe al momento magnetico, nell'ordinaria ipotesi quadratica.

Questa determinazione speciale (certamente in parte arbitraria) della funzione $\psi(m)$ s'accorda coi risultati delle considerazioni, di diversissima natura, esposte da Kirchhoff nell'Appendice alla celebre Memoria del 1853 *Ueber den inducirten Magnetismus* etc., dove peró non é data veruna indicazione concreta circa la natura della funzione ivi indicata con $F(u)$ (*). Questa funzione riceverebbe qui l'espressione

$$F(u) = \frac{M\varkappa}{\sqrt{M^2 + \varkappa^2 u^2}},$$

dove la costante M corrisponde a quella che Kirchhoff denota invece con K. Nel citato passo (*Gesammelte Abhandlungen*, p. 221) Kirchhoff riporta i risultati numerici di 14 esperienze di Weber, donde si possono ricavare i valori delle attuali costanti M e $\varkappa$ col metodo dei minimi qua-

(*) La quale non è altro che la funzione k della Nota precedente, espressa per $\mathbf{F}$ (cioè, presso Kirchhoff, per u) anzichè per m.

drati. Un valoroso cultore e promotore di questo metodo, l'egregio Professore P. Pizzetti, ha avuto la compiacenza, della quale gli sono riconoscentissimo, d'eseguire i calcoli necessarii all'uopo, ed ha trovato i valori seguenti:

$$M = 13135,2 \pm 203,9\,, \qquad \varkappa = 29,0369 \pm 0,55\,,$$

dove i numeri che seguono il segno $\pm$ rappresentano l'error medio gaussiano. Con tali valori di M e $\varkappa$ gli errori residui di $F(u)$ non eccedono 0,7.

18. Passando ora a considerare le distribuzioni polari di superficie (§ 1) conviene prendere in esame l'integrale:

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial a} l_a + \frac{\partial U}{\partial b} l_b + \frac{\partial U}{\partial c} l_c \right) d\sigma\,,$$

dove U è funzione continua e finita nei punti (a, b, c) della superficie σ.

Riferita questa superficie ad un sistema di coordinate curvilinee p, q, talché il quadrato dell'elemento lineare prenda la nota forma

$$ds^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2\,,$$

si ponga (*):

$$(22) \qquad \begin{cases} l_a = l_n \dfrac{\partial a}{\partial n} + \lambda_p \dfrac{\partial a}{\partial p} + \lambda_q \dfrac{\partial a}{\partial q}\,, \\[2ex] l_b = l_n \dfrac{\partial b}{\partial n} + \lambda_p \dfrac{\partial b}{\partial p} + \lambda_q \dfrac{\partial b}{\partial q}\,, \\[2ex] l_c = l_n \dfrac{\partial c}{\partial n} + \lambda_p \dfrac{\partial c}{\partial p} + \lambda_q \dfrac{\partial c}{\partial q}\,, \end{cases}$$

dove l_n è la componente del momento l secondo la normale n alla superficie, mentre $\lambda_p\sqrt{E}$ e $\lambda_q\sqrt{G}$ sono le componenti tangenziali (oblique) del medesimo momento nei sensi in cui crescono i parametri p e q, rispettivamente. La direzione n s'intende scelta in modo che la rotazione $(<\pi)$ da p verso q si faccia, intorno ad n, nello stesso verso di quella da x verso y, intorno all'asse delle z. Sostituendo nel proposto integrale i pre-

(*) Sono da confrontarsi, per le cose che seguono, le due Note del 1883 *Sulla teoria degli strati magnetici* e *Sull'equivalenza delle distribuzioni magnetiche e galvaniche*, nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo.

cedenti valori di l_a, l_b, l_c, si trova ch'esso è equivalente all'espressione

$$\int \frac{\partial U}{\partial n} l_n d\sigma + \int \left(\frac{\partial U}{\partial p} \lambda_p + \frac{\partial U}{\partial q} \lambda_q \right) d\sigma .$$

Si rammentino ora le formole di trasformazione:

$$\int \frac{\partial \chi}{\partial p} \frac{d\sigma}{H} = -\int \left(E \frac{\partial p}{\partial v} + F \frac{\partial q}{\partial v} \right) \frac{\chi ds}{H} ,$$
$$(H = \sqrt{EG - F^2})$$
$$\int \frac{\partial \chi}{\partial q} \frac{d\sigma}{H} = -\int \left(F \frac{\partial p}{\partial v} + G \frac{\partial q}{\partial v} \right) \frac{\chi ds}{H} ,$$

dove χ è funzione continua delle variabili p, q entro un qualunque pezzo σ di superficie, di cui s sia il contorno e v la direzione della normale interna a questo contorno, condotta tangenzialmente alla superficie. Da queste formole si ha:

$$\int \left\{ \frac{\partial (HU\lambda_p)}{\partial p} + \frac{\partial (HU\lambda_q)}{\partial q} \right\} \frac{d\sigma}{H}$$
$$= -\int U \left\{ (E\lambda_p + F\lambda_q) \frac{\partial p}{\partial v} + (F\lambda_p + G\lambda_q) \frac{\partial q}{\partial v} \right\} ds ;$$

ma dalle equazioni (22), ponendo per brevità:

$$(22)_a \qquad \begin{cases} l_p = l_a \dfrac{\partial a}{\partial p} + l_b \dfrac{\partial b}{\partial p} + l_c \dfrac{\partial c}{\partial p} , \\ l_q = l_a \dfrac{\partial a}{\partial q} + l_b \dfrac{\partial b}{\partial q} + l_c \dfrac{\partial c}{\partial q} , \end{cases}$$

risulta

$$(22)_b \qquad l_p = E\lambda_p + F\lambda_q , \qquad l_q = F\lambda_p + G\lambda_q ;$$

dunque

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial p} \lambda_p + \frac{\partial U}{\partial q} \lambda_q \right) d\sigma + \int [\lambda] U d\sigma + \int U l_v ds = 0 ,$$

dove l_v è la componente del momento l secondo la direzione v e dove simbolo $[\lambda]$ rappresenta l'espressione:

$$(22)_c \qquad [\lambda] = \frac{1}{H} \left\{ \frac{\partial (H\lambda_p)}{\partial p} + \frac{\partial (H\lambda_q)}{\partial q} \right\} ,$$

la quale si può scrivere anche così:

$$(22)_b \qquad [\lambda] = \frac{1}{H}\left\{\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{Gl_p - Fl_q}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{El_q - Fl_p}{H}\right)\right\}.$$

Per tal modo si ottiene definitivamente:

$$(23) \qquad \int\left(\frac{\partial U}{\partial a} l_a + \frac{\partial U}{\partial b} l_b + \frac{\partial U}{\partial c} l_c\right) d\sigma = \int \frac{\partial U}{\partial n} l_n d\sigma + \int U h d\sigma + \int U g ds,$$

dove

$$(23)_a \qquad h = -[\lambda], \quad g = -(l_\nu + l_{\nu'}),$$

ν e ν' essendo le due opposte normali in ogni punto d'una *linea di discontinuità* della superficie σ, cioè d'ogni linea s lungo la quale il momento l sia discontinuo. Fra queste linee s s'intendono comprese anche le *linee terminali*, quando esistono, e per esse si deve prendere per ν la normale *interna*, ponendo $l_{\nu'} = 0$, cioè $g = -l_\nu$.

L'equazione (23) può essere considerata come analoga alla (2) del § 2.

Supponendo (x, y, z) punto esterno alla superficie e ponendo

$$U = \frac{1}{r},$$

si ottiene di qui la funzione potenziale V della distribuzione polare di superficie sotto la doppia forma:

$$(24) \qquad V = \int\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} l_a + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} l_b + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} l_c\right) d\sigma,$$

$$(24)_a \qquad V = \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} l_n d\sigma + \int \frac{h d\sigma}{r} + \int \frac{g ds}{r}.$$

La seconda di queste due espressioni di V non presenta lo stesso carattere dell'analoga $(3)_a$, relativa ad una distribuzione in tre dimensioni: essa non appartiene, cioè, come quest'ultima, ad un'ordinaria funzione potenziale newtoniana. Il primo dei suoi tre termini appartiene invece allo

stesso tipo dell'altra espressione (24), giacché esso può scriversi così:

$$\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}l_n\frac{\partial a}{\partial n}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b}l_n\frac{\partial b}{\partial n}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}l_n\frac{\partial c}{\partial n}\right)d\sigma\,;$$

presentando però l'importante particolarità che la polarizzazione l_n è dovunque diretta *normalmente* alla superficie.

Le funzioni potenziali di questo tipo speciale, dette di *doppio strato*, hanno proprietà notissime, dalle quali scaturiscono per V le due equazioni generali:

$$(24)_b \qquad V_n - V_{n'} = 4\pi l_n\,, \qquad \frac{\partial V}{\partial n}+\frac{\partial V}{\partial n'} = -4\pi h\,.$$

Tali funzioni, che pur si presentano spontaneamente nella dottrina classica del potenziale newtoniano (per esempio nel teorema di Green), debbono riguardarsi come irreducibili, in senso proprio, colle funzioni potenziali ordinarie. La riducibilità a queste ultime funzioni ha luogo invece, come risulta dalla stessa espressione $(24)_a$, per le distribuzioni superficiali a polarizzazione *tangenziale*, cioè per quelle in cui è dovunque $l_n = 0$. Per queste sole, o per la sola *parte tangenziale* d'una distribuzione qualunque, ha luogo produzione di *magnetismo libero*, colla densità superficiale h in ogni punto di σ e colla densità lineare g in ogni punto di s.

Ponendo nell'equazione (23) $U = 1$, si ottiene:

$$(24)_c \qquad \int h d\sigma + \int g ds = 0\,,$$

equazione che contiene il teorema analogo a (4). Ponendo invece successivamente $U = a, b, c$, si ottiene:

$$\int l_a d\sigma = \int l_n \frac{\partial a}{\partial n} d\sigma + \int a h d\sigma + \int a g ds\,,$$

$$\int l_b d\sigma = \int l_n \frac{\partial b}{\partial n} d\sigma + \int b h d\sigma + \int b g ds\,,$$

$$\int l_c d\sigma = \int l_n \frac{\partial c}{\partial n} d\sigma + \int c h d\sigma + \int c g ds\,,$$

equazioni che fanno riscontro alle (5), ma nei secondi membri delle quali figura un termine di più, dovuto alla polarizzazione normale irreducibile l_n.

Se ad U si attribuisce, nella formola (23), il significato di funzione

potenziale magnetica d'un sistema non avente punti comuni colla superficie σ, i due membri di quella formola devono considerarsi come espressioni equivalenti del potenziale mutuo di questo sistema esterno e della distribuzione magnetica superficiale. Ma la completa discussione delle varie forme sotto cui questo potenziale mutuo può presentarsi, in circostanze più generali, non si potrebbe opportunamente svolgere senza invocare le formole dell'Elettromagnetismo: epperò giova restringere alle poche deduzioni precedenti ciò che qui importava di dire intorno alle distribuzioni magnetiche di superficie. Queste deduzioni contengono già, in particolare, le formole necessarie alla dimostrazione dell'equivalenza d'ogni distribuzione magnetica ad una distribuzione di correnti chiuse (*).

(*) Veggasi la citata Nota *Sull'equivalenza* etc.

RISULTATO

DI

ESPERIENZE IDROMETRICHE

SOPRA TUBI ADDIZIONALI CONICI DIVERGENTI

MEMORIA IV.

del Prof. CESARE RAZZABONI

(Letta nella Sessione delli 22 Marzo 1891).

Sopra l' argomento onde si intitola la presente memoria ho avuto l' onore di presentarne altre tre, la 1ª nel 1886 e le altre due negli anni 1889-90. Nella prima esaminai i fenomeni principali relativi alla velocità, alla portata ed alla pressione, presentati nello sperimentare una serie limitata di tubi conici divergenti continui e discontinui, e nelle altre due, studiando moltissime esperienze su di una serie assai più estesa e variata di tubi e di carichi di efflusso, circoscrissi le relative indagini alla ricerca di una formola empirica della portata, la quale potesse fornire risultamenti più prossimi al vero e quindi più attendibili di quelli che sono somministrati dall' impiego delle formole teoriche ancora in uso, e dipendenti dalla ipotesi del moto lineare dei liquidi.

La predetta formula empirica nella sua composizione fa dipendere la portata dal carico d' efflusso dalla forma e dimensioni del tubo, e riuscì, come era naturale il supporre, una funzione del carico, dal diametro interno all' origine del tubo, della sua lunghezza, e dell' angolo di divergenza da 0° fino a quello in cui la pressione diventa negativa. Tale formola che, come si disse, è assai approssimata vuolsi sempre adoperare ogni volta che si richieggono risultati della maggior precisione; ma quando nelle misure delle portate non si cerca tanta esattezza può tornare utile ed opportuno, come negli altri, di poter disporre di qualche altra formola più semplice ed è questo precisamente uno degli scopi della presente memoria. La quale ha di più per oggetto una indagine più estesa è più accurata che sin qui siasi fatta relativamente alle velocità effettive di efflusso; argo-

mento questo appena discusso nella 1.ª memoria del 1886, e che ora puossi affrontare con maggiore fiducia in vista delle molte esperienze che all'uopo sonosi istituite. Anche in questa circostanza ho potuto valermi efficacemente dell'apparecchio idraulico del gabinetto di questa R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri, e valermi di più della numerosa serie di 32 tubi divergenti continui, metà coi diametri interni di $0^m,012$ e l'altra metà di $0^m,015$, colle lunghezze variabili secondo le tre misure di $0^m,030$, $0^m,070$, $0^m,108$, e cogli angoli divergenti delle quattro seguenti grandezze

0°. 0'. 0"
1°.41'.47"
3°.23'.34"
5°. 5'.21"

il tutto come si vede disposto nelle prime colonne della tabella *A* unita, nella quale sono inoltre registrate le misure di velocità e di portata effettive a seconda dei carichi di $3^m,195$, $2^m,195$, $1^m,195$, che sono quelli stessi di cui si è sempre disposto in tutti questi generi di esperienze.

Limitando intanto le ricerche sulle velocità effettive, e sul loro confronto colle teoriche, e premettendo che la misura delle prime si è ottenuta col mezzo delle parabole dei getti, e le seconde col mezzo della formola

$$(1) \; \ldots\ldots \qquad v = \sqrt{2ga}$$

dove a è il carico, si è potuto stabilire

1° che le velocità effettive sono sempre minori delle corrispondenti teoriche.

2° che esse diminuiscono col crescere della lunghezza del tubo, e dell'angolo di divergenza.

3° che in tutti i casi desse sono sempre come le radici seconde dei carichi.

Considerando ora che all'aumento di lunghezza del tubo e dell'angolo di divergenza conseguita una diminuzione sensibilissima della velocità ed un aumento nella sezione di efflusso si è cercato se mai fra questo aumento e quella diminuzione vi fosse entro limiti tollerabili un compenso tale da poter ritenere costante il rapporto fra la portata effettiva ed il prodotto della corrispondente velocità per la sezione d'efflusso, e questo si è effet-

tivamente riscontrato sussistere in tutte le esperienze, che avrebbero condotto a prendere per valor medio di tale rapporto 0,9. Detta quindi Q' la portata effettiva, Q'' quella dedotta mediante il rapporto 0,9, ω la sezione di efflusso del tubo, e v' la velocità effettiva, ne verrà che in base alle considerazioni precedenti la portata effettiva Q' potrà ottenersi dalla

$$(2) \ldots\ldots \qquad Q'' = 0{,}9\omega' v'$$

la quale formola salvo la riduzione del coefficiente stabilisce fra la portata effettiva la velocità pure effettiva, e la sezione d'efflusso una relazione analoga a quella che è somministrata dalla formola con cui per mezzo della velocità teorica e della sezione d'efflusso si calcola la portata effettiva.

La formola (2) come si disse è meno approssimata di quella che si inserì nella III.ª memoria sui tubi divergenti, e che ora qui si riporta nella

$$(3) \ldots\ldots \qquad Q = 7{,}80\,(1 + 4 \operatorname{tang} \theta)\, d^2 \sqrt{a\sqrt{l}}$$

a essendo il carico, d il diametro interno del tubo, l la sua lunghezza, e θ l'angolo di divergenza: però come si disse in molti casi può sostituirla, e questo rimane comprovato dalle diverse percentuali determinate per ogni portata del rapporto $\frac{Q' - Q''}{Q'}$ inserito nella tabella. Il quale rapporto mentre mostra che le portate calcolate colla (2) sono meno approssimate di quelle ottenibili dalla (3) mostra ancora che quelle fornite colle (2) sono sempre più esatte delle corrispondenti teoriche.

Dalla (2) si ottiene

$$v' = \frac{Q'}{0{,}9\omega'}$$

e se per Q' si sostituisce il valore di Q somministrato dalla (3) si ricava

$$(4) \ldots\ldots \qquad v' = \frac{8{,}66\,(1 + 4 \operatorname{tang} \theta)\, d^2 \sqrt{a\sqrt{l}}}{\omega'}$$

la quale mediante il carico, e le dimensioni del tubo darà la velocità d'efflusso con molta approssimazione, che potrà servire ad aumentare per quella della portata calcolabile colla (2)

Il coefficiente 0,9 attribuito al prodotto $\omega' v'$ della (2) è il medio di tutte

le esperienze eseguite coi tubi suindicati, e quindi può produrre risultamenti ora maggiori ed ora minori del vero; le aberrazioni però non sono così grandi da non potere prescindervi in via ordinaria. Quando però si vogliano risultati anco più prossimi al vero allora gioverà riflettere, che la lunghezza del tubo avendo una grande influenza sulla velocità, non sarà inutile su questo proposito il fare qualche ulteriore indagine. E queste hanno condotto a stabilire, che se il coefficiente 0,9 in via generale è soddisfacente, e meglio però

prendere il	0,97	pei tubi che hanno	una lunghezza fra	2 e 3	diam.	interni
»	0,92	»	»	4 e 6	»	»
»	0,85	»	»	7 e 9	»	»

Questa conclusione ha una grande importanza, e fa vedere la grande influenza dovuta alla lunghezza dei tubi, e quanto sia utile che queste non superino li tre diametri della sezione d' origine; i getti riescono più uniti, e le velocità effettive poco diverse dalle teoriche.

Intanto in corrispondenza di questi speciali risultati la (2) sarà sostituita.

$$(5)\begin{cases} \text{dalla } Q' = 0{,}97\,\omega' v' & \text{pei tubi di lunghezza } l \text{ fra 2 e 3 diam. interni} \\ \quad » \quad Q' = 0{,}92\,\omega' v' & \quad » \qquad l \quad 4 \text{ e } 6 \quad » \quad » \\ \quad » \quad Q' = 0{,}85\,\omega' v' & \quad » \qquad l \quad 7 \text{ e } 9 \quad » \quad » \end{cases}$$

Queste formole (5) per altra via vengono a confermare la differenza nelle portate prodotta dall' aumento nella divergenza e nella lunghezza dei tubi, e nello stesso tempo mostrano le condizioni per le quali i coefficienti delle portate dedotte dalla (2) e dalla (5) tendano verso l' unità, e vi si approssimino sensibilmente e naturalmente a misura che il rapporto fra la lunghezza del tubo ed il suo diametro all' origine si avvicina e raggiunge il numero 2., cioè si avvicina a quelle dimensioni nelle quali i tubi cominciano a risguardarsi per addizionali.

Le osservazioni e deduzioni fatte in questa memoria, e quelle corrispondenti inserite nella memoria III completano quanto si riferisce allo studio delle velocità e delle portate effettive nei tubi conici divergenti. Ora all' esaurimento della materia manca un esame più esteso del modo con cui variano le pressioni nell' interno dei tubi tanto considerate in loro stesse, che relativamente ai dati teorici; e questo che pel momento non può occuparmi, perché al riguardo occorrono speciali apparecchi di misura,

e forse un nuovo materiale scientifico, mi riserbo di trattarlo in altra analoga circostanza, e riferirne di nuovo alla Accademia. Termino intanto il presente lavoro coll'unirvi la seguente tabella *A* contenente le indicazioni relative alla forma e alle dimensioni del tubo, alle velocità teoriche ed effettive, nonché alle portate effettive ed empiriche dedotte dalla formola (2) corrispondentemente ai tre carichi suaccennati 3^m,195, 2^m,195, 1^m,195.

Tabella A.

Dimensioni del tubo			Angolo di divergenza	Area della luce d'efflusso	Carico 3,195					Carico 2,195					Carico 1,195				
Lunghezza	Diametro				Velocità		Portata		Differenza percentuale	Velocità		Portata		Differenza percentuale	Velocità		Portata		Differenza percentuale
	Interno	Esterno			Teorica	Effettiva	Effettiva	Dedotta		Teorica	Effettiva	Effettiva	Dedotta		Teorica	Effettiva	Effettiva	Dedotta	
l	d	d'	θ	ω	v	v'	Q'	Q''		v	v'	Q'	Q''		v	v'	Q'	Q''	
30	12	14,67	5°, 5', 21"	0,000169252	7,9170	7,2196	1,1643	1,0997	+ 0,055484	6,5621	6,0680	0,9700	0,9243	+ 0,047114	4,8418	4,4292	0,7110	0,6746	+ 0, 05120
»	»	13,78	3°, 23', 34"	0,000149138	»	7,5739	1,0773	1,0166	+ 0,056354	»	5,7136	0,8860	0,7669	+ 0,134420	»	4,6949	0,6530	0,6302	+ 0, 03491
»	»	12,89	1°, 41', 47"	0,000130495	»	7,5296	0,9313	0,8843	+ 0,050435	»	6,0236	0,7750	0,7408	+ 0,044120	»	4,8278	0,5690	0,5670	+ 0, 00351
»	»	12,00	0°, 0', 0"	0,000113097	»	7,5739	0,8353	0,7709	+ 0,077062	»	6,0236	0,6933	0,6420	+ 0,073994	»	4,5664	0,5106	0,4648	+ 0, 08970
30	15	17,67	5°, 5', 21"	0,000245502	7,9170	7,2196	1,7687	1,5952	+ 0,098095	6,5621	6,0680	1,4616	1,3407	+ 0,082712	4,8418	4,4735	1,0757	0,9976	+ 0, 07261
»	»	16,78	3°, 23', 34"	0,000221143	»	7,5739	1,6193	1,5074	+ 0,069104	»	5,8465	1,3413	1,1636	+ 0,132448	»	4,7835	0,9853	0,9520	+ 0, 03380
»	»	15,89	1°, 41', 47"	0,000198306	»	7,4410	1,4243	1,3280	+ 0,067612	»	5,9351	1,1853	1,0593	+ 0,106300	»	4,7835	0,8690	0,8537	+ 0, 01761
»	»	15,00	0°, 0', 0"	0,000176715	»	7,5739	1,3053	1,2046	+ 0,077147	»	5,7579	1,0856	0,9157	+ 0,156500	»	4,8278	0,8000	0,7678	+ 0, 04020
70	12	18,20	5°, 5', 21"	0,000260155	7,9170	6,4534	1,4970	1,5110	— 0,009352	6,5621	5,3150	1,2297	1,2445	— 0,012035	4,8418	3,8534	0,8973	0,9022	— 0, 00546
»	»	16,15	3°, 23', 34"	0,000204849	»	6,8652	1,3136	1,2657	+ 0,036465	»	5,3150	1,0836	0,9799	+ 0,095699	»	4,2520	0,7890	0,7839	+ 0, 00646
»	»	14,07	1°, 41', 47"	0,000155481	»	7,0866	1,0237	0,9916	+ 0,031367	»	5,7579	0,8480	0,8057	+ 0,049882	»	4,6063	0,6213	0,6446	— 0, 03750
»	»	22,00	0°, 0', 0"	0,000113097	»	7,3745	0,8088	0,7506	+ 0,071958	»	5,8465	0,6703	0,5951	+ 0,119300	»	4,7392	0,4917	0,4824	+ 0, 01891
70	15	21,20	5°, 5', 21"	0,000352989	7,9170	6,6565	2,0116	2,1147	— 0,051253	6,5621	5,5808	1,6990	1,7730	— 0,043550	4,8418	4,0748	1,2687	1,2945	— 0, 02034
»	»	19,15	3°, 23', 34"	0,000288024	»	7,1752	1,8966	1,8600	+ 0,019298	»	5,6693	1,5716	1,4696	+ 0,064900	»	4,4292	1,1513	1,1481	— 0, 00278
»	»	17,07	1°, 41', 47"	0,000228853	»	7,1974	1,5417	1,4824	+ 0,038464	»	5,8022	1,2803	1,1923	+ 0,068730	»	4,6506	0,9357	0,9578	— 0, 02362
»	»	15,00	0°, 0', 0"	0,000176715	»	7,3081	1,2737	1,1623	+ 0,087462	»	5,7579	1,0563	0,9157	+ 0,133100	»	5,1821	0,7753	0,8242	— 0, 06307
108	12	21,60	5°, 5', 21"	0,000366435	7,9170	5,7427	1,6230	1,8938	— 0,016685	6,5621	4,8721	1,3350	1,6068	— 0,203590	4,8418	3,3663	0,9703	1,0101	— 0, 04102
»	»	18,40	3°, 23', 34"	0,000265904	»	6,2008	1,4953	1,4839	+ 0,007623	»	4,9152	1,2230	1,1766	— 0,037940	»	3,8534	0,8966	0,9222	— 0, 02855
»	»	15,20	1°, 41', 47"	0,000181458	»	6,7545	1,1070	1,1031	+ 0,003523	»	5,4922	0,9170	0,8969	+ 0,021920	»	4,7392	0,6687	0,7739	— 0, 15732
»	»	12,00	0°, 0', 0"	0,000113097	»	7,5474	0,7876	0,7641	+ 0,029748	»	5,6693	0,6510	0,5770	+ 0,113670	»	4,6506	0,4770	0,4734	+ 0, 00755
108	15	24,60	5°, 5', 21"	0,000475292	7,9170	6,0681	2,4300	2,5950	— 0,068189	6,5621	5,1378	2,0116	2,1978	— 0,092560	4,8418	3,6319	1,4707	1,1554	+ 0, 21438
»	»	21,40	3°, 23', 34"	0,000359681	»	6,5954	2,1460	2,1363	+ 0,004520	»	5,2707	1,7806	1,7062	+ 0,041780	»	4,0748	1,2857	1,3191	— 0, 02598
»	»	18,20	1°, 41', 47"	0,000260155	»	6,8652	1,6350	1,6074	+ 0,016881	»	5,5364	1,3607	1,2963	+ 0,047820	»	4,4292	0,9880	1,0370	— 0, 04960
»	»	15,00	0°, 0', 0"	0,000176715	»	7,1752	1,2473	1,1412	+ 0,085064	»	5,8465	1,0340	0,9298	+ 0,100740	»	5,0492	0,7587	0,8030	— 0, 05839

DELLE INOCULAZIONI PRESERVATIVE

CONTRO

IL CARBONCHIO ENFISEMATOSO

E DI UNA RECETTIVITÀ ECCESSIVA PEL VIRUS DEL MEDESIMO

RISCONTRATA IN UNA RAZZA DI BOVINI

MEMORIA

DEL PROF. ALFREDO GOTTI

(Letta nella Sessione del 12 Aprile 1891).

È noto che gl' illustri Arloing, Cornevin e Thomas di Lione, dopo una lunghissima serie di pazienti e ingegnose ricerche sulla natura e proprietà del virus del Carbonchio enfisematoso, riescirono nel 1882 mediante l' azione disgenetica di elevate temperature, a mitigare l' intensità della virulenza del microrganismo del Carbonchio enfisematoso, ad ottenerne attenuazioni a *gradi fissi* e a servirsene, inoculato a bovini sani, a conferir loro un grado *solido* di immunità contro una consecutiva inoculazione, con virus conservante tutta la sua naturale letalità.

Questi sperimenti dal laboratorio portati nel campo pratico ed applicati a un numero notevole di bovini, furono seguiti da risultati assai buoni, specialmente applicati in quelle parti del territorio francese dove il Carbonchio enfisematoso vi esisteva da molti anni enzootico e vi produceva danni gravi all' agricoltura; poichè veterinari e agricoltori sono unanimi nell' ammettere che tutti o quasi i bovini giovani che vengono attaccati da questo terribile morbo, ne soccombono in un periodo di tempo assai breve (2 a 5 giorni in generale).

Naturalmente appena furono pubblicati i risultati di questa importante applicazione pratica contro una così fatale malattia dei bovini, in parecchie parti d' Europa dove si avevano a lamentare da anni notevolissime perdite annuali pel Carbonchio enfisematoso, si vollero ripetere le prove delle inoculazioni preservative col metodo degli sperimentatori francesi e ciò tanto più che e per la natura della infezione e pel corso rapidissimo che segue il morbo, dei molti e svariati metodi di cura tentati contro di esso, per consentimento generale, nessuno si mostrò fin ad ora atto a guarirlo.

Delle molte sperimentazioni fatte in diversi paesi, fra le più importanti vanno notate quelle eseguite in Svizzera, in Austria e in Prussia (1) perchè si inocularono bovini giovani a molte migliaia e gli effetti delle inoculazioni furono seguiti con molta diligenza e rigore di metodo.

Si sa che nelle montagne di molti Cantoni Svizzeri e in parecchie plaghe montuose dell' Austria e della Prussia all' epoca che le mandre di bovini vi sono lasciate a pascolare, si verificano fra questi frequentissimi casi di Carbonchio enfisematoso, talmentecchè Strebel nel 1884 calcolò che la sola Svizzera soffriva una perdita annuale di 2,500 capi per questa malattia.

Ora tenuti a lungo sugli stessi pascoli i giovani bovini inoculati (dopo averli marcati) in unione con altri non stati sottoposti alla pratica dell'inoculazione si è, specialmente in Svizzera e in Austria, per parecchi anni di seguito verificato che fra questi ultimi la mortalità per Carbonchio enfisematoso si manteneva alta come al solito, mentrecchè negli inoculati era mite.

Basandoci sopra le importanti relazioni di Strebel, si può calcolare che più che 50 mila bovini giovani furono in tre anni di seguito sottoposti alle inoculazioni nei tre paesi disopra citati e che da tutto l' assieme dei fatti osservati si può tenere come assicurato, che la cifra delle perdite per carbonchio enfisematoso fra i bovini giovani non inoculati, è stata almeno cinque volte più grande che fra i vaccinati, tenuti negli stessi pascoli.

Ma un fatto degno di attenzione per la sua importanza è quello che, per l'applicazione delle inoculazioni sopra un così grande numero di bovini giovani le perdite di animali furono nulle o minime (1 per 1000) ogniqualvolta venivano seguite con rigore le norme suggerite dagli sperimentatori francesi. Ciò è tanto più notevole inquantocchè si sa che nella pratica delle cosidette vaccinazioni pel Carbonchio *ematico*, anche dopo i reali perfezionamenti raggiunti nel metodo di preparazione dei virus attenuati, si verificarono parecchie volte perdite percentuali sensibili, specialmente quando vennero inoculate numerose mandre di pecore.

Sperimentazioni di inocolazioni preventive contro il Carbonchio enfise-

---

(1) Strebel — Resultat des inoculations preventives du Charbon bacterien au syntomatique pratiquèes en Suisse en 1884.
Journal de Méd. Vèt. ecc. Lyon 1884, pag. 617.

Idem. — Resultat des inoculations preventives contre le Charbon syntomatique faites en 1886 en Suisse, en Autriche et en Prusse.
Journal de Méd. Vét. ecc. Lyon 1887, pag. 576.

Idem. — Rapport à la Direction de l' Interieur du Canton de Friburg sur la vaccination contre le Charbon syntomatique.
Journal de Méd. Vét. ecc. Lyon 1889, pag. 119.

Idem. — Resultat de la vaccination contre le Charbon syntomatique faite en Suisse, en Autriche et en Prusse en 1887.
Journal de Méd. Véd. Lyon 1889.

matoso ebbi io pure a praticarne sopra un limitato numero di bovini giovani della provincia nel 1884 con virus attenuati preparati da me e dei risultati buoni ottenuti ne resi conto l' anno dopo a questa Accademia in una Memoria col titolo: Il Carbonchio sintomatico dei Bovini (1).

In seguito, mercè soccorsi avuti dal Ministero d'Agricoltura, potei pure ripetere sopra un numero maggiore di giovani bovini della nostra razza, le inoculazioni con virus attenuati avuti direttamente dal prof. Arloing e con virus preparati da me. Ed anche questa seconda prova ebbe un buon risultato. Anzi essendomi stato possibile di tenere a lungo in osservazione alcuni dei giovani bovini inoculati, ebbi opportunità di ripetere, ad intervalli di tempo diversi, sopra di questi alcune prove sulla durata della immunità negli inoculati.

Dopo d' allora non mi si presentarono più circostanze favorevoli di sperimentare sopra bovini, quando nel 1890, per iniziativa dell' egregio Collega Dott. Battistini, il Comizio Agrario di Rimini venne nella determinazione di far eseguire, in modeste proporzioni, un esperimento pubblico di inoculazioni preservative contro il Carbonchio sintomatico.

Nella Provincia di Forlì in una estesa zona di territorio comprendente diversi comuni e fra questi S. Arcangelo, Savignano e Rimini, il Carbonchio sintomatico vi esiste da tempo antichissimo ed in alcuni anni vi produce una mortalità notevolissima di giovani bovini.

Il Comizio Agrario di Rimini, prendendo l' iniziativa di fare sperimenti di inoculazioni preventive, si prefigeva quindi il nobile intento di tentare che questa pratica fosse adottata dai proprietari di bestiame, affine di rendere meno gravi i danni che hanno così frequentemente a soffrire per la malattia dominante.

Fattami la proposta di dirigere l' esperimento delle inoculazioni sopra alcuni giovani bovini di quella razza romagnola, mi vi prestai volentieri: poichè basandomi sui risultati dei due sperimenti da me praticati alcuni anni prima, mi pareva che anche in questo caso tutto avrebbe dovuto procedere regolarmente e in modo da rendere persuasi gl' interessati nell' applicazione del metodo, dell' utilità sua.

Furono messi a disposizione mia e dell' egregio collega Dott. Battistini, che mi coadiuvò efficacemente in tutto, otto vitelli di un anno d' età o poco più, della razza del paese. Quantunque non rappresentassero i tipi più distinti di questa razza assai apprezzata nel commercio, pure erano di bella costituzione e sani. Solo impressionava alquanto, dirò così, la raffinatezza e delicatezza loro.

---

(1) Memorie della R. Accademia delle Scienze, ecc. Serie IV, Tomo VI, 1885.

I virus attenuati erano stati chiesti dal Comizio Agrario di Rimini direttamente al prof. Arloing, che con gentilezza squisita li aveva gratuitamente concessi.

Le due inoculazioni vennero praticate sopra sei vitelli in due sedute pubbliche successive, alla distanza di otto giorni l' una dall' altra.

Tutto procedette regolarmente durante le inoculazioni e dopo non si ebbero ad avvertire nè reazioni febbrili esagerate, nè alcun altro sintomo allarmante.

Lasciati trascorrere altri otto giorni dopo l' ultima inoculazione ci determinammo a provare la resistenza degli inoculati contro il virus forte del *Carbonchio enfisematico.*

Usai di un virus secco, preparato da me poco tempo prima con un pezzetto di tumore muscolare di bue morto di Carbonchio sintomatico e inviatomi dal dott. Farina di S. Arcangelo.

Questo virus era stato allestito con scrupolosa cura e per maggior cautela lasciato esposto per 24 ore all' azione dei vapori di acido solforoso che, come Arloing e Cornevin dimostrarono fin dal 1882, distrugge la virulenza dei germi della setticemia cadaverica, che accidentalmente vi potessero essere mescolati, ma rispetta quella dei germi del carbonchio enfisematoso.

Inoltre questo virus era stato da me provato e avevo costatato che scioltone una minima quantità in un poco d' acqua, cinque goccie di questa emulsione inoculate sotto la pelle di una cobaja adulta la uccideva per Carbonchio sintomatico in circa 26 ore, mentrecchè la stessa quantità inoculata pure sotto la pelle di un coniglio non produceva in questo la morte, nè alcun disturbo notevole.

L' inoculazione di prova fu fatta sopra tre vitelli inoculati e due non inoculati.

Ognuno ricevette sotto la pelle *due goccie* di una soluzione diluitissima fatta con piccola quantità di virus secco ed acqua distillata e bollita.

Tutti cinque i vitelli morirono di Carbonchio enfisematoso violentissimo.

Un risultato così disastroso e così contrario a quanto avevo ottenuto altre due volte esperimentando sopra i bovini giovini della mia provincia, mi colpì così profondamente, che a tutta prima non mi fu possibile di trovare la calma necessaria per ricercare la vera causa di questo completo insucesso.

Dopo pochi giorni però a mente più calma cominciai a considerare una per una le diverse fasi dell' esperimento eseguito e quantunque non ne risultasse fatto alcuno attribuibile ad incuria mia o ad errore commesso, decisi di ricercare per via sperimentale quale potesse essere stata la causa di un così completo insucesso. Queste ricerche mi sentivo in dovere di farle non solo per corrispondere con tutta lealtà alla piena fiducia che in me avevano

avuto gli onorevoli membri del Comizio Agrario di Rimini, ma ancora pel fatto che, qualunque ne fosse stato il risultato, io avrei ricavato da queste un utile ammaestramento per l' avvenire e avrei potuto guardarmi in seguito dal cadere nello stesso errore, se errore per mia parte vi era stato.

È appunto questo lavoro sperimentale che forma il soggetto della presente Memoria.

Dopo matura riflessione mi persuasi che l' insucesso avuto poteva dipendere da una delle tre seguenti cagioni e cioè: o 1° che il virus forte del carbonchio enfisematoso fosse alterato; o che 2° i virus attenuati impiegati per le inoculazioni avessero perduta una parte della loro attività; o che infine 3° la razza dei bovini sui quali avevo sperimentato, avesse una *recettività* pel virus del carbonchio enfisematoso più grande di quella che avevo constatato per due volte nei giovani bovini della mia provincia.

I.

A mettere in chiaro la cosa procedetti con questo stesso ordine nelle mie ricerche e prima di tutto fissai la mia attenzione sul virus che avevo adoperato negli sperimenti di Rimini. E quantunque, come dissi più sopra, prima di essere colà usato, questo virus fosse già stato in antecedenza provato nella cavia e nel coniglio e che in questo non avesse prodotto effetto nocivo, il che sarebbe una prova evidente della sua purezza, pur non ostante lo sperimentai di nuovo.

Il 20 Marzo 1890 sciolgo in un piccolo mortajo di vetro sterilizzato una piccola quantità del virus secco dell' enfisema carbonchioso, di cui mi ero servito a Rimini, in un poco di acqua pure sterilizzata e ne inoculo cinque goccie sotto la pelle del dorso di un coniglio e la stessa quantità sotto la pelle della coscia di una grossa cavia maschio.

La cavia è morta verso le 9 ore antim. del giorno dopo con enorme tumore crepitante alla coscia.

Ne seziono il cadavere e trovo tutte le caratteristiche macroscopiche nel tumore enfisematoso della coscia. L' umore siero-sanguinolento e la polpa muscolare contengono in quantità il microrganismo proprio del carbonchio enfisematoso nelle sue differenti fasi di sviluppo.

Raccolta con purezza un poco di sierosità sanguinolenta dal tumore della coscia, ne inoculo sei goccie sotto la pelle del dorso di un altro coniglio.

Il 24 Marzo, sì il primo che quest' ultimo coniglio, conservano un perfetto benessere.

Potevo quindi, dopo ciò, eliminare il primo dubbio sortomi, con tutta

sicurezza, poiché ogniqualvolta questo virus fosse stato inquinato da germi della setticemia cadaverica i due conigli ne avrebbero sentita l' azione e ne sarebbero morti od almeno si sarebbero mostrati gravemente ammalati.

D' altra parte per le osservazioni di Chauveaux ed Arloing (1) i bovini sarebbero del tutto refrattari all' inoculazione del virus della *setticemia gangrenosa* che questi autori ammettono *identica* a quella *cadaverica* di Pasteur. Per cui anche a modo di supposizione ammesso, (ció che in fatto non era, come ho dimostrato) che il virus al momento che lo usai sopra i vitelli a Rimini fosse inquinato da qualche germe setticemico, da ció non ne poteva venire la morte degli inoculati.

Difatti la sezione cadaverica di questi e le ricerche microscopiche dimostrarono trattarsi di vero e solo carbonchio enfisematoso.

II.

La ricerca sulla attività o meno dei virus attenuati stati usati nell' esperimento di Rimini, mi era resa facile pel fatto che ne possedevo ancora alcune dosi in istato di conservazione perfetta.

Il 7 Aprile 9 centigrammi del primo virus francese attenuato a 100°, vengono sciolti in nove centimetri cubi di acqua sterilizzata e mediante schizetto Pravaz nuovo ne viene inoculato un centimetro cubo per ognuno, sotto la pelle della faccia interna della coscia, ai seguenti animali:

1° ad un robusto agnello di un anno d' età;

2° a sei cavie di media grandezza;

3° a due grosse cavie adulte.

Li 10 Aprile noto una lieve tumefazione con arrossamento della pelle della faccia interna della coscia in 4 delle sei cavie di media grandezza. Nelle altre due e nelle due adulte non esiste tumefazione, come pure manca alla coscia dell' agnello.

Ma per avere una prova più diretta e sicura che questo primo virus attenuato conserva ancora la necessaria attività tento le seguenti prove:

1° Li 12 Aprile, preparate due soluzioni in un cent. cubo d' acqua sterilizzata, l' una con un centigramma, l' altra con due cent. del 1° virus attenuato, le inoculo separatamente a due giovanissime cavie, di meno di un mese d' età, sotto la pelle della faccia interna di una coscia.

Il giorno seguente la piccola cavia *A* che ha ricevuta l' iniezione sottocutanea di due centigrammi di virus attenuato, presenta una notevole tumefazione della coscia, è triste e si muove zoppicando.

---

(1) Ètude expérimental sur la septicémie gangréneuse, Journal de Méd. Vet. ecc. de Lyon 1884, pag. 337.

Nell' altro porchettino *B* esiste pure tumefazione alla coscia, ma ad un grado minore e mostrasi più disinvolto.

Li 14 d., la piccola cavia *A* presenta un tumore enorme alla coscia, crepitante; è abbattutissima e muore nella notte dal 14 al 15.

Nell' altra cavia *B* la tumefazione alla coscia è in lieve aumento, e mostrasi alquanto triste, però prende cibo.

La tumefazione si mantenne stazionaria per alcuni giorni, poi diminuì a poco a poco e si riebbe del tutto.

L' esame del tumore della cavia *A* mostrò trattarsi di Carbonchio enfisematoso.

2° Li 13 Aprile sciolgo due centigrammi del 1° virus attenuato in due centimetri cubi di acqua sterilizzata e vi aggiungo due goccie di acido lattico, e inoculo la soluzione metà per ognuno a due grosse cavie maschi nei muscoli di una coscia.

L' aggiunta dell' acido lattico alla soluzione mi veniva suggerita da una importante osservazione fatta da Arloing, Cornevin et Thomas (1) confermata e più giustamente interpretata in un lavoro sperimentale da Nocard e Roux (2).

L' aggiunta di un acido o di altra sostanza irritante al virus del Carbonchio enfisematoso attenuato col calore, per le alterazioni profonde che rapidamente si formano negli elementi cellulari dalla parte in cui si fa l' inoculazione e probabilmente ancora perchè viene paralizzata l' azione dei fagociti, permette ai microrganismi virulenti, attenuati col calore del Carbonchio enfisematoso, di potersi liberamente moltiplicare quasi nel modo stesso che avverrebbe se fossero coltivati in mezzo nutritivo artificiale; per cui in allora si svolge il processo infettivo in tutta la sua intensità e conduce a morte gli animali così trattati.

Un identico risultato si ottiene se invece di mescolare un acido od altra sostanza irritante al virus attenuato, si injetta da solo l' acido od altra sostanza e dopo alcune ore si inocula nel posto, dove già si è stabilita l' alterazione cellulare, una dose di virus attenuato, che per sè solo non è capace di uccidere l' animale.

Nelle due cavie maschi così trattate, si svolse nei due giorni successivi lentamente una tumefazione alla coscia, però mangiavano e si muovevano, quantunque zoppicassero alquanto.

Il 17 Aprile in una delle cavie *A* il tumore era in via di notevole aumento e l' animale era triste.

(1) Comptes rendues de l' Acad. des Sciences, 29 nov. 1886.

(2) Sur la récuperation et l' augmentation de la virulance de la bactérie de Charbon synptomatique.
Annales de l' Inst. Pasteur 1887, pag. 257.

Nell' altra cavia *B* invece il tumore sembravami stazionario, peró alla compressione era dolente.

La cavia *A* si aggravó moltissimo il giorno dopo e morí nella notte di carbonchio enfisematoso.

La cavia *B* si mantenne nelle condizioni dianzi indicate per parecchi giorni, poi il mattino del 24 Aprile la trovai moribonda con un grande tumore enfisematoso alla coscia e moriva nella giornata.

Il risultato di questi due sperimenti mi provava quindi che il primo virus attenuato usato nell' esperimento di Rimini non aveva perduto della sua attività.

Rimanevami a sperimentare il 2° virus attenuato a 85°.

Li 15 Aprile, come avevo fatto pel 1° virus attenuato, preparo nove dosi di secondo virus attenuato e col medesimo processo inoculo alla coscia opposta i nove animali che avevano ricevuta la prima inoculazione il giorno 7 e cioé l' agnello, le sei cavie di media grandezza e le due grosse cavie.

Tutti questi animali sopportano completamente la seconda inoculazione, nessuna reazione si stabilisce alla parte e nessun sintomo di malessere si mostra negli otto giorni successivi.

Li 18 Aprile diluisco due centigrammi di secondo virus attenuato in due centimetri cubi d' acqua sterilizzata e inoculo a parte eguali nei muscoli della coscia due giovani cobaje di circa un mese d' etá.

Nei giorni 19 è 20 Aprile in tutte due si svolge alla coscia un forte tumore enfisematoso e muojono di carbonchio sintomatico il 21 d.

Ora rimanevami da vedere sopra alcuni degli animali che erano stati sottoposti alle due inoculazioni, se avevano acquistata l' immunitá e a che grado contro il virus forte del Carbonchio enfisematoso.

Li 28 Aprile alle ore 9 antim. presenti il collega dott. Battistini e parecchi studenti, ho preparata una soluzione allungata con virus forte secco (di quello stesso che mi servi nell' esperimento di Rimini) e l' ho iniettato nella quantitá di 4 goccie per ognuno sotto la pelle dell' agnello e di 4 cavie state inoculate; ma ricevette pure 4 goccie della stessa soluzione una grossa cavia *nuova* sotto la pelle di una coscia.

Li 29 d., la cavia *nuova* è morta poco dopo le ore 10 ant. con un grande tumore enfisematoso alla coscia.

L' agnello e le tre cavie stanno bene, la quarta piú piccola é un poco triste e presenta una leggera tumefazione al posto dell' innesto.

Li 3 Maggio, l' agnello e tre cavie stanno benissimo, la quarta si é piú aggravata e muore di Carbonchio sintomatico la notte del 4 al 5 d.

L' agnello e le tre cavie si mantengono in seguito in perfetta salute.

Il giorno 20 Maggio alle ore 9 antim. torno a provare la resistenza al virus forte del carbonchio sintomatico nell' agnello.

Diluita una piccola quantità di virus (sempre della stessa qualità) in acqua sterilizzata, ne inoculo otto goccie nei muscoli di una coscia dell' agnello e quattro goccie sotto la pelle del dorso di una grossa cavia *nuova*.

La cavia è morta il 21 verso le ore 11 $^1/_2$ ant., l' agnello ha resistito completamente presentando solo una lievissima tumefazione alla coscia.

Li 26 d., l' agnello gode perfetto benessere, la leggera tumefazione alla coscia è scomparsa.

Da tutte queste prove rimaneva quindi con sicurezza dimostrato che i virus attenuati avuti da Lione ed usati a Rimini erano esattamente preparati e che quindi ad essi non poteva attribuirsi l' esito infausto colà avuto.

III.

Ora mi restava la questione più ardua da sciogliere, quella cioè di verificare se positivamente la razza dei bovini giovani nei quali avevo sperimentato in Rimini, era suscettibile pel virus del Carbonchio sintomatico puro ad un grado molto maggiore di quello che avevo con sicurezza constatato nel 1884 e 85 nei bovini giovani della mia provincia.

A dir vero dopo quanto avevo constatato sperimentalmente e sul virus forte e sopra i virus attenuati impiegati, entrava in me vieppiù la convinzione che la razza alla quale appartenevano i bovini giovani di Rimini, fosse dotata di una suscettività esagerata pel virus anzidetto.

Ma per allontanare qualsiasi dubbio, bisognava darne una dimostrazione sperimentale.

E qui urtavo in una difficoltà gravissima, la mancanza cioè dei mezzi non piccoli che mi abbisognavano per fare le prove necessarie.

Si trattava di acquisto di bovini giovani di quella razza che sono venduti, come già dissi fin da principio, ad un prezzo elevato.

Davanti a questo ostacolo insormontabile era costretto di cedere, quando fortunatamente mi venne in soccorso l' egregio signor ingegnere Leopoldo Tosi, Presidente del Comizio Agrario di Rimini, che informato dal collega dott. Battistini delle ricerche compite per mettere in chiaro la causa del risultato infelice delle prove fatte in Rimini, generosamente mise a mia disposizione tre giovani bovini di quella razza acquistati a sue spese, con piena libertà di potere tentare tutte quelle prove che credevo, affine di vedere se fosse possibile di trovar modo di renderli, con altri metodi d' ino-

culazione, refrattari all' azione del virus del carbonchio enfisematoso, poco importandogli se nell' esecuzione di questi tentativi uno dei vitelli dovesse morirne.

A queste condizioni mi era permesso di poter tentare senza grande preoccupazione dei danni che potevano capitare, qualche prova decisiva.

Dei tre giovani bovini inviati dal signor ingegner Tosi, eravi una vitella di 8 a 9 mesi e gli altri due maschi interi, uno più piccolo di statura di oltre 10 mesi, l' altro più grande di oltre l' anno d' età.

Tutti presentavano le caratteristiche della razza.

Vennero tenuti per molti giorni in osservazione, si presero le temperature rettali e si constatò che erano del tutto sani; solo che presentavansi di un temperamento delicato.

Per raggiungere il meglio che mi fosse possibile l' intento propostomi, pensai prima di tutto di ricercare in qual modo reagirebbe uno dei bovini all' azione di una piccola quantità del secondo virus attenuato francese.

Li 11 Luglio in un centimetro cubo di acqua sterilizzata misi un centigrammo di secondo virus attenuato (a 85°), e dopo averlo sciolto il più esattamente possibile ne inoculai la metà sotto la pelle della faccia esterna della coscia destra del vitello più piccolo e l' altra metà pure sotto la pelle della coscia di una grossa cavia gravida nuova.

Al momento dell' inoculazione la temperatura del vitello al retto era di 38 $^{9}/_{10}$.

Alla visita della sera il vitello non presenta nessun mutamento, la temperatura rettale è a 39 $^{3}/_{10}$.

La cavia è vispa e non presenta tumefazione alla coscia.

Il giorno 12 il vitello e la cavia non presentano mutamenti apprezzabili. Il mattino del 13 trovo che il vitello ha una lieve tumefazione sottocutanea al luogo dell' innesto, un poco dolente alla pressione e alquanto calda.

La temperatura è a 39 $^{6}/_{10}$.

Mangia con appetito.

Verso sera però la temperatura raggiunge i 40°, si mostrano tremiti all' arto posteriore destro, la tumefazione si è estesa in superficie, è più rilevata, e di consistenza pastosa.

La cavia ha la coscia un poco tumefatta ed è triste; però nella giornata ha preso cibo.

Nei due giorni successivi 14 e 15 d., i sintomi nel vitello si sono mantenuti stazionari. Ha preso pochissimo cibo, invece ha bevuto molt' acqua con un po' di farina. La temperatura rettale ha oscillato fra i 39 $^{8}/_{10}$ e i 40 $^{2}/_{10}$.

L' edema sottocutaneo si è esteso verso il garetto.

Nella cavia la tumefazione alla coscia è alquanto aumentata, ma mantiensi però sempre svelta e mangia.

In seguito i fatti più gravi nel vitello si sono andati man mano mitigando, la tumefazione lentamente si è risolta e circa 15 giorni dopo era ritornato in buone condizioni di salute.

Pure la cavia si era riavuta completamente, rimanendo solo un po' di durezza alla coscia attorno al punto dell'inoculazione.

Li 16 Luglio nel vitello più grande inoculo nei muscoli della coscia sinistra un centigrammo di 1° virus attenuato francese sciolto in un centimetro cubo di acqua sterilizzata. Temperatura rettale 38 $^{6}/_{10}$.

Nei tre giorni successivi veruna apparente reazione locale. Al mattino la temperatura rettale supera i 39°, di 2 a + 4 decimi.

Li 24 Luglio allo stesso vitello inoculo sotto la pelle della faccia esterna dell' altra coscia un centigrammo di 2° virus attenuato francese sciolto in un centimetro cubo di acqua. Temperatura rettale 38 $^{3}/_{10}$.

Il mattino del 25 si è formata una discreta tumefazione attorno al luogo dell' innesto, un po' dolente. Temperatura rettale 39 $^{4}/_{10}$. Si mantiene l'appetito. L' animale è un po' triste.

Il giorno dopo la tumefazione è un poco aumentata. Temperatura 39 $^{1}/_{10}$. Poscia la tumefazione si cominciò a sciogliere e cinque giorni dopo era quasi del tutto scomparsa.

Lasciai passare alcuni giorni fino a che l'animale si prensentò colla temperatura rettale normale e coi segni di benessere.

Nel mattino del 6 Agosto da una cavia appena morta di carbonchio enfisematoso raccolte due goccie di sierosità sanguinolenta fluente dal tumore della coscia la allungai in 80 goccie di acqua sterilizzata e rimescolato a lungo per ottenerne una diluzione uniforme, inoculai di essa circa tre goccie sotto la pelle della faccia esterna della coscia destra del grosso vitello e 4 goccie sotto la pelle della faccia interna della coscia di una grossa cavia nuova femmina.

Nei tre giorni consecutivi non mi accorsi che il vitello presentasse segni di malessere, ma verso la sera del quarto giorno fu preso ad un tratto da forti brividi, aveva il pelo irto, la respirazione frequente, rifiutava il cibo ed era triste. La temperatura rettale era bassa (37 $^{6}/_{10}$).

Alla faccia esterna della coscia attorno al punto dell' inoculazione rilevai un poco di tumefazione molliccia.

La cavia stava bene, aveva solo una lieve tumefazione alla coscia.

Li 11 Agosto trovai il vitello aggravato notevolmente. Alla coscia presentava un esteso tumore teso e dolente, teneva spesso l' arto sollevato e sollecitato a muoversi lo faceva stentatamente e zoppicando. La temperatura rettale era a 39 $^{8}/_{10}$; prendeva poco cibo, beveva spesso ed era abbattuto, cogli occhi incavati, il pelo irto e di tratto in tratto era preso da tremori generali.

Questi sintomi persistettero per tre giorni, però il tumore andò vieppiù aumentando in modo che il mattino del 15 era enorme e l' animale restava sdrajato nella lettiera impossibilitato a rialzarsi.

Verso sera era aggravatissimo e morì nella notte.

Alla sezione cadaverica trovai alla coscia lesioni enormi caratteristiche del Carbonchio enfisematoso.

Infrattanto la cavia si manteneva ancora in buone condizioni; in seguito scomparve la tumefazione alla coscia rimanendo solo un poco di durezza. Fu tenuta in osservazione per più di un mese, mantenendosi sempre sana.

La reazione fortissima locale e generale verificatasi nel primo vitello dopo l' inoculazione di una dose mite di secondo virus attenuato; lo sviluppo del Carbonchio enfisematoso del vitello grosso dopo essere stato regolarmente inoculato coi due virus attenuati, e la morte avvenutane per quantità minima di virus fresco non capace di uccidere alla stessa dose, una cavia; mi lasciarono completamente persuaso della recettività eccessiva di questa razza di bovini pel virus forte del Carbonchio enfisematoso.

Difatti niente di simile mi era accaduto di osservare nelle esperienze fatte nel 1884 e 85 sopra bovini giovani di razza bolognese, nei quali per riconoscere se avevano acquistata immunità usavo dosi più elevate di virus forte secco o di virus fresco, eppure non ebbi reazioni allarmanti e mortali come si può rilevare nel già citato mio lavoro del 1885 (1).

IV.

Riconosciuta la suscettibilità così grande pel virus forte del Carbonchio enfisematoso in questa razza di bovini, anche quando era stata inoculata coi virus attenuati; ne veniva di conseguenza che dovessi ricercare con qualche modificazione apportata al metodo della preparazione dei virus attenuati, se mi fosse possibile riuscire a ottenere in essa la resistenza necessaria al virus forte.

Ma una difficoltà per raggiungere l' intento mi si presentava nel piccolo numero di soggetti sui quali poteva provare. Dei due bovini solo sulla vitella potevo completamente contare, perchè dei risultati, qualunque essi fossero, che si sarebbero ottenuti nel vitello piccolo, che aveva servito all' altro importante sperimento; potevo tener calcolo solo quando fossero identici a quelli che si avrebbero nella vitella.

Dovetti quindi condurre le prove con molte cautele e circospezione per

(1) Vedi Memoria dell' Accad. di Sc. dell' Istit. di Bologna, 1885.

non correre subito il rischio di perdere i bovini. Peró non potendo far altrimenti, dovetti adattarmi a fare prima tentativi sopra le cavie; quantunque queste non rappresentino, per quanto ha riguardo alle inoculazioni preservative, un reattivo tale che dalla immunitá pel virus forte del Carbonchio enfisematoso ottenuta in esse, si possa con tutta sicurezza ritenere che si avrà lo stesso grado di immunitá nei bovini, specialmente di questa razza delicata.

Dopo parecchie prove preliminari fatte nelle cavie, venni nella persuasione che si potesse ottenere l'immunità ricercata nei bovini di questa razza romagnola, facendo in essi tre successive inoculazioni con virus attenuato di forza crescente.

I virus attenuati a tre gradazioni diverse, li preparai esponendo per sei ore al calore secco di una stufa una determinata quantitá di virus forte secco, sciolto nel doppio in peso di acqua sterilizzata, alla temperatura di 100° per il virus attenuato di 1° grado; a 90° pel 2° grado; a 80° pel 3° grado.

Il virus attenuato di 1° grado alla dose di un centigramma nella cobaja giovine non produce reazione locale sensibile. A dose doppia la reazione alla coscia é notevole, peró l'animale resiste.

Il virus di 2° grado produce nella cavia alla dose di un centigramma reazione marcata, a dose doppia uccide alcuni soggetti per Carbonchio sintomatico, peró la malattia ha un corso di otto a dieci giorni.

Il virus di 3° grado ad un centigramma uccide quasi tutte le cavie inoculate, peró la malattia dura parecchi giorni (da 5 a 6 fino ad 8 giorni).

Fissato cosí il valore reattivo di questi tre virus attenuati, volli ovviare ad un inconveniente riscontrato nell'uso dei vaccini attenuati francesi, che per quanta diligenza si abbia nel triturarli nei piccoli mortaj di cristallo, non si giunge mai a scioglierli nell'acqua completamente ed omogeneamente, per cui la distribuzione di essi nelle differenti dosi non é mai del tutto eguale ed inoltre facilmente si otturano le canule da injezione. Oltre a ció le inoculazioni sotto la pelle dell'estremitá della coda non sono del tutto facili, quasi sempre poi sono dolorose e spingono gli animali a movimenti disordinati che non rendono sempre possibile di inoculare completamente tutta quanta la dose prescritta.

Ridussi in polvere quasi impalpabile, perfirizzandoli, i miei tre virus attenuati, e feci le inoculazioni sotto la pelle della faccia esterna della coscia, usando ciascun virus alla dose minore di un terzo di quella indicata dagli sperimentatori francesi.

Alla vitella nuova e al vitello piccolo inoculo sotto la pelle della faccia esterna delle coscie i tre virus attenuati successivamente alla distanza di otto giorni uno dall'altro. (Li 2, li 10 e li 18 Agosto).

Sopportarono bene le tre inoculazioni, non mostrando segni evidenti di malessere, quantunque in seguito ad ognuna delle tre inoculazioni la temperatura rettale indicasse abbastanza sensibili aumenti, quasi sempre palesi dopo due a tre giorni o poco più dalle eseguite inoculazioni, come si può rilevare dalla unita tabella.

Solo ebbi a notare dopo la terza inoculazione nel vitello piccolo una discreta tumefazione sottocutanea attorno al punto dell' innesto, la quale si dileguò in pochi giorni.

Li 26 Agosto sperimentai la resistenza al virus forte di questi due giovani bovini inoculati. Feci una diluzione col virus forte di cui mi ero servito a Rimini e ne inoculai tre goccie nei muscoli della coscia destra della vitella e del vitello piccolo, come pure la stessa quantità, per ognuna nei muscoli della coscia di due grosse cavie.

Queste erano morte di Carbonchio sintomatico verso la sera del 27 d. La vitella ed il vitello stavano bene e non mostravano segni di malessere nei giorni successivi.

Trascorso alcun tempo volli sottoporli a nuova prova di resistenza.

Li 10 Ottobre preparato, col tumore carbonchioso di una coscia di cavia appositamente infettata, virus fresco molto diluito in acqua sterilizzata, ne inoculai otto goccie sotto la pelle della coscia sinistra del vitello piccolo e tre goccie sotto la pelle di una coscia di una cavia grande.

Questa moriva di Carbonchio sintomatico dopo 32 ore circa.

Nel vitello si sviluppa il 12 una tumefazione edematosa calda di qualche rilievo alla coscia e trovai che la temperatura rettale raggiungeva quasi i 40°; ma però non era abbattuto.

Il giorno dopo la temperatura era discesa a 38 $^{6}/_{10}$ e la tumefazione era stazionaria. Andò poscia diminuendo per risolversi del tutto in pochi altri giorni.

Li 12 Ottobre feci pure la stessa prova sulla vitella usando il virus secco. Una piccola quantità di esso venne molto diluito in acqua pura e ne inoculai un cent. cubo sotto la pelle della natica sinistra e 4 goccie sotto la coscia di una cavia grande.

La cavia moriva di carbonchio sintomatico dopo 38 ore circa, nella vitella non si ebbe reazione nè locale nè generale.

Il risultato quindi ottenuto, quantunque l' esperimento fosse stato per necessità limitato a due giovani bovini di razza romagnola era stato completo e quindi, senza essere tacciato di soverchia arditezza, mi pareva di potermi azzardare senza timore di incorrere in gravi pericoli, ad applicare il metodo sopra un numero maggiore di bovini di quella razza, ogni qualvolta ne venissi richiesto.

Infatti nel novembre e decembre dello scorso anno per desiderio del signor ing. Tosi, nella Fattoria Torlonia a S. Mauro di Romagna, il dott. Battistini eseguiva le inoculazioni coi miei tre virus attenuati, seguendo il metodo che ho più sopra indicato, sopra 50 giovani bovini di quella bellissima razza e non si ebbero a verificare inconvenienti nè perdite di animali. Tutto procedette regolarmente.

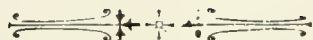



TABELLA DELLE TEMPERATURE

DELLA VITELLA

1° GRADO DI VIRUS ATTENUATO

Prima dell' inoculazione: 38 $^{7}/_{10}$

		M.	S.
Agosto	2	. . . .	39 $^{8}/_{10}$
»	3	39 $^{2}/_{10}$	39 $^{6}/_{10}$
»	4	39 $^{5}/_{10}$	39 $^{2}/_{40}$
»	5	39 $^{3}/_{10}$	39 $^{8}/_{10}$
»	6	39 . .	39 $^{3}/_{10}$
»	7	38 $^{8}/_{10}$	39 $^{1}/_{10}$
»	8	38 $^{5}/_{10}$	

2° GRADO DI VIRUS ATTENUATO

Prima dell' inoculazione: 38 $^{4}/_{10}$

		M.	S.
Agosto	10	. . . .	39 $^{2}/_{10}$
»	11	38 $^{6}/_{10}$	39 $^{4}/_{10}$
»	12	39 $^{3}/_{10}$	39 $^{6}/_{10}$
»	13	39 $^{8}/_{10}$	40 . .
»	14	39 $^{7}/_{10}$	40 . .
»	15	38 $^{6}/_{10}$	39 $^{2}/_{10}$
»	16	38 $^{5}/_{10}$	

3° GRADO DI VIRUS ATTENUATO

Prima dell' inoculazione: 38 $^{6}/_{10}$

		M.	S.
Agosto	18	. . . .	39 $^{1}/_{10}$
»	19	38 $^{4}/_{10}$	39 $^{2}/_{10}$
»	20	38 $^{6}/_{10}$	39 $^{7}/_{10}$
»	21	39 $^{3}/_{10}$	39 $^{6}/_{10}$
»	22	39 . .	39 $^{3}/_{10}$
»	23	38 $^{5}/_{10}$	39 $^{2}/_{10}$
»	24	38 $^{4}/_{10}$	

DEL VITELLO PICCOLO

1° GRADO DI VIRUS ATTENUATO

Prima dell' inoculazione: 38 $^{6}/_{10}$

		M.	S.
Agosto	2	. . . .	39 $^{1}/_{10}$
»	3	38 $^{4}/_{10}$	39 $^{3}/_{10}$
»	4	39 . .	39 $^{6}/_{10}$
»	5	39 $^{3}/_{10}$	39 $^{8}/_{10}$
»	6	39 $^{4}/_{10}$	39 $^{8}/_{10}$
»	7	39 . .	39 $^{3}/_{10}$
»	8	38 $^{2}/_{10}$	39 $^{4}/_{10}$
»	9	38 $^{5}/_{10}$	

2° GRADO DI VIRUS ATTENUATO

Prima dell' inoculazione: 38 $^{4}/_{10}$

		M.	S.
Agosto	10	. . . .	39 $^{1}/_{10}$
»	11	38 $^{6}/_{10}$	39 $^{2}/_{10}$
»	12	39 . .	39 $^{4}/_{10}$
»	13	38 $^{5}/_{10}$	39 $^{1}/_{10}$
»	14	38 $^{3}/_{10}$	

3° GRADO DI VIRUS ATTENUATO

Prima dell' inoculazione: 38 $^{6}/_{10}$

		M.	S.
Agosto	18	. . . .	39 $^{3}/_{10}$
»	19	38 $^{4}/_{10}$	39 $^{1}/_{10}$
»	20	38 $^{8}/_{10}$	39 $^{6}/_{10}$
»	21	39 $^{2}/_{10}$	40 . .
»	22	39 $^{4}/_{10}$	39 $^{8}/_{10}$
»	23	39 $^{1}/_{10}$	39 $^{4}/_{10}$
»	24	39 . .	39 $^{6}/_{10}$
»	25	38 $^{7}/_{10}$	39 $^{4}/_{10}$
»	26	38 $^{5}/_{10}$	

SECONDO CONTRIBUTO

ALLA CONOSCENZA

DELLA MICROFAUNA TERZIARIA ITALIANA

MEMORIA

DEL

DOTT. CARLO FORNASINI

(Letta nella Sessione del 12 Aprile 1891)

(CON UNA TAVOLA).

In un mio *primo contributo alla conoscenza della microfauna terziaria italiana,* pubblicato nello scorso anno (1), illustrai una serie di forme di rizopodi reticolari, estratti da alcuni saggi di una marna bianca raccolta nelle vicinanze di Catanzaro; e trattando della età geologica di quella marna, dissi che, sembrandomi identica ai cosidetti *trubi* di Sicilia, che accompagnano la formazione gessoso-solfifera, non dubitavo di riferirla alla parte più antica del pliocene, accennando anzi alla probabile corrispondenza cronologica di essa colla marna turchina soprastante alla formazione gessosa del Bolognese.

Ammettendo o no la corrispondenza cronologica della marna bianca a globigerine di Calabria coi *trubi* di Sicilia e colla marna turchina a *Pecten hystrix* (o *Angelonii*) e verticordie, con strati glauconitiferi, del Bolognese, rimane fuori di dubbio la diversità del carattere batimetrico dei due depositi, diversità che emerge principalmente dall'esame della fauna macroscopica e microscopica che contengono. La marna del Bolognese rappresenta un sedimento costituitosi a profondità minore di quello di Calabria; e la prova più sicura di questo asserto si ha nel fatto che i resti di miliolidi, imperforati prediligenti le acque basse, sono abbondantissimi nel primo e scarseggiano nel secondo.

Gli strati marnosi pliocenici del Bolognese, per ciò che riguarda la loro origine batimetrica, appartengono a quella categoria importantissima di

---

(1) Mem. Acc. Sc. Bologna, serie 4ª, vol. 10°, p. 463.

depositi marini sviluppati in diversi piani del terziario medio e superiore della penisola italiana, di Sicilia e di Sardegna, che hanno per carattere micro-paleontologico la frequenza dei miliolidi, dei foraminiferi arenacei, particolarmente delle textularine, e delle *grandi nosodarine.*

Le nodosarine, in certe argille, marne e calcari miocenici e pliocenici, assumono tale moltiplicità di forme e sono talmente abbondanti, che può a giusta ragione considerarsi questo loro notevole sviluppo come caratteristico dei depositi medesimi, allo stesso modo delle fusuline in certi strati del carbonifero, delle mummuliti in quelli dell'eocene, e via dicendo. E oltre la varietà di forme e la frequenza, é anche caratteristico delle nodosarine (sopratutto delle plioceniche) l'enorme sviluppo individuale, raggiungendo esse non di rado dimensioni relativamente colossali, e verificandosi anzi a questo riguardo un fatto che sembrami non si possa lasciare, senza pregiudizio, inconsiderato : ciascun tipo, cioè, appartenente a questo gruppo di lagenidi, é rappresentato nel pliocene italiano da una varietà, la quale raggiunge dimensioni maggiori delle altre riferibili al medesimo tipo.

Citerò, a quest'ultimo proposito, alcuni esempi : 1° le nodosarie costate sono rappresentate dalla *Nodosaria raphanistrum* (1); 2° le nodosarie liscie, dalla *Nod. radicula* (Linneo-Planco); 3° le linguline, dalla *Lingulina costata*; 4° le vaginuline, dalla *Vaginulina legumen* (Linneo-Planco-Gualtieri); 5° le marginuline, dalla *Marginulina costata*; 6° le cristellarie a spira interamente chiusa (robuline), dalla *Cristellaria cultrata*; 7° le cristellarie a spira parzialmente sciolta, dalla *Crist. cassis* (varietà *naviculavis*); 8° le frondicularie infine sono rappresentate dalla *Frondicularia complanata* (varietà *alata*).

Di alcune forme plioceniche riferibili a quest'ultima specie mi propongo appunto la illustrazione nella presente nota.

Soldani fu il primo (1780) che osservò resti di frondicularie nelle argille subappennine di Toscana, e li figurò e descrisse, prima come « ortoceratiti o vermi marini » e poscia come « nautili caudiformi ». Più tardi (1791) Batsch nè figurò un frammento, riferendolo, insieme a due altre diverse forme, al suo *Nautilus (Orthoceras) harpa.* Fu Defrance (1824) che basandosi sopra una specie, probabilmente del pliocene italiano, fondò il genere *Frondicularia:* quella specie fu la *Frond. complanata,* che si riguarda tuttora come tipo del genere.

D'Orbigny conservò il genere *Frondicularia* (1826), lo collocò e lo mantenne (1846), insieme alle nodosarie, alle linguline ecc., nel suo ordine degli *sticosteghi*, foraminiferi a segmenti disposti secondo una linea sola,

---

(1) Questa nodosaria raggiunge, secondo Silvestri, 35 millimetri in lunghezza e 2 e mezzo in diametro.

diritta o appena curva. E anche più tardi, quando alla classificazione di d'Orbigny si trovò necessario il sostituirne una più naturale che non si basasse sopra un solo carattere morfologico (necessità conseguente alla scoperta di Dujardin (1831) che portava d'un tratto i foraminiferi dai cefalopodi ai rizopodi, dai molluschi ai protozoi), le frondicularie continuarono a tenere il loro posto tra i generi già riconosciuti affini ad esse, e mutarono solamente di famiglia tenuto conto della natura del loro guscio. Così è che nella classificazione di Reuss (1861), le troviamo collocate tra i *rabdoidei* (gruppo di foraminiferi a guscio poroso); in quella di Carpenter, Parker e Jones (1862), tra i *lagenidi* (famiglia di foraminiferi a guscio perforato o ialino); e in quella di Brady (1884), pure nella famiglia dei lagenidi e nella sottofamiglia delle *nodosarine* (1).

Coi segmenti disposti secondo un'asse più o meno diritto, come nelle nodosarie propriamente dette, e compressi come nelle linguline, le frondicularie si distinguono dalle prime per essere appunto compresse e più sovente anche spianate, e dalle seconde per avere i segmenti conformati a modo di una lettera *V* più o meno aperta. Con questo, peraltro, si è ben lontani dall'ammettere l'esistenza di limiti netti tra le frondicularie e i due altri tipi di nodosarine sopra nominati, e basterà, a persuadersene, gettare lo sguardo su quelle forme che Silvestri illustrò sotto il nome di *Nodosaria gemina* (2), tra le quali si osserva, in un dato esemplare, la sezione circolare, propria delle nodosarie, e in un altro la ellittica, propria delle frondicularie, con evidente e graduato passaggio dall'un tipo all'altro. Questa medesima varietà, presentandosi compressa e in pari tempo coi segmenti non conformati a *V*, offre l'esempio di un nesso colle linguline. Troppo affine alla *N. gemina* è la forma illustrata da Schrodt sotto il nome di *Lingulina alata* (3). Le linguline avrebbero apertura allungata, e differirebbero in questo dalle nodosarie e dalle frondicularie che l'hanno circolare. La *Nodosaria* (*Mucronina*) *hasta* dei modelli di d'Orbigny, che Parker, Jones e Brady riferirono al genere *Lingulina* (4), ha tutto l'aspetto di una frondicularia ristretta e percorsa da costole longitudinali filiformi, e si direbbe molto affine a quella che Seguenza descrisse, senza darne figura,

---

(1) Per ciò che riflette la distribuzione delle frondicularie nelle formazioni geologiche, sappiamo per ora che esse non s'incontrano in terreni più antichi del retico, che continuano il loro sviluppo nel lias, nell'oolite e nel gault, raggiungono il massimo nella creta e nell'oligocene, mantenendosi tuttavia bene rappresentate nel terziario medio e superiore, e anche nell'attualità (T. R. Jones: *On the range of Foraminifera in time.* Proceed. Geol. Ass., vol. 2°, p. 181. — K. A. Zittel: *Handbuch der Palaeontologie*, vol. I).

(2) Monografia delle nodosarie, tav. VII.

(3) *Beiträge zur Kenntniss der Pliocänfauna Süd-Spaniens.* Zeitschr. deutsch. geol. Ges., vol. XLII, p. 410, tav. XXII, fig. 1.

(4) Ann. Nat. Hist., serie 3ª, vol. XVI, p. 27.

come *Fr. filicostata.* « Questa frondicularia (scrive l'autore) é d'una variabilità estrema; dalla forma allargata e compressissima, che é la più comune e che riguardo come tipica, si passa per gradi a forme sempre più ristrette, nelle quali lo spessore aumenta, le logge si allungano e vanno mutando di forma, perché si accorciano le due prominenze laterali; e sembra proprio che la conchiglia faccia transizione verso la *Nodosaria gemina* Silvestri, che trovasi non raramente nel medesimo giacimento (1). »

D'altra parte é manifesta la stretta affinità delle frondicularie colle flabelline, le quali appunto, colla loro porzione iniziale a spira e colla rimanente diritta ed a *V*, rappresentano un tipo intermedio tra le frondicularie medesime e le cristellarie. Questa affinità é assai bene dimostrata dalla esistenza di forme prossime alla *Frondicularia complanata*, e riferibili, ora alle frondicularie, ora alle flabelline, ora alle cristellarie. Tali forme sono: 1° la *Fr. alata* (Flabelline variety) figurata da Brady (Foram. Chall., tav. LXVI, fig. 3-5); 2° la *Flabellina harpa* Batsch sp. (Sechs Kupfertafeln, tav. V, fig. 14 *b, c*; affine questa anche alla *Cristellaria auris*); 3° la *Cristellaria navicularis* var. *complanata* Fornasini (Boll. Soc. Geol. Ital., vol. II, tav. II, fig. 9).

La estrema variabilità delle frondicularie (che del resto non é esclusiva di esse, ma é caratteristica dei foraminiferi in generale) persuase della necessità di riportarle tutte a un tipo unico; e questo fu scelto, come sopra ho detto, nella *Fr. complanata* Defrance. Attorno a questo tipo si aggruppa un certo numero di forme più strettamente affini, ed é appunto di esse che mi propongo di trattare nella presente nota, giovandomi delle mie osservazioni sul materiale raccolto nelle marne plioceniche inferiori dei dintorni di Bologna, e precisamente negli strati glauconitiferi del Ponticello di Savena. Avendo avuta la fortuna di trovare un esemplare della *Fr. complanata* tipica (forma A), due esemplari della *Fr. alata* (forma A e forma B), e uno della *F. denticulata* (forma A), ho creduto utile il darne i disegni, indotto a ciò dal fatto che esse varietà, sebbene conosciute, furono, allo stato fossile, soltanto incompletamente o malamente illustrate, e, allo stato vivente, furono in parte illustrate riproducendo forme che si scostano alquanto da quelle plioceniche che servirono a Defrance, a d'Orbigny e a Costa. Mi duole di non avere potuto rinvenire un esemplare meglio conservato della *Fr. denticulata*, e più ancora di non averne rinvenuti affatto della *Fr. rhomboidalis* e della *Fr. annularis*, colle quali

---

(1) Le formazioni terziarie nella provincia di Reggio (Calabria), p. 219. Stando alla descrizione datane da Seguenza, non esiterei a riferire la sua *Fr. filicostata* alla *Fr. interrupta* Karrer (v. anche Brady, Foram. Chall.), alla quale ho riferito pure due forme del pliocene bolognese, figurate in una tavola da me recentemente pubblicata (Foram. plioc. del Ponticello di Savena. Bologna, 1891. Fig. 19, 20).

varietà si completa il gruppo delle forme più affini al tipo defranciano.

La *Frond. complanata* tipica è la forma illustrata da Defrance (Dict. Sc. Nat., vol, XXXII, 1824, p. 178; Atlas, Conch., tav. XIV, fig. 4; Blainville, Malac., p. 371, tav. VI, fig. 4), caratterizzata dal contorno più o meno ovale, dovuto alla tendenza che hanno i segmenti di riunirsi in basso verso il segmento iniziale. Un bell'esempio di questa varietà tipica è offerto dalla figura 1 della qui unita tavola, rappresentante inoltre nel dimorfismo una decisa forma A (1). Il segmento iniziale porta invero qualche leggera traccia di striatura longitudinale; ma tale carattere è assai poco pronunciato per poterne fare un ravvicinamento al segmento decisamente costulato della *Fr. denticulata*. — La *Fr. complanata* tipica è rara negli strati subappennini, nè mi consta che sia stata ancora rinvenuta in formazioni più antiche o allo stato vivente

La *Fr. alata* è una delle tante specie fondate da d'Orbigny nel « Tableau » sopra figure di Soldani. Nella tavola XIV del « Saggio Orittografico » può vedersi riprodotto dalla figura 73 un esemplare di questa varietà; ma la figura citata da d'Orbigny è quella C della I tavola nel volume II della « Testaceographia » (2). La differenza caratteristica tra la *Fr. complanata* e la *Fr. alata* consiste unicamente nel contorno generale, in conseguenza del diverso sviluppo dei segmenti, protendendosi questi, nella seconda, lateralmente sino a dare alla conchiglia un aspetto più o meno triangolare. In realtà non esiste differenza sostanziale fra le due forme, osservandosi passaggi graduati dall'una all'altra, come è facile il rilevare esaminando le figure 2 e 3 della qui unita tavola e quelle di esemplari viventi date da Van den Broeck e da Brady (3), delle quali ultime alcune sono più prossime alle forme plioceniche, altre se ne scostano alquanto. — La *Fr. alata* fossile del pliocene italiano si presenta nettamente dimorfa, e delle due forme di cui presento il disegno, la prima (fig. 2) rappresenta la forma A, la seconda (fig. 3) la forma B. Le due figure sopra citate di Soldani rappresentano parimente la forma B (4). — La *Fr. alata* è, secondo il medesimo autore, abbastanza frequente nelle argille plioceniche del Senese, e, secondo Seguenza, s'incontra nel terziario superiore di Cala-

(1) Per ciò che riguarda il dimorfismo dei foraminiferi, vedasi quanto ho accennato lo scorso anno in questi atti (ser. 4ª, vol. X, p. 467, nota 2ª).

(2) Questa figura fu copiata da Parker, Jones e Brady (Ann. Nat. Hist., serie 4ª, vol. VIII, p. 151, tav. X, fig. 66).

(3) Van den Broeck illustrò questa varietà sotto i nomi di *Fr. alata* var. *sagittula* e var. *lanceolata*, e *Fr. complanata* var. *concinna*. (Ann. Soc. Belge Micr., vol. II, p. 109-117, tav. II, fig. 12-14, tav. III, fig. 2). Brady giustamente le ritiene inseparabili tra loro e dal tipo orbignyano (Foram. Chall., p. 522, tav. LXV, fig. 20-23).

(4) Schrodt, nel suo recente lavoro sopracitato, scrive di avere osservato il dimorfismo nella *Fr. alata* del pliocene Spagnuolo (l. c., p. 411).

brìa « in grandi e conservatissimi esemplari ». Gli esemplari delle acque di Barbados furono raccolti a oltre 150 metri di profondità; quelli delle acque di Culebra a oltre 700, e di Bermuda a circa 800 metri. — D'Orbigny l'osservò sulla spiaggia di Rimini, e Brady scrive di averne ricevuti belli esemplari dal Tiberi, provenienti dalla spiaggia di Magnisi (Sicilia orientale); ma ciò non significa che la *Fr. alata* viva attualmente colà, essendovi probabilmente (e quasi certamente a Rimini) trasportata dai torrenti denudatori degli strati subappenini (1).

La *Fr. denticulata* Costa, delle marne di Messina (Mem. Acc. Sc. Napoli, vol. II, p. 371, tav. II, fig. 22) non si distingue dalla varietà precedente che per avere il segmento iniziale decisamente costulato. La figura 91 T della tavola XIX del « Saggio Orittografico », come pure quella che accompagna la *Fr. alata* nel II volume della « Testaceographia », nonchè la figura 14 *a* nella V tavola di Batsch, rappresentano con ogni probabilità la varietà costiana. L'aggettivo *denticulata* applicatole dall'autore non è evidentemente distintivo di essa varietà, qualificando un carattere non esclusivo di essa, ma sviluppato più che mai anche nella *Fr. alata*. La figura 4 della qui unita tavola riproduce un esemplare non troppo ben conservato, ma caratteristico, di *Fr. denticulata* (forma A). — L'ornamentazione non è limitata al segmento iniziale, ma invade spesso i segmenti vicini, come appare anche dalle varietà *a* di Costa (l. c., tav. II, fig. 20); col qual fatto diminuiscono le differenze tra la *Fr. denticulata* e la *Fr. annularis* di cui in appresso. — Seguenza la indica frequente nel terziario superiore di Calabria (2).

Nella *Fr. rhomboidalis* dei modelli di d'Orbigny (3) i segmenti raggiungono, o tendono a raggiungere, la metà della lunghezza dell'intera conchiglia, manifestando così una tendenza affatto opposta a quella che si riscontra nella *Fr. complanata* tipica. Con questo, la *Fr. alata* rappresenta

---

(1) La *Fr. alata* si trova negli strati medii del miocene, e io stesso, ne ho osservati grandi esemplari nel materiale del calcare di San Michele, presso Cagliari, comunicatomi dal prof. Lovisato. Certamente s'incontra anche nel miocene medio e nel pliocene del Piemonte, giacchè quella che Sismonda cita come *Fr. complanata* (Matériaux etc., Protozoaires, p. 12) è, con ogni probabilità, non già la forma tipica, ma bensì la varietà *alata*. A questo proposito, ho voluto esaminare la figura di Michelotti che rappresenta la *Pennatula diluvii* portata da Sismonda a sinonimo della *Fr. complanata*. Ora, la *P. diluvii*, effigiata in grandezza naturale da Michelotti nella tavola VII dello « Specimen Zoophytologiae diluvianae » non è altro, a mio avviso, che la *Fr. alata*, fossile nel pliocene dell'Astigiano. — Il signor D. E. Dervieux da Torino gentilmente mi mandò copia della figura michelottiana e delle poche parole descrittive che trovansi a p. 223 dello « Specimen ».

(2) Delle altre frondicularie di Messina illustrate da Costa sotto vari nomi, alcune sono senza dubbio riferibili alla *Fr. complanata*, var. *alata* e *rhomboidalis*, le quali appaiono ignorate dallo autore. Ma le figure dubbie non permettono di stabilire con sicurezza una sinonimia.

(3) Il modello è riprodotto da Parker, Jones e Brady (Ann. Nat. Hist., ser. 3ª, vol. XVI, p. 19, tav. I, fig. 31).

evidentemente una condizione intermedia. Nel modello di d'Orbigny (forma A) il segmento iniziale appare costulato. — Seguenza la indica frequente nel terziario di Calabria, e « considerevolmente variabile ». D'Orbigny la dice vivente nell'Adriatico, e Brady l'ha osservata tra il materiale raccolto in una sabbia della spiaggia orientale di Sicilia; ma a questo riguardo giova ripetere l'osservazione fatta a proposito della *Fr. alata.*

La *Fr. annularis*, d'Orbigny, del terziario di Vienna (Foram. Vienne, p. 59, tav. II, fig. 44-47) differisce dalle varietà precedenti per essere striata longitudinalmente, e perché il secondo, il terzo e il quarto segmento si riuniscono in basso a formare un triplice anello attorno al segmento iniziale. Quest'ultimo carattere la distingue dalla *Fr. denticulata*, colla quale ha di comune in parte l'ornamentazione.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Diam.

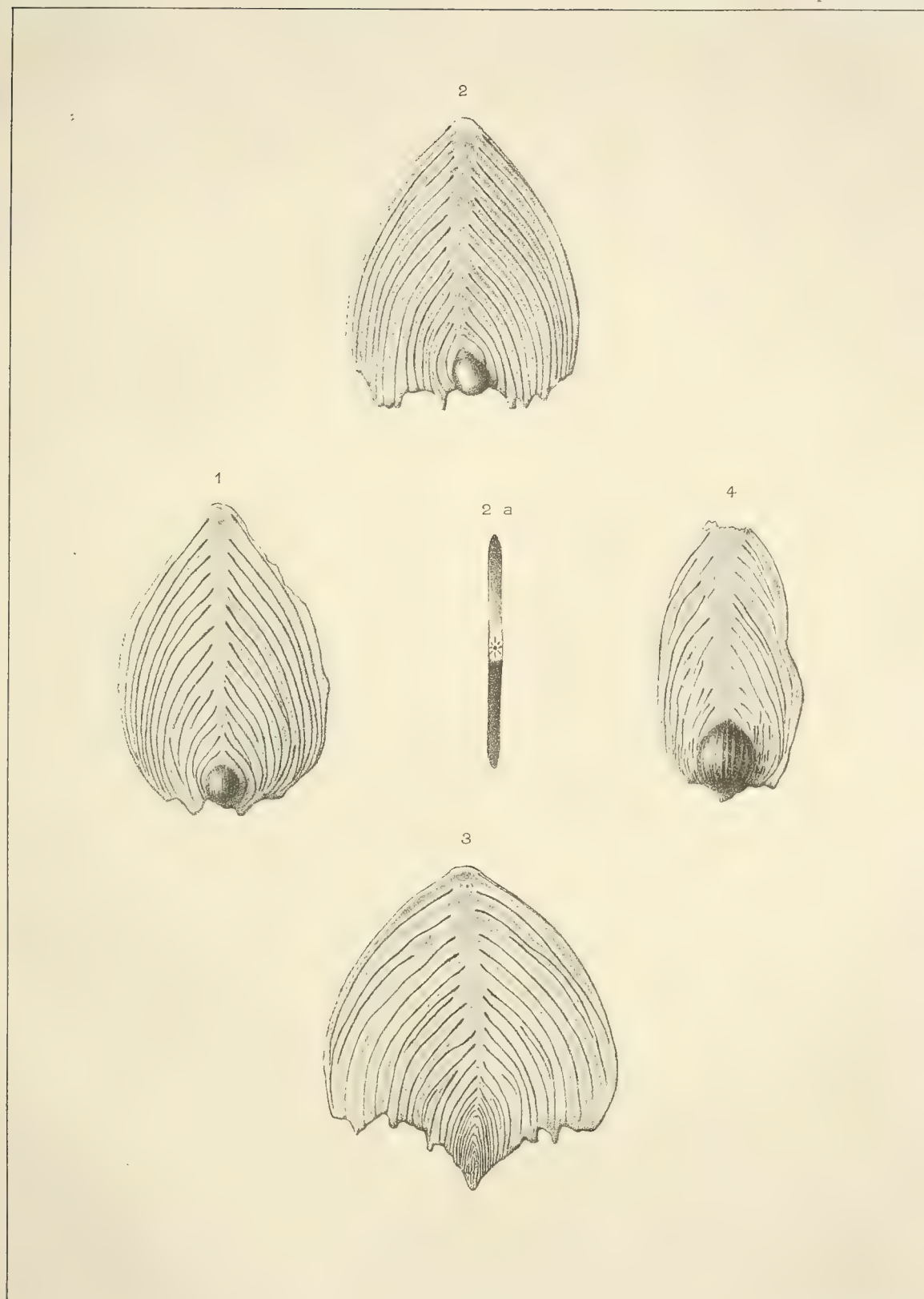
Fig. 1. — *Frondicularia complanata* Defrance . . . . × 10

» 2. — *Frondicularia alata* d'Orbigny (forma A) . . . . × 10

Fig. 2 *a*. — Aspetto orale.

» 3. — *Frondicularia alata* d'Orbigny (forma B) . . , ... × 10

» 4. — *Frondicularia denticulata* Costa . . . . × 13

C. Fornasini, dal vero. E. Contoli, lit. lit. G. Wenk e Figli—Bologna.

ULTERIORI RICERCHE

SULLE LOCALIZZAZIONI ANATOMO-PATOLOGICHE E SULLA PATOGENESI DELLA TABE DORSALE

MEMORIA

del Prof. Dott. FLORIANO BRAZZOLA

(Letta nella Sessione del 15 Febbraio 1891).

(CON DUE TAVOLE)

Come cercai di provare in altre comunicazioni alla Società Medico-Chirurgica di Bologna, e come oggi qualche autore inclina ad ammettere, (Jendrasky ed Hyrt in ispecie) la tabe dorsale non sarebbe anatomo-patologicamente caratterizzata dalle lesioni della porzione posteriore del midollo spinale, ma le lesioni sarebbero molto più diffuse. La tabe dovrebbe considerarsi non già una malattia spinale, sibbene una malattia generale del sistema nervoso a base anatomica conosciuta.

La nota che presento ora, riferendo il reperto microscopico di tutto il sistema nervoso, sia centrale che periferico, in un altro caso tipico di tabe dorsale, viene sempre più in appoggio di questo nuovo modo di vedere.

Il caso si riferisce ad un ammalato della Clinica dell' Ill.mo Prof. Murri, ammalato che poté essere minutamente studiato anche dal punto di vista sintomatologico, percui il reperto microscopico potrebbe avere anche qualche importanza per la fisio-patologia. Ripeto sempre i più vivi ed umili ringraziamenti al mio chiarissimo maestro, che mise a mia disposizione il materiale di studio.

Riferisco innanzi tutto brevemente la storia clinica, che riassumo dalla tabella.

Cenni Anamnestici.

X. d' anni 42. Per quanto spetta la storia di famiglia, nulla degno di nota speciale, se si eccettui la costituzione neuropatica dei genitori. A 18 anni contrasse un' infezione sifilitica, con tutte le manifestazioni primarie e

secondarie, infezione che si può dire non ha mai curata. Fu pure esposto a moltissime cause reumatizzanti e sofferse ripetute febbri da malaria. Le prime manifestazioni della malattia che lo trasse a morte, risalgono all' ottobre 1887, e furono: cefalee intense, considerevole indebolimento della vista, forti nevralgie infraorbitali, senso di freddo alle ginocchia. Questi fenomeni si svolsero dall' ottobre 1887, al giugno 1888. In questo frattempo però insorsero altri fatti, i quali andarono mano mano aggravandosi e cioè: alterato senso del terreno, indebolimento degli arti inferiori, dolori lancinanti, specialmente lungo la colonna vertebrale, dolori a cintura attorno all' addome, formicolío negli arti superiori. Fin d' allora fu fatta diagnosi di tabe dorsale (mancavano già i riflessi tendinei). Colla cura antisifilitica si ebbe un leggiero miglioramento, ma tosto i fenomeni s' aggravarono sempre più e s' aggiunsero: inoltre incoordinazione dei movimenti, dolori lancinanti sempre più intensi, maggiore indebolimento della vista, intorpidimento delle mani, crisi laringee. Anche questi sintomi, non ostante cure più che energiche, andarono sempre più aggravandosi; l' indebolimento e l' incoordinazione negli arti inferiori aumentarono al punto da costringere l' infermo a restare definitivamente a letto, ed il 3 marzo 1890 venne ricoverato in clinica.

Esame obbiettivo.

All' esame obbiettivo si riscontrarono i seguenti fatti più importanti:

Sensibilità tattile discretamente conservata, sebbene non perfettamente localizzata; la dolorifica lievemente indebolita e tarda negli arti inferiori, nel resto del corpo pressoché normale. Lo stesso si dica delle altre sensibilità.

La vista molto diminuita: ambliopia, daltonismo, discromatopsia. Pupilla che reagisce molto debolmente e lentamente alla luce ed all' accomodazione, leggiero nistagmo oscillattorio al bulbo sinistro. Papilla atrofica. Olfato molto diminuito; udito e gusto pressocché normali.

Per rispetto alla motilità, nei muscoli della faccia nulla degno di speciale nota, se si eccettui qualche alterazione nei movimenti mimici, ed una leggiera ptosi, insorta però negli ultimi giorni di vita. La lingua, quando è sporta per un po' di tempo, si vede in preda a qualche movimento disordinato e tremolío della punta. I movimenti attivi, specialmente i delicati, negli arti superiori vengono compiti con un po' d' incertezza, non che con un certo grado d' incoordinazione. Negli inferiori poi l' incoordinazione è molto accentuata sovratutto nella deambulazione. I movimenti passivi sono normali; il senso muscolare di pressione discretamente conservato negli arti superiori, quasi completamente abolito negli inferiori. Riflessi completamente aboliti.

La stazione eretta é impossibile, non per l' indebolimento delle forze, ma perché gli arti, quasi involontariamente, vengono lanciati in avanti o lateralmente od indietro, facendo cosí perdere l' equilibrio, ed anche perché la tonicità muscolare si modifica repentinamente ed in modo disordinato nei diversi gruppi muscolari. La deambulazione (con valido appoggio) presenta il quadro più classico dell' andatura atassica. Le facoltà psichiche pressoché normali.

La sintomatologia ricordata andó mano mano aggravandosi ed in modo rapidissimo; le crisi laringee si resero vieppiù gravi, lasciando uno stato d' esaurimento e torpore psichico notevolissimo; qualche volta s' aggiunse anche il vomito. L' esaurimento delle forze s' accrebbe sempre più e cosí pure il torpore psichico, finché incominciarono i fatti della graduale paralisi respiratoria e circolatoria, e la mattina del 17 marzo l' infermo moriva.

Alterazioni macroscopiche.

Alla sezione si riscontrarono le alterazioni macroscopiche le più tipiche della tabe. Non faccio che riferire i fatti più salienti, perché sarebbe perfettamente superfluo dilungarmi su questa parte.

Il midollo spinale presenta la degenerazione grigia, la più caratteristica, dei cordoni posteriori; del resto nulla che richiami in modo speciale l' attenzione, se si eccettui un certo intorbidamento ed inspessimento delle meningi sottili e l' aumento del liquido cefalo rachidiano.

Le meningi cerebrali sono intorbidate ed inspessite, la pia meninge piuttosto aderente alla sostanza cerebrale, i vasi meningei iniettati. Le arterie dell' encefalo in genere si presentano inspessite.

L' encefalo presenta una consistenza alquanto aumentata, le circonvoluzioni cerebrali sono piuttosto appiattite; i nervi ottici, il chiasma, i tratti ottici sono atrofici; del resto macroscopicamente null'altro degno di nota speciale. I nervi periferici apparivano un po' iniettati.

Tutti gli altri organi perfettamente normali.

Alterazioni microscopiche.

Il materiale per l' indagine microscopica fu raccolto con tutte le precauzioni e nel maggior stato di freschezza possibile. Il sistema nervoso centrale ed i nervi periferici, appena fu concessa la sezione, i piccoli pezzi di muscoli e tendini per lo studio delle terminazioni nervose immediatamente dopo la morte; le alterazioni riscontrate perció non possono per nulla attribuirsi a fatti cadaverici.

L' osservazione venne portata su tutto il sistema nervoso: encefalo, midollo spinale, nervi periferici, terminazioni nervose; usando i diversi metodi che la tecnica microscopica insegna in queste ricerche: (Metodo di Golgi, di Weigert originale o modificato, metodo di Exner, Henle e Merkel, Martinotti, Freud, Löwit etc.) e ciò a seconda della parte che veniva studiata ed a seconda dello scopo cui la ricerca era diretta.

L'encefalo venne studiato minutamente nelle sue diverse parti. Il cervello fu sezionato circonvoluzione per circonvoluzione, capsula interna, nuclei della base etc. Il ponte, il midollo allungato, il midollo spinale furono sezionati tutti in serie. Dei nervi vennero esaminati l' ottico, quelli del braccio, quelli della gamba, quelli dei muscoli motori dell' occhio. Per le terminazioni nervose furono esaminati: i muscoli retti dell' occhio, il bicipite e tricipite brachiale, diversi muscoli dell' antibraccio, il gastrocnemio e relativi tendini.

Descrivo le alterazioni minute nel seguente ordine: midollo spinale, encefalo, nervi periferici, terminazioni nervose, e ciò per ragioni che appariranno chiare più innanzi.

Midollo spinale — Nel midollo spinale, sezionato completamente in serie e trattato col metodo di Weigert originale o da me modificato, come pubblicai in un lavoro sulla paralisi progressiva, si riscontrano le lesioni più tipiche della tabe dorsale avvanzata. Non è del tutto superfluo che riassuma brevemente le alterazioni minute del midollo spinale, per poterle poi mettere in rapporto colle altre lesioni del sistema nervoso e colla sintomatologia.

La pia meninge è dovunque inspessita e così pure i sepimenti che dalla meninge si portano nel midollo spinale, i vasi meningei dilatati, ed a pareti inspessite, specialmente l' intima. La nevroglia è in genere aumentata e diverse fibre nervose atrofiche in tutto il midollo, un po' più prevalentemente nella metà sinistra, e maggiormente poi nel fascio cerebellare e motorio incrociato, non che in tutta la parte periferica del midollo.

Nella porzione posteriore del midollo poi, si hanno le alterazioni più caratteristiche della tabe. Si può dire che tutte le fibre dei fasci posteriori (almeno nella parte più alta del midollo) sono degenerate: infatti non vi è che qualche traccia di fibre conservate nel limite posteriore del midollo e nel limite tra il fascio di Goll e quello di Burdack. D' altra parte poi la degenerazione si spinge fino alle radici ed alle corna posteriori, ed in alto fino alle commessure posteriori. Le fibre dei fasci posteriori sono perciò quasi completamente sostituite da tessuto connettivo. I vasi in questa parte sono molto dilatati, ed a pareti molto inspessite, specialmente l' intima. (Fig. 1-2-3-4).

La sostanza grigia si presenta pure coi vasi molto dilatati: le cellule

delle corna anteriori sono per la maggior parte conservate; nelle corna posteriori invece moltissime cellule sono distrutte od in preda ad atrofia: le radici posteriori sono schiacciate, degenerate, atrofiche: il reticolo nervoso si puó dire completamente scomparso (Fig. 5). Nelle colonne di Clarke sono scomparse la maggior parte delle sottili fibre nervose: la sostanza gelatinosa di Rolando é pure alterata in questo senso. Il canal centrale si trova quasi completamente chiuso per iperplasia dell' epitelio e per considerevole aumento delle fibrille centrali dell' ependima.

Queste alterazioni del midollo spinale poi non sono egualmente avanzate nelle diverse regioni. La massima alterazione, nella sostanza bianca almeno, si ha nella porzione cervicale e prima dorsale; mano mano che ci avanziamo nella seconda porzione dorsale e nella lombare, il numero delle fibre conservate é maggiore, e le fibre conservate si riscontrano specialmente verso il limite posteriore del midollo ed in vicinanza della commessura posteriore; mentre il massimo della degenerazione si ha nella parte centrale del fascio di Burdack.

Queste degenerazioni dei fasci posteriori del midollo spinale si accompagnano gradatamente in tutto il *midollo allungato,* fino al funicolo gracile, funicolo cuneato, corpi restiformi, spazio interolivare. I nuclei, gracile e cuneato, presentano moltissime cellule in via di degenerazione; le olive sono pochissimo alterate; il nucleo del XII° sembra conservato: quello del X° invece profondamente leso nelle sue diverse sezioni: le radici inferiori del V° quasi completamente sclerosate: le vie motrici conservate.

Encefalo. — L' esame del *Cervello*, come giá ricordai, fu metodicamente condotto, sezionando circonvoluzione per circonvoluzione, la sostanza bianca, i nuclei della base etc. ed esperimentando i diversi metodi di indagine oggi consigliati per lo studio delle alterazioni delle cellule o delle fibre nervose.

L' alterazione sostanziale é costituita da fatti infiammatorî e degenerativi.

I vasi dell' encefalo in genere (basilare, carotide interna, cerebrali, comunicanti, Silviane etc.) sono tutti in preda ad arterite, prevalentemente endoarterite, processo che si diffonde anche ai piccolissimi vasi (Fig. 6).

In tutta la corteccia le meningi sottili sono inspessite per lento processo infiammatorio, i vasi meningei dilatati, iniettati ed in preda ad endoarterite; essi si cacciano profondamente nella sostanza cerebrale, presentando sempre i caratteri di un lento processo infiammatorio, che va svolgendosi nei vasi stessi e nelle parti adiacenti (Fig. 7).

Per quanto spetta la sostanza nervosa, come fatto generico, si notano le conseguenze di un processo infiammatorio cronico, a lentissimo sviluppo, il quale ha portato come ultimo fatto la degenerazione di un numero più

o meno grande di elementi nervosi. Vennero già ricordati i caratteri che presentano i vasi encefalici.

Le cellule dei primi strati (1° e 2° strato secondo Meynert, strato superficiale di Golgi), si può dire sono completamente scomparse per atrofia semplice o pigmentale; alterazione la quale va mano mano estendendosi anche negli strati più profondi, sebbene in grado decrescente. Le cellule dello strato medio di Golgi sono un po' più conservate, quelle dello strato profondo maggiormente ancora: questo però in tesi generale, poiché le alterazioni, come vedremo, variano di intensità da lobo a lobo, da circonvoluzione a circonvoluzione. Gli elementi nervosi, incominciano a perdere i loro prolungamenti, il protoplasma si rende sempre più omogeneo, fissa sempre meno le sostanze coloranti, finché mano mano si dissolve, non resta che il nucleo il quale gradatamente subisce la stessa sorte; e ciò quando le cellule scompaiono per atrofia semplice. Questo succede a preferenza negli strati corticali. Altre volte invece, specialmente negli strati più profondi, le cellule cadono in preda ad atrofia pigmentale. Incomincia a comparire nel protoplasma una zona nero-brunastra, grossolanamente granulosa, la quale sta in vicinanza del nucleo o lo invade: mano mano scompaiono i prolungamenti, il protoplasma pure; non resta che un piccolo cumulo di pigmento ed il nucleo, il quale pure poco per volta si dissolve e viene ad essere riassorbito; sicché delle cellule non restano che le vestigia od anche solo delle areole che stanno a dimostrare il posto antecedentemente occupato dalle cellule medesime (Fig. 8-9-10).

La neuroglia, nelle parti del cervello in cui l' alterazione è meno avanzata, è aumentata, e cogli elementi che si colorano facilmente; nelle sezioni invece in cui la lesione è maggiormente progredita, si mostra anch' essa in preda a processi regressivi ed assume un aspetto poroso trabecolare molto manifesto (Fig. 11).

La fina rete di fibre nervose della corteccia, (fibre d' associazione) specialmente negli strati superficiali, è in gran parte scomparsa, pressapoco come avviene nella paralisi generale (Fig. 12).

Le alterazioni che ricordai però non sono egualmente manifeste, o per meglio dire avanzate, nelle diverse parti del cervello. I lobi frontali ed occipitali sono i più interessati ed in essi prevalgono i fatti di regressione; la maggior parte delle cellule della corteccia, sovratutto de' primi strati si possono dire scomparse, anche negli strati profondi moltissimi elementi sono in preda ad atrofia; la nevroglia pure è molto retratta ed atrofica ed ha assunto un aspetto trabecolare poroso molto manifesto; i vasi profondamente lesi. Vengono poscia in ordine decrescente la parte posteriore del lobo parietale (giro angolare), i lobi temporo-sfenoidali, la zona motrice. Quest' ultima parte è la meno alterata; gli strati superficiali sono anche

qui profondamente alterati, lo strato medio ed il profondo invece abbastanza conservati. Le fibre d' associazione peró sono dapertutto sempre piú o meno profondamente interessate: si vedono gradatamente atrofizzarsi e finalmente scomparire. Nelle parti dove la lesione é meno avanzata, la nevroglia é aumentata e non in via di atrofia (Fig. 13-14-15-16).

Nello spessore della sostanza grigia poi, qua e lá si trovano dei focolai degenerativi piú o meno grandi, sempre in vicinanza dei vasi, i quali, come già ricordai, sono profondamente alterati. Alcuni di questi focolai sono d' origine anemica, per lesione vasale, altri su fondo infiammatorio (Fig. 17).

Questi stessi focolai poi si trovano anche nella sostanza subcorticale e nella sostanza bianca.

Nella sostanza bianca della corona raggiata si notano sostanzialmente gli stessi fatti anatomo-patologici sopradescritti; vale a dire, lento processo infiammatorio con fibre degenerate qua e lá sparse.

Nella *capsula interna* troviamo un numero considerevole di fibre atrofiche, le quali, in tesi generica, sono sparse nella capsula stessa. Il maggior numero peró delle fibre degenerate, si trova nella porzione anteriore della capsula e nella parte posteriore della sezione posteriore della stessa.

I *nuclei della base* sono profondamente lesi. Il talamo ottico in ispecial modo presenta profonde alterazioni; i vasi enormemente dilatati per arterite, moltissime cellule in preda ad atrofia, e cosí pure molte delle fibre che passano attraverso il talamo stesso. Il corpo striato in genere presenta le stesse alterazioni, ma meno avanzate.

Nei *corpi genicolati ed eminenze quadrigemini* troviamo specialmente degenerate le fibre che appartengono al tratto ottico.

Nei *peduncoli cerebrali* poi si riscontrano diverse fibre degenerate, ma é moltissimo difficile poterle riunire sicuramente in gruppi fisio-patologici. Ne troviamo nel tegmentum sopra la substantia nigra; dovrebbero essere quelle che abbiamo riscontrate sparse nella porzione posteriore della capsula. Se ne riscontrano pure nella porzione della crusta, al lato interno del fascio piramidale; dovrebbero corrispondere alle fibre degenerate del segmento anteriore della capsula interna e che ricongiungono il lobo frontale col cervelletto. Finalmente ne troviamo altre all'esterno del fascio piramidale; probabilmente sono le fibre che, senza passare nella capsula interna, congiungono i lobi occipitale e parietale col cervelletto.

Nel *ponte* si hanno moltissime fibre degenerate nella sostanza grigia, tra le fibre bianche longitudinali e trasversali della regione anteriore.

Le alterazioni del CERVELLETTO sono piuttosto difficili ad essere apprezzate, anch' esso peró é profondamente interessato. Le meningi sottili molto iniettate ed inspessite, i vasi meningei egualmente. Lo strato superficiale

atrofico; le cellule del Purkinje si colorano con grandissima difficoltà, i loro prolungamenti sono molto meno intrecciati e numerosi che nelle condizioni normali; anche queste cellule sono in preda ad atrofia. Nel limite tra primo e secondo strato poi vi è una zona atrofica molto manifesta (Fig. 18). Nello strato nucleare si nota una fortissima iniezione vasale; le cellule della nevroglia sono aumentate, molte cellule nervose in preda ad atrofia. Nello strato delle fibre nervose le lesioni sono meno manifeste, moltissime fibre però si vedono indubbiamente in preda ad atrofia e degenerazione.

Nei *nervi cranici* (vennero esaminati l' ottico, il 5°, il 7°, il 10°, il 12°) si notano i seguenti fatti: profondamente alterati i nuclei del 5° e del 10°, molto meno o quasi normali gli altri. Nelle fibre poi si riscontra la più tipica atrofia per endoneurite.

Questo stesso fatto si nota nei *nervi periferici* in genere. Si ha un' ipertrofia più o meno considerevole dell' endoneurio, mentre le fibre mieliniche mano mano cadono in atrofia. Non tutti i fascetti d' un dato tronco nervoso però sono egualmente interessati, ma la lesione si limita a certi fasci più o meno grandi. Le lesioni da me riscontrate corrispondono in generale a quelle descritte da Dayerine, Oppenheim, Siemerling (Fig. 19).

I *ramoscelli nervosi intermuscolari* sono pure colpiti da una tipica atrofia e nei preparati col metodo di Löwit si vede come la guaina midollare subisca una specie di segmentazione, la mielina si dissolve in goccie, finchè poco a poco scompare. Il cilidrasse resiste maggiormente, e più ancora la guaina perineurica, ma anch' essi subiscono tosto o tardi la stessa sorte.

Quello che abbiamo visto per i nervi periferici, in genere succede anche per le *terminazioni nervose*, di qualunque natura siano, come già comunicai in una seduta della Società Medico-Chirurgica di Bologna. Tutte le terminazioni nervose, (vennero specialmente esaminate le motrici e le tendinee) cadono gradatamente in atrofia, finchè scompaiono. Nelle *terminazioni motrici* vediamo le piastre mano mano ridursi in volume, l' ultima porzione della fibra nervea assume l' aspetto di rosario, il reticolo del cilindrasse va scomparendo, sicchè in un certo periodo le piastre sembrano costituite da un ammasso di corpicciuoli rotondeggianti corrispondenti ai rigonfiamenti terminali del cilindrasse, rigonfiamenti però i quali sono pur essi atrofici e giaciono su di un fondo leggermente granuloso, corrispondente alla collina del Doyére (Fig. 20). La guaina mielinica si spezzetta sempre più, il reticolo del cilindrasse scompare completamente, come pure gli ingrossamenti terminali, e della piastra non resta che una specie di zona chiara dove era posta (Fig. 21).

Le *terminazioni tendinee* subiscono la stessa sorte. L' ultima porzione della fibra cade man mano in atrofia, il reticolo del cilindrasse va dissol-

vendosi; restano le ultime terminazioni cespugliate a spirale o ad annella, come le ha descritte il Prof. Ciaccio, anch' esse peró piú o meno atrofiche (Fig. 22). Man mano poi l' ultima porzione della fibra che va alle piastre scompare, come pure le diramazioni del cilindrasse; non restano che le ultime terminazioni, moltissimo atrofiche, finché anch' esse si dissolvono completamente (Fig. 23). La stessa sorte tocca ai corpuscoli terminali descritti da Golgi, analoghi ai corpuscoli di Pacini (Fig. 24).

Conclusioni e considerazioni.

Dai fatti sopra descritti, sebbene sieno sempre piú necessarie nuove indagini, parmi si possano dedurre alcune conclusioni e considerazioni d' indole generale, per quanto spetta l' essenza anatomo-patologica e la patogenesi della tabe.

Innanzi tutto la tabe deve considerarsi un' affezione generale del sistema nervoso, non giá una malattia spinale. Le lesioni del midollo spinale non costituiscono l' essenza anatomo-patologica della malattia, ma il sistema nervoso é interessato in tutte le sue parti, prevalentemente nei centri sensitivi e vie sensoriali; il midollo ammala ed in modo caratteristico, ma per la maggior parte successivamente e secondariamente.

L' essenza anatomo-patologica della malattia poi, consiste in un lento processo infiammatorio, il quale secondariamente induce atrofia e degenerazione negli elementi del sistema nervoso, cellule e fibre.

La causa di tutte queste alterazioni, deve agire primitivamente per la via dei vasi. I vasi sono i primi ad ammalare, (arteriti, endoarteriti) secondariamente il processo si diffonde agli elementi del sistema nervoso. La nevroglia, quale tessuto dotato di maggior attivitá cellulare, subisce in generale o, per lo meno fino ad un certo punto del processo morboso, fenomeni di aumentata attivitá cellulare, e lo stesso si dica del tessuto connettivo nello stretto senso della parola.

Gli elementi nervosi invece, quali piú vulnerabili, patiscono presto fenomeni regressivi, cadono in atrofia e degenerazione. Con ogni probabilitá, per non dire certezza, vi deve essere un primo periodo d'aumentata attivitá cellulare, (stadio d' irritazione), il quale peró sfugge alle nostre indagini anatomiche, e noi non vediamo che il risultato ultimo, l' atrofia.

Qui si presenta subito la questione della natura di questo agente morboso, e specialmente il rapporto tra sifilide, tabe dorsale e paralisi progressiva. È questa una questione di grandissima importanza, oggi tanto studiata. Io non entro nella letteratura, perché alla portata di chiunque, e perché mi allontanerei dal mio scopo. Da parte mia peró, pur tenendo calcolo di

diversi altri fattori, (ereditarietà nello stretto senso della parola, infezioni in genere, avvelenamenti etc.) poggiato sulle mie osservazioni, poggiato sull' essenza delle lesioni riscontrate, inclino ad ammettere un rapporto genetico tra infezione sifilica, tabe dorsale e paralisi progressiva, non che uno stretto rapporto anatomico tra tabe e paralisi progressiva. Se studiamo intimamente la sifilide generale del sistema nervoso, la tabe e la paralisi progressiva, sia con dati statistici, sia dal punto di vista delle minute alterazioni, si vede come tutto tenda a far ammettere questo nesso causale ed anatomico. Le diverse manifestazioni cliniche dipendono unicamente dalla diversa localizzazione delle lesioni, e dal loro grado ed intensità. Feci già cenno di questi fatti in altro lavoro.

Quale sia la parte poi del sistema nervoso che prima ammala, è molto più difficile ad essere risolto, come pure è difficile dare una spiegazione razionale e sicuramente fondata della sintomatologia della tabe, atteso anche le limitate nostre conoscenze su di alcuni punti della fisiologia cerebrale.

Parmi però che nello stato attuale delle nostre cognizioni, sulla guida delle lesioni riscontrate, si possa, se pur non in modo assoluto, per lo meno con un certo fondamento, rispondere.

Io ritengo che la parte prima ad ammalare o per lo meno quella che prima ammala in alcuni casi e colla maggiore intensità, sia la corteccia cerebrale, e che la maggior parte delle altre alterazioni siano successive e secondarie; asserzioni queste che trovano il loro appoggio nella sede e gravità delle lesioni riscontrate, non che nella sintomatologia.

Sia in questo, che nell' altro caso da me descritto, la lesione deve essersi iniziata nel cervello. Specialmente nell' altro caso le lesioni erano limitatissime al midollo spinale (unicamente degenerata la parte centrale del fascio di Burdack), mentre quelle dell' encefalo in genere erano molto gravi. Anche in questo caso però le lesioni principali e più avanzate sono nell' encefalo, e per poterle bene apprezzare dobbiamo tenere calcolo, tra l' altre cose, della grandissima estensione su cui si sono svolte. Come già accennai in un altro lavoro, se non temessi d' essere troppo ardito e di metter fuori un' opinione completamente contraria a quanto si ammette oggi, oserei dire che la degenerazione dei cordoni posteriori nella tabe è secondaria alle lesioni encefaliche corticali: è discendente. Non si può escludere che vi siano zone corticali, od elementi della corteccia che, lesi, diano la degenerazione discendente delle fibre dei cordoni posteriori: queste fibre, una volta distrutte le cellule corticali colle quali stanno in connessione, dovrebbero cadere in una specie d' atrofia ex non usu. L' ubicazione delle degenerazioni, il fatto che l' intensità va aumentando man mano che ci portiamo in alto, parlano pure in questo senso, ed ana-

tomo-patologicamente e dal punto di vista della fisiopatologia, sono indotto sempre più a ritenere questo fatto come molto probabile.

La sintomatologia della tabe poi trova una spiegazione molto più razionale e fondata, ammettendo come essenza anatomo-patologica le lesioni del sistema nervoso in genere e dell' encefalo in modo speciale. Colla semplice lesione del midollo spinale la sintomatologia della tabe si può spiegare molto malagevolmente. D' altronde anche tutti i fatti clinici parlano per questo modo di vedere.

Senza generalizzare troppo, mi limito al nostro caso, e prendo in considerazione i sintomi più salienti del processo morboso.

Le manifestazioni da parte della vista, quasi sempre le prime ad insorgere, trovano la loro sicura spiegazione fisio-patologica nelle lesioni del lobo occipitale, talamo ottico, eminenze quadrigemine, vie ottiche in genere. La lesione però deve essersi iniziata alla corteccia, mi basta ricordare come primo fenomeno il daltonismo, la discromatopsia. Le altre alterazioni sono secondarie. Le alterazioni da parte della pupilla, più che in basso, devono trovare la loro ragione probabilmente nella corteccia, tutto al più nei nuclei della base, eminenze, nervi che vanno ai muscoli interni dell' occhio.

Le nevralgie infraorbitali, forse anche i dolori di testa, per le terminazioni del 5° nella dura madre, trovano la loro spiegazione nelle profondissime lesioni riscontrate nel 5° nella sua sede intracerebrale. Non posso qui invocare con sicurezza la localizzazione corticale, ma appena il 5° cade sotto la nostra osservazione nelle vie di conduzione, l' abbiamo riscontrato profondamente alterato.

L' atassia tabica poi deve essere in gran parte corticale od al massimo avere una patogenesi molto complessa. Sono pur troppo a tutti note le disparatissime opinioni sulla patogenesi dell' atassia dei tabetici: mi basti ricordare le vedute il Benedick, Cyon, Friedreich, Erb, Goldscheider, Strümpel. Certo che quando si consideri come finora noi non conosciamo intimamente il meccanismo per cui avviene la coordinazione fisiologica dei movimenti, si capiscono subito le grandissime difficoltà che si devono incontrare su questo punto.

Con ogni probabilità però si può asserire che l' atassia dei tabetici deve dipendere dai fattori sopra accennati. Questo concetto, pur tenendo calcolo delle altre alterazioni cui farò cenno, trova appoggio nelle lesioni riscontrate nelle cellule della corteccia e nella scomparsa delle fibre corticali d' associazione. Bisogna tener calcolo anche della scomparsa del reticolo fibrillare della sostanza grigia del midollo, che, a quanto pare, costituisce le vie di conduzione, forse ancora delle alterazioni dei nervi periferici e delle terminazioni nervose; ma ad ogni modo una delle cause prime deve risiedere nelle lesioni corticali. L' atassia dei tabici d' altra parte, presenta anche

clinicamente moltissimi caratteri dell' atassia corticale. Quanta parte possa avere la lesione cerebellare, non lo possiamo dire nello stato attuale delle nostre conoscenze. La lesione peró delle fibre che mettono in relazione il cervello col cervelletto (fibre fronto-cerebellari, e parieto-occipito-cerebellari) potranno forse, dietro ulteriori studî, gettare qualche luce su questo punto, e sulla fisiologia del cervelletto nell' uomo, purtroppo ancora un mistero.

Come abbiamo visto anche i centri motori, le vie di moto, le terminazioni motrici non sono del tutto normali. Le lesioni nelle zone motrici sono meno avanzate, le fibre della via piramidale alterate sono poche, le terminazioni motrici sono meno lese, ma tuttavia nella sintomatologia della tabe dobbiamo tener calcolo anche di questo fattore: anche qui peró il movente primo deve con ogni probabilitá partire dalle alterazioni della zona motrice.

Le alterazioni della sensibilitá in genere, per quanto limitate siano le nostre conoscenze attuali su questo punto, trovano certo miglior spiegazione nelle alterazioni riscontrate in tutto il sistema sensoriale, dalla corteccia alla periferia, che non nella semplice lesione spinale.

L' abolizione dei riflessi sappiamo quanti e quali spiegazioni abbia avuto: mi basti ricordare i lavori di Erb e Westphal. Tenendo calcolo delle nostre cognizioni attuali, pur prescindendo dai casi in cui questo fenomeno mancava, e non dimenticando per nulla gli importantissimi lavori di Westphal, la spiegazione di questo fenomeno colla semplice lesione spinale, non in tutti i casi riesce facile. Tenendo invece calcolo delle alterazioni corticali, tenendo calcolo delle alterazioni del midollo spinale, tenendo calcolo della quasi scomparsa delle terminazioni nervose tendinee, che sappiamo essere di senso, questo sintoma trova una spiegazione molto piú razionale.

Per tutti questi fatti e considerazioni io perció ripeto le conclusioni giá accennate, cioé:

La tabe deve riguardarsi un' affezione generale del sistema nervoso, non una malattia esclusivamente spinale.

Tutto il sistema nervoso é anatomicamente interessato nel processo morboso, prevalentemente i centri sensoriali e le vie di senso in genere.

La parte primitivamente lesa, con tutta probabilitá, é l' encefalo; le altre parti, tra cui il midollo, ammalano ed in modo caratteristico, ma per la maggior parte, successivamente e secondariamente.

L' essenza anatomo-patologica poi, consiste in un lento processo infiammatorio, il quale secondariamente induce atrofia e degenerazioni negli elementi del sistema nervoso.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Le figure che sono annesse a questa Memoria sono state tutte fotografate direttamente dal microscopio, eliminando il benchè minimo ritocco per cui riproducono colla massima fedeltà le preparazioni. Non è del tutto superfluo, atteso anche certe difficoltà che si incontrano nella microfotografia, ricordare per sommi capi il processo usato.

Per riguardo all' apparecchio fotografico, mi servì del modello verticale Koristka. I fotogrammi furono ricavati per la maggior parte cogli obbiettivi comuni a secco (0-4-6 Koristka), e solo per gli ingrandimenti più forti mi servì del semiapocromatico $^1/_{15}$ di Koristka e degli apocromatici di Zeiss 4,0 mm. aper. 0,95 e 2,0 mm. aper. 1,40.

L' oculare (esclusi i fotogrammi del midollo spinale) venne sempre lasciato in posto, ed usai preferibilmente l'oculare a compensazione 4; servono però bene anche i comuni oculari.

Per la luce mi servì della luce diffusa del giorno, riflessa dallo specchio del microscopio, come si usa nella comune osservazione microscopica, senza condensatore, senza proiettori e non resa monocromatica.

Esperimentai anche le diverse luci artificiali, la elettrica compresa, cercai di far le pose con luci monocromatiche, ma ultimamente ebbi i migliori negativi usando della massima semplicità. Tutto dipende da un po' di pratica e dal sagrificio di tempo, e mi sono persuaso che la microfotografia potrebbe avere maggiori applicazioni anche da noi, specialmente per queste indagini minute, nelle quali il disegno è sempre schematico e non troppo fedele.

Per le lastre mi servì generalmente delle Monckhoven, che certo sono le migliori per i lavori di microfotografia; le lastre troppo rapide servono malamente; solo per i preparati col metodo Weigert, nei quali si voleva avere la differenziazione delle tinte, adoperai le isocromatiche. Lo sviluppo fu ottenuto coll' iconogene; e le lastre in generale vennero rinforzate col sublimato. Le positive vennero tirate a luce del gas con carta Eastman senza alcun ritocco, nè sulle negative, nè sulle positive. Attaccati i singoli

fotogrammi su cartoni, venne fatta una riproduzione su lastra grande, che servì poi per la fototipia.

Fig. 1, 2, 3, 4 — Sezioni trasverse del midollo spinale. Fig. 1, porzione cervicale. Fig. 2 e 3, porzione dorsale. Fig. 4, porzione lombare. Si vedono le lesioni le più caratteristiche della tabe dorsale. Quasi tutte le fibre dei fasci posteriori sono degenerate, vi é solo qualche traccia di fibre conservate nel limite posteriore del midollo e tra il fascio di Goll e quello di Burdack. La lesione é più estesa nelle parti alte del midollo. (Metodo Weigert). Obb. 0 Koristka senza oculare $\times$ 8.

Fig. 5 — Corna posteriori. Molte cellule sono o distrutte od in preda ad atrofia. Le radici posteriori sono schiacciate, degenerate, atrofiche, il reticolo nervoso é scomparso. Obb. 6 Koristka ocul. 4 comp. $\times$ 225 Met. Weigert.

Fig. 6 — Silviana destra in preda ad endoarterite. Obb. 6. Oc. 4 comp. $\times$ 225.

Fig. 7 — Vasi meningei iniettati, che si cacciano profondamente nella sostanza cerebrale, ed in preda a lento processo infiammatorio, il quale si estende alla sostanza nervosa. Liquido Müller, carmino. Ob. 4, Oc. 4 $\times$ 180.

Fig. 8, 9, 10 — Fotogrammi dimostranti la graduale atrofia e scomparsa delle cellule nervose della corteccia. Gli elementi nervosi incominciano a perdere i loro prolungamenti, si colorano malamente, il protoplasma si rende sempre più omogeneo, finché mano mano si dissolve: non resta che il nucleo il quale subisce la stessa sorte. In altri elementi invece, specialmente negli strati profondi, vediamo l'atrofia pigmentale. 2ª circonvoluzione frontale Obb. $^1/_{15}$ Koristka. semi apocromatico Occ. 4 comp. $\times$ 550.

Fig. 11 — Nevroglia. Nei punti in cui l'alterazione é meno avanzata si vede aumentata, cogli elementi che si colorano facilmente; nelle parti invece in cui la lesione é maggiormente progredita, si mostra anch'essa atrofica, assumendo un carattere poroso-trabecolare molto manifesto. Colorazione ematossilina. Obb. 6, Oc. 4 comp. $\times$ 230.

Fig. 12 — Scomparsa delle fibre di associazione. Seconda circonvoluzione frontale. Obb. 6, Occ. 3 Koristka $\times$ 250.

Fig. 13, 14, 15, 16 — Fotogrammi d'insieme per dimostrare il diverso grado delle lesioni corticali nelle singole regioni del cervello. L'es-

senza del processo, come appare, consiste in un lento processo infiammatorio, cogli stessi fatti degenerativi negli elementi cellulari sopra notati nelle figure 8, 9, 10. La lesione è massima nei lobi occipitale e frontale, un po' minore nei lobi parietali, un po' meno ancora nella zona motrice; quest' ultima è la più conservata, specialmente nel secondo e terzo strato. La figura 13 è del lobo occipitale, la 14 del frontale, la 15 dello sfenoidale, la 16 della zona motrice. Coloraz. col carmino. Obb. 6, Oc. comp. 4 X 200.

Fig. 17 — Focolaio degenerativo nello spessore della sostanza grigia (Lobo occipitale). Obb. 4, Oc. 4 X 180.

Fig. 18 — Cervelletto. Lo strato superficiale è atrofico, le cellule del Purkinje pure in preda a leggiera atrofia; nel limite tra primo e secondo strato, una zona atrofica chiarissima. Coloraz. ematossilina ed eosina. Obb. 6, Oc. 4 X 225.

Fig. 19 — Sezione trasversa d' un fascetto nervoso del sciatico di destra in preda ad endoneurite con atrofia di fibre mieliniche. Coloraz. colla nigrosina. Obb. 4, Occ. 2 X 80.

Fig. 20, 21 — Terminazioni motrici in preda ad atrofia; la prima dal bicipite bracchiale, la seconda dal gastrocnemio. Cloruro d' oro, metodo Löwit. Apocrom. 2. mm. Aper. 1,40 Zeiss. Oc. 4 comp. X 675.

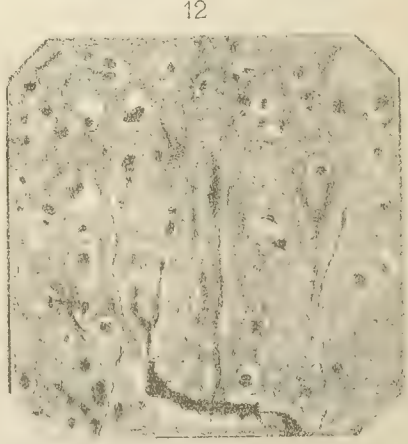
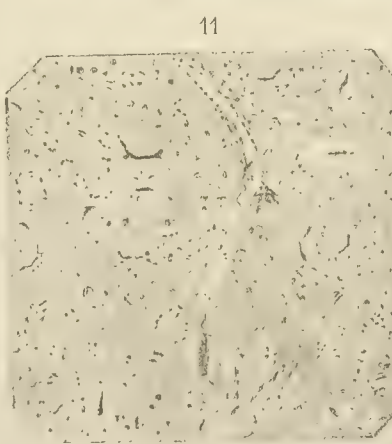
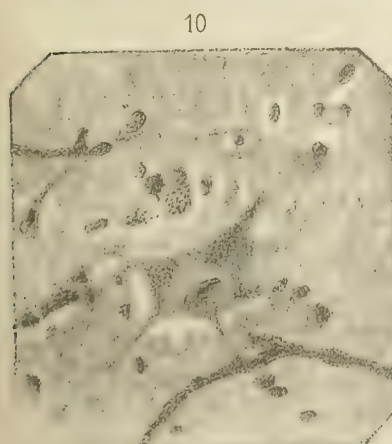
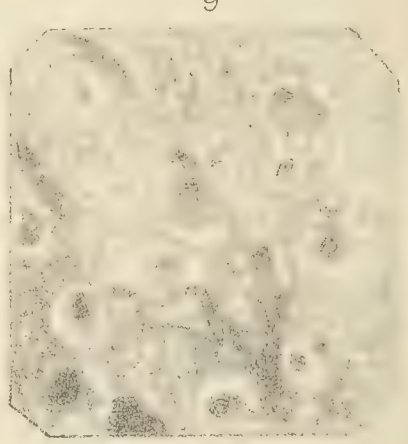
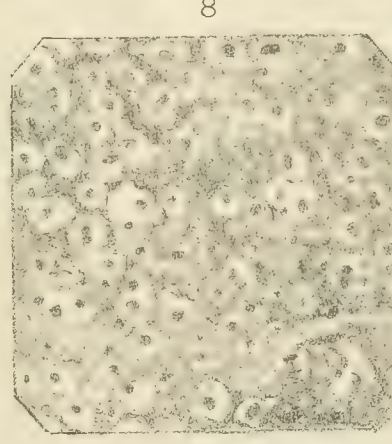
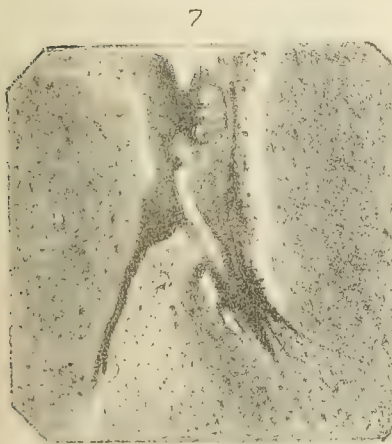
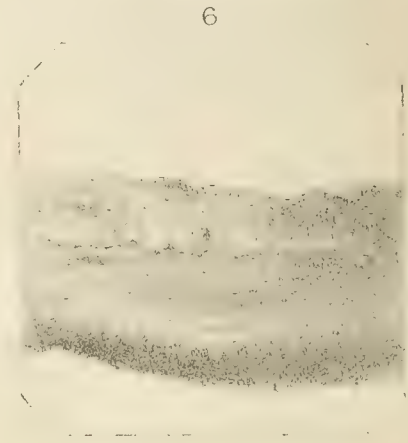
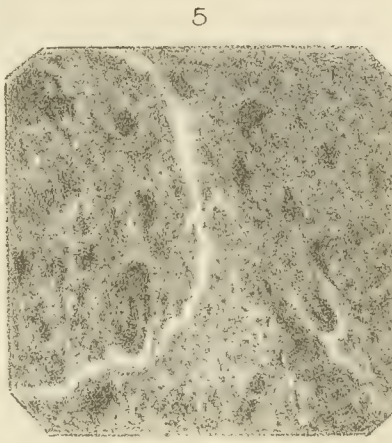
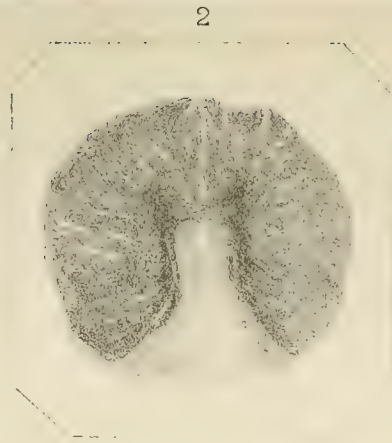
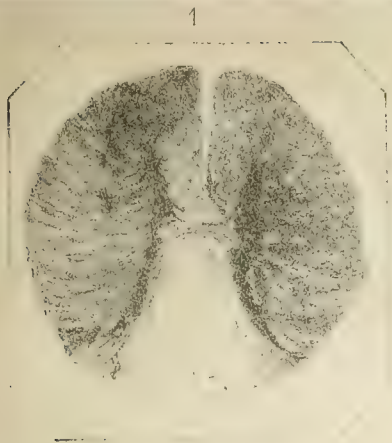
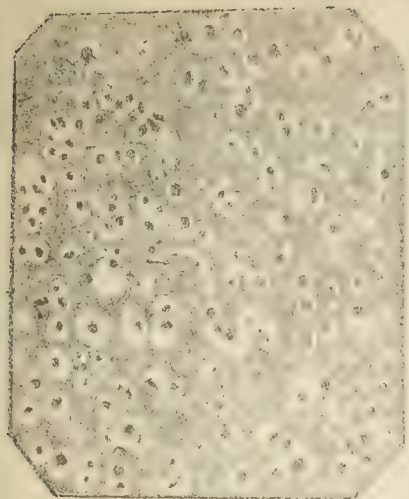
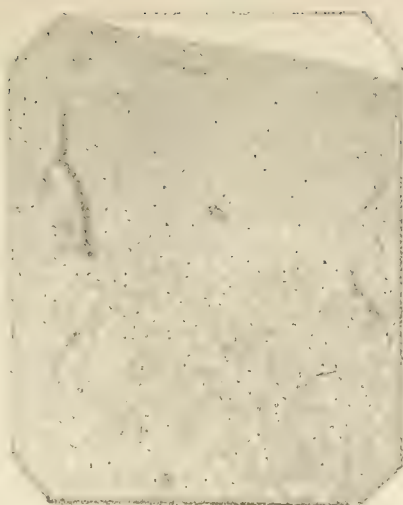
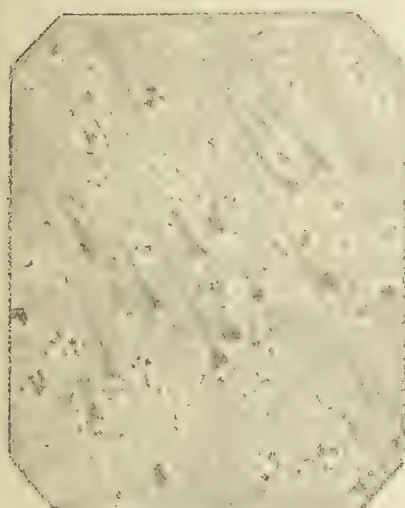
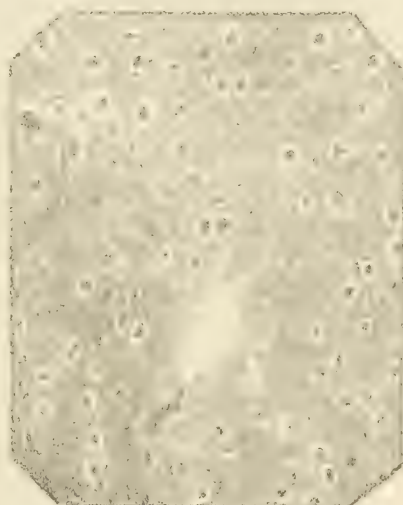
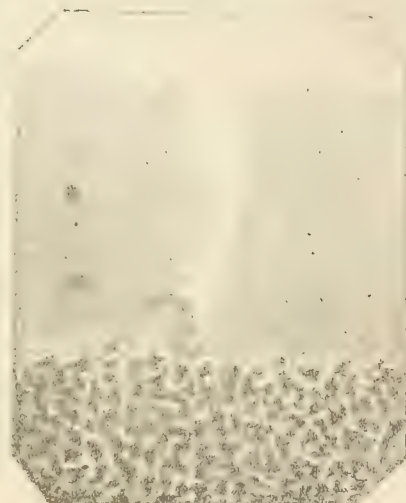
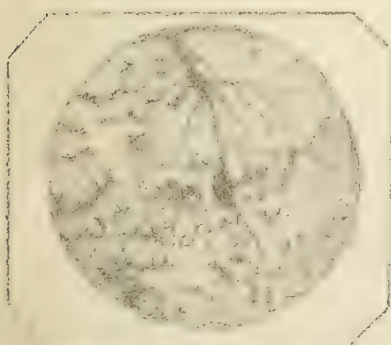
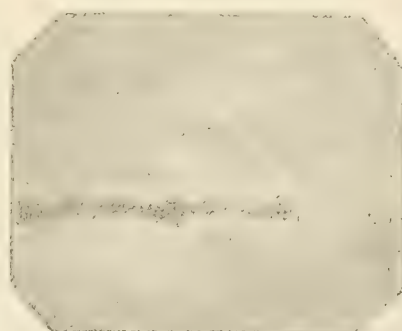
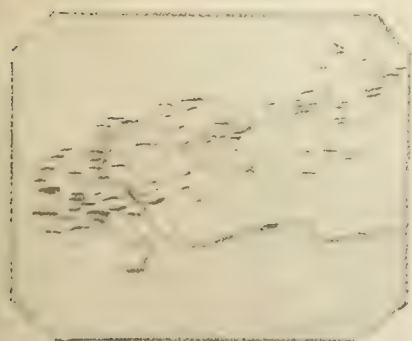
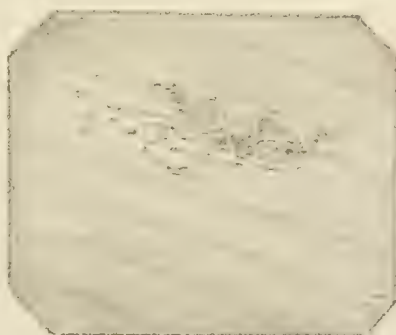
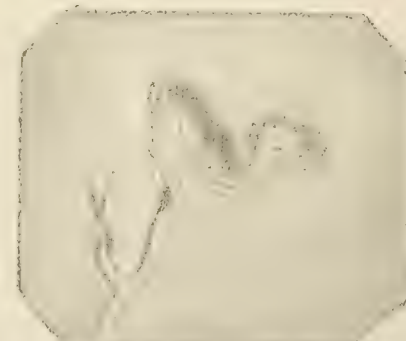
Fig. 22, 23 — Terminazioni tendinee pure in preda ad atrofia. Dai tendini degli stessi muscoli di cui sopra. Metodo Löwit. Apocr. 4, mm. Ap. 0,95 Zeiss Oc. comp. 4 X 375.

Fig. 24 — Corpuscolo terminale Golgi-Pacini pure in preda a leggiera atrofia. Met. Löwit. Obb. Apocr. 4, mm. Ap. 0,95 Oc. 4 comp. X 375.

Brazzola, Fotog. dal nat. Pio P.° Gregori, lit. lit. G. Wenk e Figli – Bologna.

Brazzola, Fot. dal nat.

Pio P.° Gregori, lit.

lit. G. Wenk e Figli — Bologna.

SPLENECTOMIA PER MILZA MOBILE IPERPLASICA

MEMORIA

DEL

PROF. GUIDO TIZZONI

(Letta nella Sessione del 26 Aprile 1891).

(CON UNA TAVOLA).

Per quanto in questi ultimi anni nei quali la Chirurgia addominale, grazie all'applicazione del metodo antisettico, ha raggiunto il suo massimo sviluppo, si sia di molto arricchita la statistica dell'estirpazione della milza, pure quest'operazione non é anche oggi cosí frequente da rendere del tutto inutile la descrizione di qualche nuovo caso. È ben vero che, in riguardo alla gravezza dell'atto operatorio, l'importanza della splenectomia è assai minore nei casi in cui viene praticata, come nel presente, per milza mobile iperplasica, che negli altri, ma, nonostante questo, l'estirpazione di un organo molto ingrossato e ricchissimo di sangue, come la milza, costituirá sempre un'operazione di una certa entitá, da meritare, anche per questa sola ragione, d'esser fatta particolarmente conoscere. Se a ció si aggiunge poi, che nell'uomo si é tuttora discordi intorno alle modificazioni del sangue che seguono alla estirpazione della milza, forse a causa delle condizioni diverse nelle quali questa operazione viene praticata, si troverá, anche per tale motivo, non del tutto superfluo il contributo di qualche nuova osservazione. La quale, finalmente, nel caso che sto per descrivere puó avere un particolare interesse per lo studio che mi ha permesso di fare dell'infezione malarica in un individuo senza milza, specie riguardo alla curva termica e alle modificazioni del sangue che caratterizzano quell'infezione.

Ecco, senz'altro, la storia clinica del caso di splenectomia che mi appartiene, e che debbo alla liberalitá e alla squisita gentilezza del ch.mo collega prof. A. Poggi allora incaricato della Direzione della Clinica chirurgica di Bologna.

Tassini Adele di anni 30, di Portomaggiore, bracciante, é accolta nella Clinica chirurgica di Bologna il 20 gennaio 1890. Essa racconta essere figlia unica di genitori che ha perduti in etá piuttosto avanzata, il padre di perniciosa, la madre di ascite da lesione di fegato, forse pure di natura malarica. Oltre alle solite eruzioni dell'infanzia, ebbe a 12 anni il vaiuolo; fu mestruata per la prima volta a 15 anni, ma le mestruazioni furono sempre irregolari, dolorose; abitando in luoghi malarici ha sofferto ripetutamente febbri intermittenti a tipo quotidiano e terzano, che peraltro cedevano prontamente al chinino; non ha mai avuto traumi nell'addome. Si é maritata a 20 anni, ma dal suo matrimonio non ebbe né figli né aborti; a 21 anno guardó il letto per un reumatismo poliarticolare; a 22 fu molestata da cefalea intensissima, prevalentemente sopraorbitale, che nei 5 anni susseguenti non l'ha quasi mai abbandonata.

Quanto al tumore addominale per il quale fu accolta in questa Clinica chirurgica, l'ammalata non sa precisare niente relativamente all'epoca della sua comparsa; dice essersi accorta fino da bambina di avere il ventre tumido e assai resistente, ma solo da due anni, dopo un breve corso di febbri intermittenti, ha rilevato la presenza nell'addome di un corpo duro, mobile, che per accrescimento lento, graduale, ha raggiunto il volume del tumore di cui oggi é questione. Questo tumore, poi, si accompagna, fino dall'epoca indicata, da un senso di peso e di molestia in tutto l'addome, e, di tanto in tanto, come ad accessi, da dolori intensissimi, che dalla sede del tumore stesso s'irradiano verso l'ipocondrio sinistro o verso i lombi; dolori che non di rado si accompagnano a vomiti, e che obbligano l'ammalata alla inazione quasi assoluta perché facilmente si aggravano o si risvegliano col lavoro, specie se questo richiede estesi movimenti di flessione e di raddrizzamento del corpo.

La Tassini é donna di statura piuttosto piccola, di conformazione scheletrica regolare, pesa il 9 luglio 1890 kili 53,800. La sua pelle ha un colorito giallognolo ed é provvista di abbondante pannicolo adiposo; le mucose sono pallide, i muscoli bene sviluppati; il sistema linfatico normale, non avvertesi, cioé, nessuna tumefazione, né delle glandule linfatiche esterne, né delle glandule ileo-addominali. Tonsille piccole; collo regolare con una circonferenza massima, in corrispondenza della cartilagine tiroide, di cent. 31; la glandula tiroide ha il volume normale. Normali gli apparecchi respiratorio e circolatorio; polso piccolo, vuoto.

Il ventre all'ispezione apparisce globoso; la linea xifo-ombellicale anzi che concava o pianeggiante si presenta leggermente convessa, e nella sua continuazione dall'ombellico al pube descrive quasi un semicerchio. — La forma dell'addome nelle sue metá laterali é irregolare, la sinistra essendo marcatamente piú sviluppata della destra; la pelle delle pareti del ventre,

specie nella sua metà inferiore corrispondente alla descritta tumefazione, è alquanto distesa e con numerose *lineae albicantes*, come nelle donne che hanno più volte figliato. Messa l'ammalata nel decubito laterale, l'addome si appiana in alto e il tumore poggia sul piano del letto. Coi movimenti respiratori la tumescenza in questione quasi non subisce spostamenti apprezzabili. Colla misurazione si hanno i seguenti resultati: la linea xifo-pubica misura cent. 33, di cui 14 la xifo-ombellicale e 19 l'ombellico-pubico; la circonferenza dell'addome in corrispondenza dell'ombellico è di 78 cent. di cui 40 per la metà sinistra, 38 per la destra; la distanza fra la spina iliaca ant:-sup: sinistra e l'ombellico è di cent. 20, quella del lato destro di cent. 19.

Colla palpazione si avverte di anormale nella metà inferiore del ventre la presenza di un tumore che occupa la regione ipogastrica e parte dell'ombellicale, e che è disposto col suo diametro massimo perpendicolarmente all'asse maggiore del corpo. Questo tumore, che si riesce facilmente a comprendere fra le mani, ha una forma ovoidale, una consistenza elastica, e presenta una superficie liscia, convessa nella sua faccia anteriore, leggermente concava, irregolare, nella sua faccia posteriore, due margini, uno superiore grosso, arrotondato, curvilineo, uno inferiore quasi rettilineo, tagliente, provvisto di due incisure, e due poli, di cui quello che corrisponde al lato sinistro del corpo è meno acuto di quello che trovasi a destra.

Colla percussione si riesce facilmente a limitare l'ottusità che corrisponde all'area del tumore, la quale misura una lunghezza di cent. 28, una larghezza di 23. Fra tumore e parete addominale sono spesso interposte delle anse intestinali, per cui colla percussione leggera, superficiale, senza, cioè, premere molto sulla parete addominale, si ottiene nel posto dell'area di ottusità accennata suono timpanico. Questo tumore è facilmente spostabile in ogni senso, anzi anche spontaneamente cambia spesso di posizione, in modo che nelle varie esplorazioni si trova, ora più in basso e a destra, ora più in alto e a sinistra. Nei movimenti che gli s'imprimono la parete addominale non segue affatto il tumore, che si può talora spingere così in alto da fargli occupare l'ipocondrio sinistro, dal quale, una volta lasciato a sè, ridiscende assai lentamente, sopratutto se la malata mantiene la posizione orizzontale. Peraltro, questa manovra di portare il tumore nello ipocondrio sinistro riesce solo quando si fa risalire quello dei suoi poli che corrisponde al lato sinistro del ventre, facendo pressione su quello che risiede a destra; così che, quando il tumore ha assunta la sua nuova posizione, il suo margine superiore convesso diventa anteriore, quello inferiore tagliente interrotto da incisure posteriore, la sua faccia anteriore si è fatta esterna, la posteriore interna, il suo polo sinistro superiore, quello destro inferiore.

Per converso, i movimenti di rotazione di questo tumore sono sempre assai limitati, e tanto che non si riesce mai a far compiere al tumore stesso un mezzo giro sul proprio asse, sia in senso verticale, sia in senso trasversale; un cambiamento di posizione, cioè, che porti a destra il polo del tumore che trovasi a sinistra, o che renda anteriore quella delle sue faccie che guarda posteriormente.

Nell'ipocondrio sinistro, quando il tumore non è ricacciato artificialmente in alto, si ha un suono timpanico; manca completamente, cioè, l'area di ottusità normale della milza. L'area di ottusità del fegato è normale; quella del rene esiste nella regione lombare di ambidue i lati; l'area dello stomaco è assai ingrandita; l'apparecchio utero-ovarico sano, senza nessun rapporto col tumore in questione. Mestruazione irregolare, piuttosto abbondante; orina normale per quantità e per componenti; solo, a causa della pressione del tumore sulla vescica, l'orinazione è molto frequente. Normale è la temperatura del corpo.

Per i sintomi obbiettivi rilevati dall'esame di quest'ammalata, specie per la forma del tumore, per essere uno dei suoi margini provvisto d'incisure, per lasciarsi il tumore stesso ricondurre con una certa facilità nell'ipocondrio sinistro, nonchè per la mancanza in questo dell'area di ottusità della milza, non poteva esservi dubbio sulla diagnosi di milza mobile. Anche intorno alla causa dello ingrossamento di quell'organo, la diagnosi non poteva presentare difficoltà. L'infezione malarica pregressa di cui ebbe a soffrire la Tassini, i risultati dell'esame del sangue più sotto riferiti, i caratteri del tumore stesso, specie la conservazione dei rapporti normali fra i vari suoi diametri, finalmente la relativa lentezza del suo accrescimento, escludono in modo positivo certe affezioni e parlano in favore di un'alterazione cronica della milza di natura malarica. E fra le varie alterazioni a cui la malaria può dar luogo nella milza, non si poteva certamente pensare ad una degenerazione amiloide, ad una milza lardacea, per la consistenza elastica del tumore, per i caratteri dei suoi bordi, per l'integrità degli altri organi della cavità addominale, e si riportava perciò quell'alterazione ad una semplice iperplasia della milza, come quella che si osserva in certe forme di tumore cronico da malaria. Quindi la diagnosi di questo caso veniva ad essere così formulata « *milza mobile iperplasica da infezione malarica pregressa* ». Non si poteva nemmeno escludere poi che tali condizioni patologiche non fossero ancora aggravate da un altro coefficiente, che nella milza mobile, causa gli stiramenti del peduncolo, in generale, il maggiore ostacolo nella circolazione reflua, si può dire non manca mai, cioè dalla iperplasia a cui per sè stessa dà luogo lo stato di congestione venosa permanente di quell'organo.

Stabilita così la diagnosi, rimaneva infine da rendersi conto della posi-

zione che aveva assunta la milza nella sua tumefazione e discesa dall'ipocondrio sinistro, poiché tale posizione era un poco differente da quella che ordinariamente suol prendere quell'organo in gradi molto avanzati di ectopia. Infatti, in molte osservazioni, in quella del Ceci (1) ad esempio, si trova nella milza ectopica superiore il margine tagliente o anteriore della milza, in questa, invece, il detto margine risiede in basso. Ciò credo debba dipendere dal fatto che qui nella discesa della milza il suo polo inferiore ha fatto punto d'appoggio nella fossa iliaca sinistra, mentre il suo polo superiore, nell'ultima fase di questa discesa, compieva un quarto di giro a destra; e invece negli altri casi, quando il polo inferiore della milza ha raggiunta l'escavazione del bacino, seguita nel suo movimento volgendo a destra e così trasformando la posizione della milza da verticale in orizzontale, per un movimento di un quarto di cerchio del suo asse verso sinistra. Nel mio caso poi non poteva supporsi che tutto ciò dipendesse da grandi modificazioni operate nella posizione di quell'organo, sia spontaneamente per bruschi movimenti della paziente, sia per manovre del chirurgo, poiché l'ammalata non fece mai grandi movimenti, nè mai avvertì notevoli cambiamenti nel tumore addominale; e nelle varie esplorazioni, come si è detto, non si riuscì mai ad operare un movimento di rotazione della milza di un mezzo giro in senso verticale, da cambiare la posizione di quell'organo per rispetto alle due metà del corpo, nè si arrivò a ricondurlo in queste esplorazioni nella sua posizione primitiva, dato che quel cambiamento fosse stato antecedentemente compiuto.

Con la diagnosi di sopra formulata e con l'esclusione nel caso nostro di un processo di degenerazione amiloide, non poteva esser dubbia l'indicazione della splenectomia, la quale, oltre che essere reclamata dalla paziente per i dolori e per l'impotenza al lavoro, veniva anche consigliata dai pericoli a cui sappiamo esporre la mobilità della milza, nonché dall'anemia che l'alterazione di quell'organo per sé stessa, indipendentemente dalle cattive condizioni igieniche in mezzo a cui l'inferma aveva sempre vissuto, doveva determinare. L'età piuttosto giovane della paziente, la mobilità della milza, erano poi condizioni molto favorevoli ad operare: la prima per lo stabilirsi più facile dei compensi all'organo asportato per parte degli altri organi ematopoetici, come lo dimostrano i risultati da me ottenuti sugli animali: la seconda perché rende la prognosi della splenectomia molto meno grave. Solo, causa delle cattive condizioni generali e dello stato profondo di oligocitemia, si volle tenere l'inferma in osservazione per un tempo piuttosto lungo, e fino a che con una cura ricostituente

---

(1) Ceci — Estirpazione di milza ectopica ed ipertrofica. Comunicazione all'Adunanza della Società chirurgica italiana a Roma, 1886.

adeguata non fossero migliorate le condizioni del sangue e lo stato del processo generale di nutrizione.

Nei giorni che precedono l'operazione si prepara l'ammalata con un purgante, si fa qualche bagno generale, si disinfetta la parete addominale con sublimato 1‰, e una volta disinfettata si mantiene asettica con fasciatura di cotone e garza al sublimato. Gli strumenti, i cuscinetti di garza, le flanelle, i fili di seta che devono servire nell'operazione sono tutti sterilizzati al calore umido, volendo in questa laparatomia attenermi strettamente, come di regola, al metodo asettico, che, ad una maggiore sicurezza nei risultati, unisce sul metodo antisettico il vantaggio di non provocare in nessun modo sul peritoneo irritazioni chimiche. Siccome poi in quell'epoca non esisteva nella nostra clinica il necessario per eseguire questa sterilizzazione, così ho dovuto provvedere nel modo che qui riferisco in breve, e solo per comodo di quei pratici a cui manchino a questo fine apparecchi espressamente costruiti, come quelli che oggi non possono mancare nelle cliniche universitarie e negli ospedali.

Le spugne di garza, le flanelle erano sterilizzate interrottamente e per il tempo voluto, entro grandi vasi da pile chiusi da un grosso strato di cotone idrofilo e da carta pergamena, nella sterilizzatrice a vapore; e come sterilizzatrice può sempre servire un cilindro di qualunque siasi metallo che possa andare al fuoco, provvisto ad una certa altezza di una rete metallica per contenere gli oggetti da sterilizzare, e nel cui fondo vi sia acqua da far bollire. Questi vasi da pila mi sembra abbiano il vantaggio sulle scatole di cartone, di cui oggi si fa uso nella clinica del Billroth per sterilizzare e conservare sterilizzati fino al momento che devono servire gli oggetti da medicatura, di una maggior durata; inoltre, permettendo una sterilizzazione al calore umido danno certamente, riguardo alla sicurezza della sterilizzazione, resultati migliori di quelli ottenuti col calore secco al quale solamente possono resistere le accennate scatole di cartone.

Il filo di seta, avvolto su rocchetti di vetro giranti su bacchetta pure di vetro, era sterilizzato entro provette ordinarie chiuse da cotone, nelle quali peraltro era stato praticato un piccolo foro laterale per il passaggio del capo del filo da svolgere, che alla detta apertura veniva fissato per mezzo del piccolo tappo di cotone che la chiudeva. Questo apparecchio ha il vantaggio di essere molto economico, anzi ognuno se lo può facilmente costruire da sè, di esser facilmente trasportabile senza pericolo d'infezione della seta. Di più, per il modo stesso col quale il filo viene preso, può quello che avanza ad una operazione, essere conservato sterile per altre, senza bisogno di tornarlo di nuovo a sterilizzare.

Finalmente gli strumenti per potere essere trasportati sterili furono sterilizzati nella sterilizzatrice a vapore ravvolti entro cotone e garza.

Il 13 luglio 1890 a un' ora e mezzo pom., coadiuvato dal personale della clinica e da quello del mio laboratorio, pratico l' operazione, presenti il sig. dott. Petronio Costetti colonnello medico e direttore dell' Ospedale di S. Orsola, il prof. Domenico Peruzzi, nonché vari assistenti di altre cliniche, chirurgi della città e studenti. Cloroformizzata l' inferma, la cui vescica orinaria era stata vuotata colla siringa subito prima che venisse trasportata nella sala d' operazione, applico il grembiale d' incerato sterilizzato, con spaccatura corrispondente al campo operatorio, eseguisco l' incisione della pelle da un dito trasverso al disopra dell' ombellico, che viene contornato a sinistra, fino al pube, quindi taglio il tessuto adiposo sotto-cutaneo, grosso 4 cent. circa e compatto assai, e, andando sempre strato a strato, metto allo scoperto il peritoneo. Praticata l' emostasi dei vasi parietali, prima provvisoria con pinze Pean, poi definitiva con lacci di seta, faccio un occhiello nel peritoneo, che dopo incido, sulla guida del dito, per tutta l' estensione della ferita cutaneo-muscolare. Sollevato allora il grande omento, si presenta di contro all' apertura addominale la milza, la quale per essere stata ricacciata in alto verso l' ipocondrio sinistro poco prima dell' operazione, si trova, rispetto all' asse del corpo, in una posizione che maggiormente si accosta alla verticale anzi che nella solita posizione orizzontale. Quindi trovo la faccia esterna della milza di contro alla ferita, il suo margine grosso, posteriore a destra, il suo margine sottile, anteriore a sinistra, il polo superiore in basso, l' inferiore in alto. Assicuratomi colla esplorazione manuale della completa libertà del viscere, cerco, facendo esercitare una modica compressione sul lato sinistro del ventre, di farlo spingere il più possibile verso destra, in modo che il suo margine sottile del lato sinistro venga a livello della ferita addominale. Ottenuto questo, faccio deprimere il bordo sinistro della ferita stessa, e con leggera pressione sul lato destro dell' addome sospingendo la milza, facilito la fuoriescita del suo bordo tagliente dalla soluzione di continuo della parete addominale, poi di tutto l' organo, evitando così di fare sopra di quello trazioni dirette, che avrebbero potuto lacerare la sua capsula.

Una volta fuoriuscita la milza dalla cavità addominale, feci fare a quest' organo un mezzo giro sul proprio asse da sinistra a destra, da ricondurlo così nella sua posizione normale e togliere la semitorsione del suo peduncolo, la quale avrebbe, per l' ostacolo sulla circolazione venosa, resa la milza stessa più tumida, più ricca di sangue e sarebbe stata d' impaccio nella legatura dei vasi splenici. Fatto questo, e mentre gli assistenti mantengono con la pressione la parete addominale addossata al peduncolo più che é possibile, esploro i ligamenti splenici, che trovo non molto lunghi, assolutamente liberi di aderenze con le intestina, e così ricchi di grasso da non lasciar vedere distintamente i vasi splenici. Per altro con l' esplo-

razione digitale si sente l'arteria splenica come un cordone pulsante grosso quanto il dito anulare, e la vena apparisce così larga che tagliata avrebbe senza dubbio potuto servire da ditale al dito pollice. In questo esame del peduncolo m'accorgo finalmente che dall'ilo della milza partono dei piccoli noduli rosso-bruni, sferici, i più grossi delle dimensioni poco superiori a quelle di un pisello, che si seguono lungo i vasi splenici tanto profondamente nella cavità addominale quanto il dito può esplorare. Questi noduli, che erano molto numerosi (ne ho potuti contare 8-10 in tutta prossimità della milza) per i loro caratteri si lasciavano facilmente riconoscere per piccole milze.

In ultimo passo alla legatura frazionata dei ligamenti della milza con anse di grossa seta. Per ottenere poi una perfetta legatura senza che nessun vaso a questa sfuggisse, ogni volta traverso il peduncolo mediante ago smusso, con due anse di filo, e mi servo di una di queste per ricondurre dalla stessa apertura l'ansa precedente annodata a uno dei suoi estremi. Subito sotto a questa sutura ne faccio una di sicurezza, dividendo il peduncolo in due parti con grosso filo di seta, quindi applico un clamp al disopra subito della parte allacciata, e su quello incido il peduncolo e distacco la milza insieme ai piccoli noduli splenici che sono in tutta prossimità del suo ilo. Finalmente pratico l'allacciatura diretta dei grossi vasi beanti, eseguisco con punti continui la sutura del rivestimento sieroso del peduncolo e, tolto il clamp, affondo il peduncolo stesso nel cavo addominale.

Per ultimo, faccio rientrare un'ansa intestinale che nelle ultime manovre era fuoriescita e che fino al momento di esser riposta era stata difesa da flanelle calde, rimetto l'omento sopra l'intestina, pratico la sutura a punti staccati e a più strati (quattro) delle pareti addominali e applico una medicatura al sublimato.

L'atto operatorio è durato un'ora, di cui 25 minuti solamente sono stati impiegati per l'escisione del viscere. In tutta l'operazione l'ammalata non ha perso un cucchiaio di sangue.

Nei giorni che tennero immediatamente dietro all'operazione, l'inferma ebbe subito a sentirsi bene; si presentava di bell'aspetto, aveva il polso abbastanza valido, regolare, la temp. sempre afebbrile con un massimo di 37.6; solo nei due giorni successivi alla splenectomia ebbe qualche dolore in corrispondenza della ferita e qualche conato di vomito, ma presto anche questi fenomeni scomparvero. Mai si notò nella Tassini la poliuria e la bulimia che molti sperimentatori, ed io fra questi, hanno osservata frequentemente nei cani privati di milza.

In 9ª giornata fu fatta la prima medicatura e furono tolti tutti i punti di sutura; la ferita si trovò perfettamente riunita per primam.

Il giorno 27 luglio, cioè 14 giorni dopo l'operazione, l'ammalata è già in grado di alzarsi dal letto.

Col giorno 29 luglio comincia peraltro un periodo febbrile a tipo terzano; la febbre entra nelle ore antimeridiane, ha sempre principio col periodo del caldo, mai con brividi di freddo, raggiunge verso sera un acme di 39.5 — 39.8 e cade verso la metà della notte, essendo la defervescenza accompagnata da profuso sudore.

Credo inutile riportare la curva termica di questo periodo febbrile che fu raccolta con molta accuratezza, perché in niente puó distinguersi da un' ordinaria terzana che decorra in un individuo non operato di splenectomia.

Questa febbre cede assai facilmente al bisolfato di chinina, ma torna di nuovo ad apparire appena si cessa dall' amministrazione di quel sale; una volta passato il periodo della febbre la malata prova uno stato di relativo benessere. L' esame microscopico del sangue, specie se questo fu colorato con bleu di metilene sciolto in siero sanguigno, dimostra la presenza degli ematozoi della malaria simili del tutto a quelli descritti da Marchiafava e Celli. Del resto esaminata attentamente l' ammalata non si trova nessuna condizione locale che possa giustificare questa febbre; la sua comparsa fu solamente accompagnata da sensazioni moleste e anche da vero dolore all' ipocondrio destro e sinistro, al primo in prevalenza, e da marcata tumefazione del fegato, che viene a debordare in corrispondenza della linea mammillare per due dita trasverse dall' arco costale e si é fatto doloroso alla palpazione.

A cominciare dal 9 agosto, dopo cura col bisolfato di chinino, la febbre perse poco a poco il suo tipo regolare; l'acme della temp. si fece poco a poco meno elevato non raggiungendo più che 38 — 38.3.

Finalmente col giorno 20 agosto la temp. ritornó stabilmente alla normale, almeno fino a che l' ammalata rimase in osservazione nella clinica. Cosí il 31 agosto la Tassini, essendosi oramai sufficientemente rifatta di forze e potendosi considerare come perfettamente guarita, fu licenziata. In questo giorno pesava kil. 46,900, avea, cioé, diminuito di peso in 52 giorni di kil. 6,900. E detratto kil. 1,830, peso della milza asportata, rimane per il termine indicata una diminuzione effettiva del peso del corpo di kil. 5 circa.

Il 14 settembre ricevo notizie che la Tassini, poco dopo tornata a casa, fu colta di nuovo da febbri intermittenti, pure accompagnate da fortissimo dolore alla regione epatica, febbri che anche questa volta cederono all' amministrazione del chinino.

Ai 15 novembre, conosco da una lettera che l' ammalata trovasi in buonissima salute; non ha avuto più febbre né dolori al fegato, gode un appetito eccellente e digerisce qualunque alimento; sopporta benissimo il lavoro, anche quello molto faticoso.

Ai 19 aprile posso visitare di nuovo la Tassini, che trovo in perfetto stato di salute. Per quanto viva sempre in luogo malarico e in condizioni igieniche cattivissime riguardo all' abitazione e alla alimentazione, pure si presenta di buonissimo aspetto, con pelle bruna rosea, polso abbastanza valido. Mi racconta che dall' ultimo attacco di febbri intermittenti del novembre non ha più avuto di queste febbri, ed è sempre stata benissimo; che ha buonissimo appetito e può digerire qualunque alimento, che sopporta benissimo la fatica e il moto, che le mestruazioni sono regolari, non dolorose nè troppo abbondanti, e finalmente che non ha più sofferto della cefalea ostinata dalla quale in passato fu per molto tempo tormentata.

Esaminata la Tassini, trovo che le glandule linfatiche non sono tumefatte, che le tonsille sono piccole, che la glandula tiroide non è ingrossata e il collo in corrispondenza di questa glandula misura una circonferenza di 29 centimetri. All' addome osservo nella metà inferiore della linea mediana una cicatrice lineare, molto solida, del tutto regolare, fortemente pigmentata come la pelle in corrispondenza dei nei materni pigmentati; di più trovo che il ventre stesso è trattabilissimo e non lascia apprezzare niente di anormale; anche il fegato è del tutto ritornato ai limiti fisiologici. Il peso del corpo della Tassini è in questo giorno di kil. 49,100.

Con quanto abbiamo fin qui esposto noi veniamo anzitutto ad aggiungere un' altra prova alla dimostrazione dell' asserto che la splenectomia per milza mobile ipertrofica è pienamente giustificata, e che questa operazione viene nel maggior numero dei casi coronata da esito felice, quando le condizioni dell' operando siano non troppo scadenti e il chirurgo adempia scrupolosamente ai precetti del metodo asettico. Dalla statistica di Adelmann (1) si aveva, infatti, per i casi di milza mobile iperplasica operati fino al 1887, su 9 splenectomie 7 guarigioni; in quelli raccolti dal D' Antona (2), e che vanno dall' epoca a cui rimonta la statistica di Adelmann citata fino all' anno decorso, si hanno 10 guarigioni sopra 11 operati: in tutto, non tenuto conto degli insuccessi non pubblicati, 17 guarigioni su 20 casi, ossia l' 85 % di resultati felici.

Oltre a ciò nella osservazione di sopra riportata, avendo io avuto l'occasione di studiare l' infezione palustre in un individuo senza milza, posso affermare che quest' organo non ha nessuna influenza su quella infezione, sia per riguardo al ciclo della febbre, sia in rapporto ai caratteri morfo-

---

(1) ADELMANN — Die Wandlungen der Splenectomie seit dreissig Jahren. Arch. f. klin. Chirurgie Bd. XXXVI pag. 442 e seg.

(2) D' ANTONA — VII Adunanza della Società italiana di chirurgia. Tenuta a Firenze dal 30 marzo al 2 aprile 1890. *Riforma medica*, anno VI, n.° 85, 12 aprile 1890.

logici dei plasmodi e alla loro sede nei globuli rossi. L'essere l'accesso della febbre intermittente, dopo l'asportazione della milza, avvenuto nella Tassini quando questa da tempo si trovava in luogo sano e lontano da centri di malaria, ci stava poi a dimostrare che nel caso nostro speciale non si trattava di una nuova infezione, ma di un semplice risveglio d'infezione pregressa. Per il che é da concludersi che non solo nella milza ma anche in altri organi, nei liberi intervalli della infezione palustre, rimangono germi di quella infezione, i quali spontaneamente o dietro certe determinate influenze, risvegliandosi, possono dar luogo a riacutizzazione del processo. Per ultimo sono da tenersi in considerazione nella mia operata i fatti della tumefazione e dell'addolorabilità del fegato durante il periodo febbrile. Già altri chirurghi avevano notato dopo la splenectomia dolori ai due ipocondri e tumefazione del fegato, ma in questi casi i fenomeni accennati, e per il tempo di loro comparsa e per il loro modo di decorrere, potevano benissimo, anche per i sintomi a cui si accompagnavano, esser riportati a fatti di cellulite del peduncolo diffusa alle parti vicine, ad iperemia collaterale del fegato etc. Solo nel caso del D'Antona (1) si ebbe ragione di ritenere che la tumefazione del fegato, la quale si accompagnó nel suo operato a un lungo periodo subfebbrile, rappresentasse una ripetizione in quell'organo dello stesso principio infettivo riscontrato nella milza; ma in questo caso l'infezione era data da uno speciale batterio anzi che dai plasmodi della malaria. Nel mio caso invece, il ripetersi del dolore e della tumefazione del fegato ad ogni nuovo accesso di febbre malarica, anche in epoche piuttosto lontane dalla praticata operazione, ci fa pensare che uno stretto legame debba esistere fra la prodotta tumefazione del fegato e la febbre palustre, e che la prima perció sostituisca e rappresenti, coi fatti che nel fegato stesso si debbono svolgere, il tumore di milza che accompagna la febbre malarica.

La milza asportata colla descritta operazione pesa kil. 1,830 e lascia scolare di sangue kil. 0,710. Offre poi le seguenti dimensioni:

Diam. longit.	cent.	21
» trasverso massimo.	»	15
» » minimo	»	11
Grossezza massima	»	9.

All'esame macroscopico tale milza apparisce di forma normale con due incisure poco profonde lungo il suo bordo tagliente e con segni evidenti di

(1) D'Antona — *Arch. ed Atti della Società italiana di Chirurgia.* Anno VI, 1890, p. 158 e seg.

mediocre perisplenite. Sul taglio, all'ingrossamento della capsula, corrisponde quello delle grosse trabecole; i corpuscoli di Malpighi non si rilevano in mezzo alla polpa, che apparisce rosso-bruna, piuttosto molle.

Al microscopio, su numerosissime sezioni fatte a varie profondità della milza, non si osservano in modo distinto corpuscoli di Malpighi; in alcuni punti si hanno piccoli accumuli di globuli bianchi a disposizione concentrica attorno a ramuscoli arteriosi con pareti molto ingrossate, che con molta probabilità, stanno a rappresentare gli ultimi resti di quei corpuscoli.

Nella polpa si trova un discreto ingrossamento delle trabecole, e anche il reticolo è traversato in tutti i sensi da cellule allungate o da piccoli fasci di questi elementi che somigliano a cellule fusate del connettivo molto lunghe, e richiamano alla mente quelle figurate dal Ceci nel lavoro in cui riferisce la splenectomia da lui operata. In certi punti queste cellule hanno il corpo e il nucleo così allungato che assumono molte apparenze delle fibre muscolari liscie.

Nella polpa e anche nelle trabecole si vedono più qua e più là accumuli irregolari di globuli bianchi; anche nelle maglie del fino reticolo del Tigri e nelle vene cavernose, in generale, predominano sui globuli rossi i globuli bianchi, fra i quali quelli con nucleo unico, grosso, vescicolare sono molto superiori per numero a quelli a nucleo frammentato. Solo in qualche parte la polpa è più ricca di sangue, che alcune volte vi forma anche dei piccoli focolai emorragici. Non ho potuto vedere in questa milza cellule con nucleo in gemmazione; per converso si è mostrata ricchissima di cellule globulifere contenenti fino ad 8-10 globuli rossi ed anche più; cellule globulifere che risiedevano, tanto nel reticolo stesso della polpa, che appariva allora dilatato, quanto nelle vene cavernose. In alcuni punti queste cellule globulifere sono così numerose che se ne vedono 4-6 vicinissime le une alle altre.

Le piccole milze asportate insieme a quella grande hanno struttura del tutto normale; presentano all'esterno della capsula corpuscoli di Malpighi e polpa in via di sviluppo come le milze neoformate del cane da me descritte e figurate in altro lavoro.

Nello studio di questo caso era naturale che io non trascurassi di vedere se e quali modificazioni si verificassero nel sangue e negli organi per l'asportazione della milza, essendo questa, come ho detto di sopra, una questione ancora molto controversa.

Riguardo al sangue si può dire, infatti, che si siano avuti nell'uomo, dopo l'asportazione della milza, tutti i reperti possibili; vi sono dei casi in cui non si è verificato nel sangue nessuna modificazione riguardo ai suoi componenti morfologici (Martin); ve ne sono di quelli, e costituiscono il maggior numero, nei quali ha prevalso l'aumento dei globuli bianchi con

o senza diminuzione corrispondente dei globuli rossi, alcune volte, come nel caso di Credé (1), col reperto di una vera anemia perniciosa e con la presenza di numerosi globuli rossi piccoli di cui alcuni nucleati (due casi di Pean, Czerny, Credé, Ceci, Can e Leonard etc.); si hanno osservazioni nelle quali si ebbe dapprima una graduale diminuzione dei globuli rossi fino da scendere, come nell'operata di Severeanu (2), da 5400000, a 2200000, eppoi un ritorno graduale del numero di queste ematie alla normale; finalmente si hanno casi, ad esempio quello ultimo del D'Antona (3), nei quali il principale reperto del sangue è stato l'aumento dei globuli rossi.

Nella mia operata, valendomi del contaglobuli e dell'emocromometro di Malassez e del cromocitometro di Bizzozero, che sono i soli strumenti per ricerche sul sangue che possegga il mio Laboratorio, ho potuto fare le seguenti osservazioni:

26 gennaio 1890 — ore 3 pom (2 ore dopo il pasto)

Globuli rossi 2600000 } 1:520.
» bianchi 5000 }
Emoglobina 82 (Cromocit. Bizzozero)
» 7 $^1/_2$ (Emocrom. Malassez).

10 luglio — ore 3 pom. (2 ore dopo il pasto); 3 giorni prima della operazione

Globuli rossi 3500000 } 1:583.
» bianchi 6000 }
Emoglobina 83 (Cromocit. Bizzozero)
» 7 $^1/_2$ (Emocrom. Malessez).

Dei globuli rossi alcuni più piccoli, più colorati, che per evaporazione del siero presto diventano stellati, altri più pallidi, più grandi, e che più difficilmente degli altri subiscono modificazione di forma. Mancano i globuli rossi nucleati. Globuli bianchi se ne vedono tanto a nucleo unico grosso, quanto a nucleo frammentato. Piastrine sembrano normali per numero e per forma.

22 luglio — ore 3 pom. (2 ore dopo il pasto); 9 giorni dopo la praticata operazione

Globuli rossi 3840000 } 1:480.
» bianchi 8000 }
Emoglobina 86 (Cromocit. Bizzozero)
» 8 $^3/_4$ (Emocrom. Malassez).

(1) Credé — Ueber die Extirpation der kranken Milz am Menschen. Arch. f. klin. Chirurgie Bd. XXVIII, pag. 401 e seg.
(2) Severeanu — Extirpation der Milz. Arch. f. klin. Chirurgie Bd. XXXVII p. 661.
(3) D'Antona — *Riforma medica* loc. cit.

Pochi globuli rossi grandi e pallidi, la massima parte di dimensioni medie, che per evaporazione del siero prendono presto una forma spinosa. Mancano globuli rossi nucleati; globuli bianchi delle due varietà indicate; piastrine presso a poco normali.

16 agosto — ore 4 pom. (3 ore dopo il pasto), 33 giorni dopo la splenectomia.

Globuli rossi 4000000 }
» bianchi 6000 } 1:666.
Emoglobina 89 (Cromocit. Bizzozero)
» $9\frac{1}{4}$ (Emocrom. Melassez).

Reperto microscopico del sangue eguale a quello dell'osservazione precedente.

30 agosto — ore 4 pom. (3 ore dopo il pasto), 47 giorni dopo l'operazione.

Globuli rossi 4100000 }
» bianchi 6000 } 1:683.
Emoglobina 91 (Cromocit. Bizzozero)
» $9\frac{1}{2}$ (Emocrom. Malassez).

All'esame microscopico sempre lo stesso reperto.

19 aprile 1891 — ore 3 pom. (2 ore dopo il pasto)

Globuli rossi 5500000 }
» bianchi 16000 } 1:343.
Emoglobina 99 (Cromocit. Bizzozero)
» $10\frac{3}{4}$ (Emocrom. Malassez).

Mancano globuli rossi nucleati. La massima parte dei globuli rossi sono di grandezza media, assai colorati, e si raggrinzano facilmente per aumento di densità del siero; globuli bianchi, tanto a nucleo unico grosso, quanto a nucleo frammentato; piastrine normali.

Riassumendo adesso queste osservazioni, nel nostro caso dopo l'asportazione della milza si ha come fatto più saliente, per rispetto al sangue, un graduale aumento del numero dei globuli rossi con aumento corrispondente della quantità di emoglobina. Per i globuli bianchi si sarebbero avute poche variazioni nel loro numero; la loro diminuzione apparente nelle prime osservazioni dopo la splenectomia sta indubbiamente in rapporto coll'aumento del numero dei globuli rossi; le ulteriori variazioni non escono dai limiti delle oscillazioni fisiologiche.

Per questo il nostro reperto del sangue, specie avuto riguardo alle modificazioni quantitative dei globuli rossi, si accosterebbe a quello dell'ultimo

caso del D'Antona più che ad altri; con la sola differenza che nell'osservazione del D'Antona l'aumento di numero delle ematie sarebbe stato incomparabilmente più rapido che nel presente, essendo salite in 9 giorni da 3200000 e 4800000.

Le differenze dei resultati che si ottengono sul sangue in seguito alla asportazione della milza io credo, come ho già accennato, dipendano dalle condizioni diverse nelle quali si eseguisce questa operazione, per rispetto allo stato della milza, ad esempio, all'età dell'operando, alla perdita più o meno abbondante di sangue nell'atto operatorio, alle complicanze nel decorso dell'operazione e via dicendo. Così io ritengo come molto probabile che nel mio caso il mancato aumento del numero dei globuli bianchi, che in molti operati ha tenuto dietro alla splenectomia, possa spiegarsi colla distruzione dei corpuscoli di Malpighi rinvenuta nella milza asportata; la quale, per questo difetto di apparecchi linfatici, non avrebbe più ridestato con la sua asportazione una funzione vicariante nelle glandule linfatiche. Dall'altro lato l'aumento graduale del numero dei globuli rossi da me constatato nella presente osservazione, ci è facilmente spiegato con un'esagerazione della funzione del midollo delle ossa da me anotomicamente dimostrata nel cane dopo la splenectomia, ma più specialmente per la diminuita distruzione dei globuli rossi che il reperto microscopico ci ha provato avvenire su larga scala nella milza asportata.

Anche riguardo alle possibili modificazioni indotte negli organi, come fatto di compenso alla mancanza della milza ammesso da alcuni sperimentatori e da alcuni chirurgi, non ho lasciato di fare nella mia ammalata speciale riscontro. Nella mia operata esaminata accuratamente e per lungo tempo non si ebbe, nè tumefazione della tiroide, come Credè avrebbe veduto nel suo, nè ipertrofia delle tonsille, come nel caso di Ceci, nè ingrossamento delle glandule linfatiche, come molti avrebbero constatato; nè sarebbero stati notati, finalmente, dolori lungo le ossa come segno d'iperemia, di tumefazione del midollo osseo. Solo si sarebbe constatato un ingrossamento transitorio del fegato, ma sul significato di questo mi pare non possa esservi dubbio, nè altro ho da aggiungere a quanto sopra è stato detto in proposito.

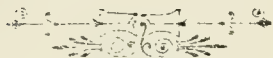
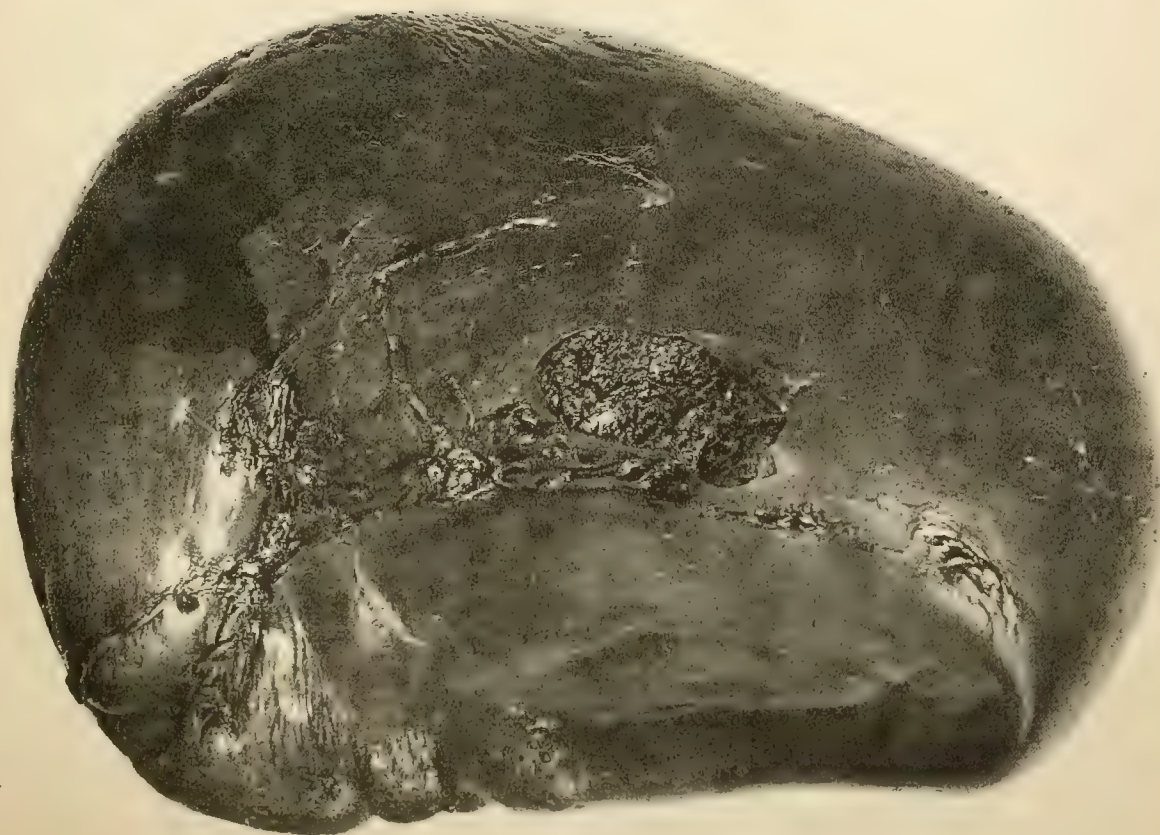
Perciò il mio caso di splenectomia appoggerebbe le mie conclusioni sperimentali sull'asportazione della milza, che sono quelle del resto della maggioranza degli sperimentatori odierni, cioè, che la mancanza di quell'organo non induce modificazioni apprezzabili nella tiroide, nel fegato, nelle glandule linfatiche, e solo determina nel midollo delle ossa un'iperemia, un'eccitazione o un risveglio della sua funzione ematopoetica.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. — Ammalata prima di essere operata di splenectomia: la linea nera sul ventre segna il contorno della milza.

Fig. 2. — La stessa dopo l' operazione.

Fig. 3. — Milza asportata veduta dalla sua faccia interna — Fotografata a $^3/_4$ circa della sua grandezza naturale.

PHOTOLITH u. DRUCK v. C. ANGERER & GÖSCHL, WIEN.

CONTRIBUZIONE ALLO STUDIO

DELLE VIE D'ELIMINAZIONE

DALL'ORGANISMO DELLO STAFILOCOCCO PIOGENO AUREO

MEMORIA

DEL

PROF. GUIDO TIZZONI

(Letta nella Sessione del 26 Aprile 1891).

Mentre la letteratura medica é già molto ricca di ricerche e di cognizioni sulla via d'ingresso nell'organismo dei batteri patogeni e sulla loro localizzazione, mentre é conosciuta per alcuni di quelli la possibilità di passare dal focolajo primitivo nel sangue e di dare metastasi in diversi organi, poco é accertato, invece, riguardo al modo di difesa dell'organismo animale stesso di contro a questi batteri una volta penetrati nel corpo.

All'infuori di certe infezioni localizzate, nelle quali é noto che i batteri sono espulsi direttamente dall'organismo insieme ai prodotti patologici da loro determinati, é oramai riconosciuta per altre infezioni la possibilità di una distruzione di questi batteri nel corpo, e sia nei tessuti, sia nel sangue, nonostante si discuta ancora sul meccanismo di questa distruzione e sull'agente che la determina.

Ma queste, per altro, non possono essere le sole vie per le quali l'animale si sforza di riuscire vittorioso nella lotta cogli infinitamente piccoli, e per le quali riesce nel fatto a superare molte infezioni; poiché il primo dei risultati accennati non puó conseguirsi che in casi del tutto speciali, e per il secondo non tutti i batteri trovano nell'animale, specie se penetrati nel sangue, le condizioni per questa loro distruzione. È quindi probabile che l'organismo animale in alcuni casi cerchi anche con altri mezzi di liberarsi dai batteri che l'attaccano, e che dalla loro primitiva localizzazione sono penetrati nel torrente circolatorio, ma quali siano propriamente questi altri modi di difesa dell'uomo e degli animali contro quelle infezioni, finora non é dato poterlo affermare, mancando osservazioni in proposito.

Per questo io credo non del tutto privo d'interesse il caso di setticemia da stafilococco piogeno che io ho potuto studiare e che qui riferisco,

perchè da questo caso si riesce appunto a conoscere che allorquando mancano nel sangue, come nell'infezione rammentata, condizioni per la distruzione dei rispettivi batteri, l'organismo animale cerca liberarsene coll'eliminarli dal corpo per alcuni degli emuntori naturali.

Tali risultati poi, non solo hanno interesse per la scienza, come quelli che indicano la via di eliminazione dal corpo di certi microrganismi, ma devono riescire anche molto importanti per le applicazioni pratiche che da questi si possono dedurre. Ed invero, in questa come in molte altre infezioni, nessuna indicazione terapeutica potrà riescire più efficace, più scientifica, di quella che provoca e seconda quei mezzi naturali che l' organismo mette in opera per conseguire la guarigione.

L' osservazione che io ho potuto fare in riguardo alla questione indicata è la seguente.

Rinaldo Testoni di Corticella presso Bologna, muratore, di anni 20, entra nella 2ª Sezione chirurgica di questo Spedale il giorno 19 Settembre 1890. È giovane di costituzione robustissima, senza precedenti ereditari, che mai ha contratto infezione sifilitica. Nell'aprile di quest'anno ebbe vari furuncoli all' antibraccio sinistro, che si ripeterono interrottamente in quella parte fino ai primi di agosto, e che lasciarono come reliquato una leggera infiltrazione e un po' di arrossamento della regione rammentata.

Il giorno 13 Settembre, mentre accudiva al suo lavoro di muratore, battè inavvertitamente col ginocchio sinistro contro la traversina di un carretto, peraltro non così forte da risentirne in quel momento dolore molto intenso e di lunga durata e da averne rotta la pelle.

Il giorno 14 Settembre, appena si alza da letto, avverte dolore forte nel ginocchio contuso, dolore che da questo s' irradia per buona estensione verso la gamba e verso la coscia, e che si esacerba nei movimenti di quell' articolazione.

A cominciare dal giorno 15 Settembre si accende la febbre, che entra al mattino con brividi di freddo, e raggiunge alla sera temperature molto elevate; e contemporaneamente il ginocchio contuso si fa tumido, la gamba corrispondente edematosa. Sono applicate, per ordinazione del medico, diverse mignatte alla parte dolente.

Alla prima visita che feci a quest' ammalato il giorno 20 Settembre, trovo febbre piuttosto alta, che nella sera precedente mi si dice era stata accompagnata da delirio vago; il ginocchio sinistro mediocremente tumefatto, senza arrossamento della pelle corrispondente; sotto il ginocchio rammentato, nella regione della gamba che corrisponde alla parte superiore della faccia interna della tibia, osservo una chiazza rossa, della estensione di una moneta da 5 franchi all' incirca, allungata secondo l' asse maggiore dell'arto e con un punto fluttuante nel centro; probabilmente è la parte

con la quale il malato ha urtato contro il carretto; la gamba sinistra é tutta ingrossata per mediocre infiltrazione edematosa; i gangli crurali dello stesso lato sono un poco tumefatti e dolenti; il cuore é normale; al polmone solo qualche rantolo umido; la milza non viene esattamente limitata per non muovere troppo l' infermo, ma non deborda l' arco costale; l' area di ottusitá del fegato normale; il tubo gastro-enterico sano. Applico impacco al sublimato a tutto l' arto, e prescrivo cartine di antipirina per la febbre.

Il 22 Settembre si sono diffusi i dolori dall' articolazione del ginocchio sinistro a quella dell' arto inferiore destro e alle grandi articolazioni degli arti superiori. Questi dolori si risvegliano al più piccolo movimento e non si accompagnano, né a tumefazione apprezzabile, né ad arrossamento delle articolazioni dolenti. Quindi, se si fa astrazione dalla lesione primitiva del ginocchio sinistro, questi dolori danno alla malattia tutta l' apparenza di un reumatismo poliarticolare. La febbre seguita ad esser sempre alta, non cede affatto all' antipirina, che viene sospesa, ed é spesso accompagnata da delirio tranquillo. Il malato quasi di continuo é bagnato da sudori profusi.

Alla sera di questo giorno, mediante siringa Tursini sterilizzata, si aspira un po' di liquido dalla articolazione del ginocchio sinistro. Il liquido aspirato é citrino, piuttosto trasparente, con tutti i caratteri di un essudato sieroso.

Il microscopio dimostra in questo essudato la presenza di un discreto numero di globuli bianchi e di cocchi liberi; culture piatte in gelatina e culture per strisciamento su agar dimostrano in questo l' esclusiva presenza dello stafilococco piogeno aureo.

23 Settembre. Artrotomia. — Pratico un' incisione longitudinale da ambo i lati del ginocchio, dal quale esce dapprima siero limpido o quasi, poi un liquido cremoso con tutti i caratteri della marcia. Evidentemente, per l' immobilitá della posizione, il pus si era diviso in due strati, i globuli purulenti essendosi raccolti nella parte più bassa della cavitá articolare. Esplorata col dito questa cavitá, si trovano le cartilagini d' incrostazione ancora liscie, del tutto integre. Si passa allora un grosso drenaggio attraverso l' articolazione, che viene lavata abbondantemente con soluzione di sublimato all' 1 $^0/_{00}$.

Per ultimo, con un terzo taglio, do evacuazione alla piccola raccolta di pus notata nella parte superiore della faccia interna della tibia e applico al ginocchio e alla gamba una medicatura umida al sublimato.

Dopo l' operazione la febbre non cade, anzi si mantiene molto alta, con un acme di 39,5-40,3 C., e con remissioni al mattino fino a 38,2; — in generale la curva termica seguita nel suo andamento, simile a quello di una

febbre tifoide, seguitano il delirio, i sudori profusissimi. Solo diminuisce l'edema della gamba, e diminuiscono poco a poco i dolori delle articolazioni dell'arto inferiore destro e degli arti superiori, per ultimi quelli dell'articolazione della spalla destra.

26 Settembre. — Persiste lo stato gravissimo dell'infermo; di nuovo si nota solo la presenza di una eruzione vescicolosa miliare alla pelle, diffusa a tutta la superficie del corpo, ma che è in special modo confluente al collo, alle parti superiori e laterali del torace; gli arti sono in generale i meno interessati da questa eruzione, e gl'inferiori in grado minore dei superiori. Questa eruzione poi è costituita da piccole vescicole, di cui le più grosse arrivano alle dimensioni di un grano di miglio, dapprima trasparenti, come goccie piccolissime di siero, poi perlacee, finalmente del tutto opache, bianco-giallognole. Alcune di queste vescicole, specie nei punti dove sono maggiormente confluenti, come al collo, sono circondate da un alone rosso non molto largo; il maggior numero risiedono su pelle del tutto sana, cioè nè arrossata nè infiltrata. A questo periodo la malattia offre tutti i caratteri di quella che qualche anno indietro i medici designavano col nome di miliare; febbre alta irregolare, con remissioni mattutine, col tipo di una febbre tifoide, stato adinamico, facile il delirio, qualche dolore articolare, sudori profusissimi con odore speciale, eruzione vescicolare miliare alla pelle. Invece, per il quadro clinico e per l'esame batteriologico da me fatto era chiara la diagnosi di setticemia da stafilococco piogeno aureo con artro-sinovite purulenta, traumatica, del ginocchio sinistro.

Nonostante il profuso sudore, l'orina è assai pallida e piuttosto copiosa; la sua quantità nelle 24 ore oscilla fra Litri 2,300 e Litri 2,500; peso specifico 1,014; caratteri fisici normali; assenza di albumina.

Sterilizzata la superficie della pelle con soluzione di sublimato, quindi lavata con alcool, si raccoglie con ago di platino il contenuto di diverse delle vescicole descritte e si fanno culture piatte in gelatina e culture in agar per strisciamento. Tanto dalle vescicole a contenuto trasparente, quanto da quelle a contenuto opaco-giallognolo, si ottiene sempre una cultura pura di stafilococco piogeno aureo.

Dopo questi resultati, naturalmente, per impedire nel nostro ammalato un'autoinfezione, ho praticato alla superficie del corpo, nel modo più largo che potevo, impacchi con soluzioni deboli di sublimato.

Raccolta l'orina asetticamante, nella quantità di 200 cc. circa, questa dimostra all'esame microscopico un buon numero di cocchi, e nelle culture piatte solo colonie di stafilococco piogeno aureo.

Le culture dello stafilococco piogeno ottenute dall'orina e dalle vescicole della pelle, sembrano, peraltro, avere una minore vitalità di quelle che si ottengono ordinariamente dal pus, almeno se devo giudicare dal loro modo

di comportarsi nella vita saprofitica, le prime non essendo già più suscettibili di ulteriori trapianti fino dalla loro 3ª generazione.

29 Settembre. — Seguita come nei giorni precedenti lo stato gravissimo dell' infermo. Ai fenomeni di sopra accennati si è aggiunta epistassi piuttosto abbondante. L' antipirina amministrata di nuovo non ha, anche questa volta, nessuna influenza sull' andamento della febbre. La quantità di marcia che scola dal ginocchio operato è, presso a poco, la stessa di quella dei giorni precedenti.

Col 1° Ottobre scadendo il mio servizio non ho potuto continuare ulteriormente questa osservazione. In rapporto alla quale ho potuto conoscere, peraltro, che, perdurando lo stato setticoemico gravissimo, l' ammalato morì il 5 Ottobre, dopo essere stato amputato alla coscia il giorno precedente.

Lo studio di questo caso conduce pertanto alla conclusione, che nella setticemia determinata dallo stafilococco piogeno, questo microrganismo può eliminarsi dal corpo per mezzo della pelle e dei reni. Questo risultato, come abbiamo detto, riesce di non piccolo interesse per la scienza e per la pratica. Dal lato scientifico, infatti, sono ben note le controversie che si hanno sulla possibilità di eliminazione di batteri dal corpo da organi sani, attraverso membrane vascolari integre, e l' oscurità che regna tuttora sulle vie che dovrebbero servire a questa eliminazione.

Il Wyssokowitsch, e con lui molti patologi, negano questa eliminazione di batteri per le membrane filtranti, mentre, invece il Philipowicz, il Maffucci e Trambusti avrebbero trovato bacilli dell' antrace costantemente e in buon numero nell' orina degli animali carbonchiosi; Neumann ed altri, bacilli dell' Eberth nell' orina di alcuni casi di tifo.

Per quanto riguarda poi in modo speciale i piogeni, il Passet avrebbe constatato nei topi il passaggio dello stafilococco aureo dal sangue nel secreto congiuntivale, l' Escherich nel latte delle mammelle di donne lattanti, e il Longard, confermando i risultati dei due autori sopra citati, avrebbe espresso inoltre la possibilità del passaggio di questi parassiti attraverso il rene normale.

Nel mio caso, adunque, verrebbe per la prima volta dimostrata una eliminazione dello stafilococco piogeno aureo per la pelle e per il rene. Se questa eliminazione poi fosse preceduta, accompagnata o susseguita da alterazioni di quelle parti, io non posso nè affermarlo nè escluderlo in modo assoluto, non avendo potuto studiare questo caso dal lato anatomico.

Peraltro, se si considera che la pelle non mostrava nessuna alterazione apprezzabile, all' infuori di una esagerazione nella secrezione del sudore e della conseguente formazione delle vescichette miliari descritte, e che l' orina, meno la presenza dei piogeni, avea tutti i caratteri dell' orina normale e non conteneva albumina, si deve ritenere come molto probabile,

almeno all' epoca delle mie ricerche, che l' eliminazione di quei piogeni si facesse da parti normali.

Riguardo ai precetti pratici che dal caso descritto si possono dedurre, alcuni si riferiscono all' igiene, altri alle indicazioni terapeutiche di questa infezione.

La presenza di piogeni nell' orina, nelle vescicole della superficie del corpo, e presumibilmente anche nel sudore, impone in modo assoluto l' allontanamento di questi ammalati dalle sale comuni degli ospedali, e la loro separazione in stanza d' isolamento, anche quando, come nel caso presente, sia possibile garantirci dal focolajo primitivo; richiede la disinfezione dell' orina e una disinfezione molto rigorosa della biancheria. Infatti queste biancherie inquinate di piogeni, che devono facilmente disseccare alla loro superficie, possono, una volta smosse, contaminare l' aria ed essere indirettamente causa d' infezioni in ammalati che si trovino nella stessa sala, od anche contagiare direttamente questi infermi quando vengono per una seconda volta adoperate senza essere state, prima di lavarle, rigorosamente sterilizzate.

Inoltre questa eliminazione dei piogeni per la pelle e per il rene dimostrandoci per quali vie l' organismo animale cerca di liberarsi di quei batteri che inquinano il sangue, e conseguire la guarigione, c' indica che nella infezione settica il principale precetto terapeutico dev' esser quello di favorire questa eliminazione attivando la funzione di quelle parti.

Questo puó sembrare poco a taluno cui sorrida ancora l' idea in queste infezioni di un' antisepsi interna, certo é molto, almeno fino a che queste aspirazioni non siano ancora realizzate, per chi considera che finora di contro alla setticemia restiamo spettatori impotenti, incapaci di agire in modo certo sull' elemento causale di essa. Anche la demolizione dell' arto quando l' infezione si é dichiarata io ritengo con molti che niente possa; anzi in questi casi cadendo il coltello di necessitá su punto infetto, molto spesso il chirurgo non fa coll' amputazione che sostituire al vecchio focolajo d' infezione uno nuovo, forse del primo piú pericoloso perché situato in mezzo a tessuti meno alterati che l' altro, e che perció meglio si prestano all' assorbimento del virus settico.

Del resto in questo mio ammalato é molto probabile che la lesione del ginocchio non segnasse la via d' ingresso dello stafilococco piogeno aureo nell' organismo, ma invece una delle manifestazioni o localizzazioni secondarie della setticemia; é probabile, cioé, che i micrococchi piogeni esistessero nel corpo allo stato latente fino dall' epoca in cui il malato ebbe all' antibraccio sinistro numerosi furuncoli, e che solo per opera del trauma fossero richiamati al ginocchio sinistro e in questo formassero un focolajo molto piú grave ed esteso che nelle altre articolazioni.

La mia conclusione poi riguardo alle indicazioni terapeutiche nella setticemia non credo possa essere oppugnata dall' esito della malattia nel giovane soggetto di questo studio, il quale appunto andò a morte nonostante fosse per molti giorni in preda a sudori profusissimi ed eliminasse abbondantemente piogeni per la pelle e pei reni. È ovvio che se finora nella setticemia niente avvi di meglio che di assistere la natura nella eliminazione dei piogeni dal corpo, ed a questo bisogna perciò in ogni caso provvedere, non potremo poi con questi mezzi attenderci grandi miglioramenti o guarigioni altro che in quei casi in cui il processo è del tutto incipiente nè ha determinato ancora profonde lesioni degli organi, ed è non troppo grave.

Per ultimo, volendo discutere se il fatto da me descritto della eliminazione dei piogeni dal corpo sia un fatto che si verifichi con una certa frequenza, ovvero se rappresenti una eccezione, io credo, tenendo conto, in mancanza d' indagini batteriologiche, dei risultati della osservazione clinica, che debba verificarsi con una certa frequenza. Non è nuova nè rara l' osservazione di forme di reumatismo poliarticolare che hanno un decorso irregolare e maligno, di forme setticoemiche per focolai profondi che andarono inavvertiti e che somigliano molto a forme di febbri tifoidee, colle quali molto spesso vennero scambiate, e nelle quali, come nelle prime, alcune volte si ha una risoluzione, o un tentativo di risoluzione, per crisi che si annunzia ordinariamente con profusi sudori e con vescicole di sudamina.

Che quelle forme di reumatismo articolare poi possano esser determinate dai piogeni invece che dal pneumococco del Fränkel lo dimostra un caso da me descritto (1) ed altri studiati dopo, nei quali fu appunto rinvenuto nelle articolazioni ammalate e nel sangue la presenza di piogeni; lo dimostra questo stesso caso, nel quale per effetto di quegli stessi piogeni che originarono la suppurazione del ginocchio sinistro, si ebbero nelle altre articolazioni semplici fenomeni di reumatismo poliarticolare. Ed è pure conosciuto a questo proposito il significato di benignità che i medici di qualche decennio addietro davano a questa forma di miliare secondaria.

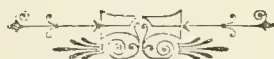
Inoltre conosco, per comunicazioni verbali, che questa mia osservazione è già confermata da altra analoga fatta nella Clinica del Billroth dal D'Eiselsberg, e dal Dott. Brunner di Zurigo: osservazioni che vennero fatte conoscere solo recentemente a Berlino al Congresso dei Chirurgi tedeschi.

Nel caso della Clinica del Billroth si trattava di setticemia per osteo-

---

(1) Tizzoni e Mircoli — Della infezione setticoemica specialmente di quella determinata dallo streptococco piogeno. Memorie della R. Acc. delle Scienze di Bologna: Serie IV, Vol. IX. Fas. I, pag. 99-100.

mielite del femore, che fu accompagnata a un certo periodo della malattia da sudori profusissimi, e nella quale furono constatati piogeni in gran numero nel sangue e nel sudore. L' ammalato aveva rifiutato di essere operato prima che venisse in scena la setticemia; e quando consentì l' operazione, credo dello svuotamento dell' osso, la disinfezione locale non poteva più influire sull' infezione generale, nè valse quindi ad evitare l' esito infausto. Questa osservazione ha il vantaggio sulla mia di essere stati constatati i piogeni nel sangue, mentre nella mia, che del resto ha sull' altra la superiorità di aver indicato l' apparecchio orinario, oltre la pelle, come via d' eliminazione dei piogeni, quei microrganismi furono rinvenuti solo nel focolajo principale e nelle vie d' eliminazione, non furono cercati nei punti intermedi. L' osservazione del Dott. Brunner si riferisce a un caso di setticemia nella quale si sarebbe trovato lo stafilococco piogeno aureo e albo nel sangue, e lo stafilococco albo nel sudore. Inoltre il Dr. Brunner avrebbe dimostrato, col mezzo di esperimenti, che il contenuto delle vescicole le quali si formano nei polpastrelli delle zampe dei gatti e nel naso di alcuni animali dopo l' iniezione di pilocarpina contengono batteri patogeni e non patogeni (bacillus anthracis, stafilococco aureo, micrococcus prodigiosus) coi quali era stato precedentemente infettato o inquinato l' animale.

Bologna, 20 Aprile 1891.

RESULTATO ULTIMO DI UN ESPERIMENTO

SULLA

RICOSTRUZIONE DELLA VESCICA ORINARIA

MEMORIA

DEI PROFESSORI

GUIDO TIZZONI E ALFONSO POGGI

(Letta nella Sessione del 26 Aprile 1891)

(CON UNA TAVOLA).

In una precedente comunicazione (1) furono già esposti sommariamente i primi resultati di un nostro esperimento, che mirava a ricostruire la vescica orinaria asportata, col mezzo di un' ansa dell' intestino tenue.

Ricapitoliamo qui in poche parole l' esperimento da noi eseguito, per poterlo metter meglio a confronto coi risultati avuti dalla sezione di questo animale.

22 Giugno 1888. — Con taglio mediano si apre ad una piccola cagna la cavità addominale, e s' isola un' ansa dell' intestino tenue della lunghezza di 7 cent. circa, che, svuotata del suo contenuto e sterilizzata accuratamente con una corrente di una soluzione di ac. fenico al 3 %, si chiude ne' suoi estremi e si fissa con un punto di sutura al davanti della vescica.

Riunita la ferita dell' intestino con sutura circolare, si richiude l' apertura delle pareti addominali.

Di questa operazione l' animale guarì benissimo e in pochi giorni.

23 Luglio 1888. — Aperta nuovamente la cavità addominale con taglio mediano, si cerca l' ansa d' intestino isolata, che si trova al davanti della vescica, fra questa e il pube. Rotte le deboli aderenze che la fissavano alle parti vicine, si constata che quest' ansa è benissimo nutrita dai vasi del suo mesentere, ma che è divenuta più corta e più sottile di quando fu separata dal resto del tubo intestinale. Allora si distaccano dalla vescica i due ureteri, s' isolano per qualche centimetro *e si porta via tutto il corpo*

---

(1) Tizzoni e Poggi — Die Widerherstellung der Harnblase. Clb. f. Chirurgie 1888. N. 50.

della vescica. Fatto questo, si apre nella sua estremità inferiore l' ansa intestinale isolata, e invaginatala nel collo della vescica, previamente dilatato, si fissa a questo mediante doppio ordine di sutura, la prima a punti staccati, la seconda continua. Per ultimo, seguendo il metodo già da uno di noi messo in pratica con buon risultato in altra occasione, s' innestano gli ureteri nella parte inferiore dell' ansa intestinale che doveva sostituire la vescica asportata, si assicura con un catetere elastico lo scolo dell' orina, e si riunisce la ferita addominale con sutura.

L' animale sopportò assai bene anche questa seconda operazione, e presto tornò ad esser vivace e a mangiare con buon appetito; la ferita addominale guarì rapidamente; l' orina, sebbene l' animale si portasse via la siringa nella prima notte che seguì l' operazione, continuò a scolare goccia a goccia dall' uretra.

Nella prima settimana che tenne dietro all' operazione, l' incontinenza dell' orina fu completa, per quanto di tanto in tanto l' animale si mettesse in posizione per orinare, e qualche volta emettesse una piccola quantità d' orina, circa un cucchiaio da caffè. Ma dopo 15 giorni, questa incontinenza poco a poco cessò; ciò che avvenne prima per le ore del giorno poi per quelle della notte, solo che per un certo tempo la emissione dell' orina fu molto frequente, e la quantità emessa ogni volta assai piccola.

Col trascorrere del tempo, peraltro, anche questa frequenza anormale dell' orinazione poco a poco sparì, e la quantità dell' orina emessa ciascuna volta si fece assai maggiore che per lo innanzi, presso a poco eguale alla quantità che suole emettere un cane della medesima taglia non operato.

In tal modo risanato il nostro animale, in niente si poteva distinguere da uno che non avesse subita nessuna operazione; era vivace, ben nutrito, anzi piuttosto grasso, orinava nella posizione consueta, e non più frequentemente di altro cane sano di controllo; l' orina veniva emessa con getto regolare.

Durante il tempo nel quale la detta cagna stette in esperimento mai dette segno di malattia.

Per tre volte rimase pregna, e ogni volta sopportò benissimo la gravidanza, e figliò a termine dei piccoli sani e robusti.

Solo verso la metà dell' anno decorso la nostra cagna divenne piuttosto magra, per quanto mangiasse abbondantemente e con eccellente appetito; in seguito, peraltro, tornò ad ingrassare, e fino all' ultimo parto, che avvenne verso la fine dell' anno decorso, si mantenne sempre in buonissimo stato di nutrizione.

Finalmente alla mattina del 16 gennaio 1891, senza che l' animale avesse prima mostrato segni di vera e propria malattia, fu trovato morto nella sua gabbia.

Autopsia — Il pannicolo adiposo sotto-cutaneo é piuttosto scarso e poco consistente. La cicatrice della parte media inferiore dell' addome é segnata appena da una linea bianca resistente, del tutto regolare, senza nessuno smagliamento.

Non fu fatto l' esame dei centri nervosi. Gli organi della cavitá toracica sono normali.

Aperto l' addome il peritoneo si presenta sottile, lucido, come quello di un cane sano. L' omento é infiltrato di poco grasso; ricuopre le intestina fino al $^1/_3$ post. dell' addome e aderisce col suo margine libero alla parte anteriore della cicatrice delle pareti addominali. Nessun liquido si rinviene nel fondo della cavitá peritonale. Fegato normale. Milza piccola, dura, con capsula molto inspessita, disseminata di una quantitá grandissima di fibromi sclerosati. Al taglio quest' organo apparisce pure indurato per ingrossamento delle sue trabecole connettive; la polpa é scarsa, piú bruna dell' ordinario; i corpuscoli molto piccoli, alcuni appena rilevabili. Tubo gastro-intestinale sano; le intestina non presentano anormali aderenze, fuori di alcune molto lasse che, come vedremo, legano per piccola parte alcune porzioni del tenue all' ansa distaccata e innestata sulle vie orinarie. Esaminato accuratamente tutto l' intestino non si riesce piú a distinguere il punto dal quale fu escisa un' ansa.

I fatti di maggiore importanza in questa sezione si trovarono, com' é naturale, all' esame dell' apparecchio uropoetico. Subito dietro il corpo del pube, al posto della vescica orinaria asportata, si trova un cuscinetto adiposo lassamente aderente per un lato alla parete addominale, per l' altro ad un corpo piriforme contenente nell' interno un liquido; corpo che risiede quasi per intiero nella escavazione del bacino, e che, per dirlo subito, sta a rappresentare un nuovo serbatojo dell' orina, una nuova vescica.

Fatta accurata preparazione anatomica da presentare all' osservazione tutto l' apparecchio uropoetico nel suo decorso e nei suoi rapporti cogli organi vicini, ecco quanto si rileva (fig. 1). Procedendo nella descrizione dalle parti esterne verso le interne troviamo dapprima l' uretra lunga 3 cent., di aspetto del tutto normale. All' uretra fa seguito il corpo piriforme sopra accennato, che ha una posizione piú bassa, cioé, che si nasconde di piú nella escavazione del bacino, di una vescica normale, e che per un passaggio graduale si continua coll' uretra dalla parte del suo polo piú acuto.

Questo corpo, che, come abbiamo detto, si riconosce subito per un nuovo serbatojo d' orina, ha una parete piuttosto sottile, contiene nell' interno un liquido, e, nello stato di distensione nel quale fu trovato, misura in lunghezza 52 mill. e in larghezza 37 mill. Sul polo superiore di quel corpo s' impianta molto solidamente il pezzo d' intestino innestato, che dalla nuova vescica si dirige per buon tratto direttamente in avanti verso lo stomaco, per

piegare a sinistra e dirigersi di nuovo indietro nell' ultima sua porzione, con la quale forma così un' ansa molto serrata simile nella sua disposizione alle due canne d' un fucile.

Tutto il pezzo dell' intestino innestato riposa sulla matassa intestinale, con la quale, come fu detto, ha contratto debolissime aderenze, ed è provveduto del suo mesentere da cui riceve sufficiente nutrizione. La superficie dell' intestino è liscia, lucida, solo un po' più rugosa verso il suo estremo libero; la sua parete è come contratta, assai più sottile delle anse intestinali del tenue ancora in posto; la sua cavità apparisce al tatto completamente vuota.

Dall' estremo inferiore dell' ansa intestinale innestata, in immediata vicinanza del punto d' unione di questa con la nuova vescica, si distaccano i due ureteri, ambidue dalla stessa altezza, all' incirca, dell' ansa intestinale, ciascuno regolarmente dal lato a cui deve corrispondere.

Dal loro punto d' impianto poi i due ureteri, di cui quello del lato sinistro è un po' più sottile di quello del lato destro, si dirigono obliquamente in avanti e all' esterno.

I due reni appariscono normali, solo il destro mostra il bacinetto un po' dilatato.

Sezionate le parti descritte, si trova prima l' uretra della lunghezza indicata, con leggiera pieghettatura longitudinale della sua mucosa che apparisce normale (fig. 2). Coll' estremo interno dell' uretra si continua il collo della vescica, che ha la forma d' imbuto, e che è provvisto di pliche le quali sono continuazione di quelle dell' uretra e che da questa si dirigono verso il corpo della vescica in modo raggiato. Il punto poi nel quale si trova lo sfintere della vescica è così ben marcato che subito si rileva anche con un' osservazione molto superficiale.

Il corpo della vescica, quando questo è stato aperto e disteso, appunto come nella fig. 2, ha una lunghezza di 50 mill. e una larghezza di 65 mill.; la sua parete ha una grossezza di 5 mill. La superficie interna di questa vescica offre un aspetto trabecolare per solchi e cordoni rilevati che s' intrecciano in vario senso.

Nella parte più alta della vescica, nel punto, cioè, nel quale abbiamo visto che s' impianta il pezzo d' intestino, si trova un cercine assai rilevato, che sporge nella cavità vescicale stessa, e che rappresenta l' estremo posteriore dell' ansa intestinale innestata.

Questo cercine stabilisce un limite netto fra la mucosa della vescica e quella dell' intestino, e circoscrive un' apertura di circa 3-4 mill. di diametro, per la quale la cavità della prima comunica con quella del secondo.

L' ansa intestinale è perfettamente eguale all' intestino non distaccato, solo, come abbiamo detto, un poco più sottile di questo per essere la sua

cavità sensibilmente ristretta; le pareti di quest' ansa intestinale innestata sono grosse come quelle delle altre, e lasciano distinguere nettamente una tunica interna mucosa, avente in tutta la sua estensione l' aspetto vellutato e villoso che l' è proprio.

Subito al disopra dell' impianto sulla vescica dell' ansa intestinale, si vede nella superficie interna di questa lo sbocco dei due ureteri, che sporgono nella sua cavità in forma di due lunghe papille. Con piccola sonda elastica bottonata si constata che i due ureteri in corrispondenza del loro estremo vescicale, anzi in tutto il loro tragitto, sono pervi; solo si trova che mentre l' uretere del lato sinistro traversa direttamente la parete dell' intestino, quello del lato destro lo traversa in modo assai obliquo, camminando per brevissimo tratto fra tunica e tunica intestinale.

All' esame microscopico abbiamo i seguenti risultati:

I due reni hanno struttura normale; anche il destro, che mostra un grado leggero d' idronefrosi, non presenta dilatazione dei tubuli, alterazione delle cellule epiteliali e dei glomeruli, reazione del connettivo interstiziale, come si osserva quando si ha una stasi orinaria a grado avanzato e che dura da un certo tempo.

Dei due ureteri il sinistro è assolutamente normale; il destro offre una leggera dilatazione del suo canale, di cui la sua parete, peraltro, mostra ancora le villosità che le sono proprie, e un mediocre ingrossamento della sua tunica muscolare.

L' ansa intestinale innestata, al microscopio non può distinguersi in niente da una qualunque del tenue di un animale che non abbia subita nessuna operazione; si hanno villi, glandule, mucosa, tunica muscolare del tutto uguali a quelli di un intestino in posto.

La nuova vescica è costituita da 3 strati, uno interno mucoso, uno medio muscolare, e uno esterno fibroso. La mucosa è sottile, ricca di vasi e disseminata di un buon numero di cellule rotonde, in alcuni punti raccolte in forma di noduli che somigliano a follicoli linfatici; è ricoperta di un epitelio cilindrico stratificato, e provvista di numerose insenature o glandule semplici, se così chiamar si vogliono, tappezzate dal medesimo epitelio. La tunica muscolare è formata da fasci di fibre muscolari liscie, che decorrono in tutte le direzioni e si decussano fra loro nel modo più svariato; in alcuni di questi fasci si osservano fibre con nuclei divisi in più parti da sottili linee trasversali o a superficie gibbosa, come quelli che frequentemente si trovano nei nuclei delle fibre nervose e muscolari, e che sembrano rappresentare figure nucleari mal fissate. Essendo il pezzo stato immerso in liquido di Müller e indurato in alcool, non abbiamo potuto con la dimostrazione delle figure cariocinetiche togliere questo fatto assolutamente fuori di discussione. La tunica esterna è costituita da tessuto fibroso piuttosto stipato, assai povero di cellule.

In corrispondenza del punto d' impianto dell' intestino si trova che l' epitelio della nuova vescica cessa in modo netto là dove l' estremo inferiore di quell' ansa forma il cercine che abbiamo descritto, dal quale ha principio, invece, la disposizione villosa della mucosa intestinale.

Nella tunica media, per contro, si osserva che i fasci muscolari dell' intestino per un certo tratto s' intrecciano in vario senso con quelli della nuova vescica.

In corrispondenza del collo della vescica, per ultimo, alle fibre muscolari liscie della tunica muscolare, si aggiungono, nella sua porzione più esterna, delle fibre muscolari striate, che presentano segni di attivissima moltiplicazione nucleare, tanto da mostrare in alcuni punti dei veri accumuli dei così detti nuclei del sarcolemma, fibre striate che vanno man mano crescendo di numero a misura che ci si avvicina dalla vescica all' uretra mentre diminuisce, per contro, il numero e la grossezza dei fasci delle fibre liscie.

Nell' uretra abbiamo la mucosa rivestita da epitelio pavimentoso con i suoi infossamenti o glandule rivestiti dello stesso epitelio; all' esterno della mucosa un grosso strato di connettivo compatto, povero di cellule, quindi uno strato muscolare formato da fasci di fibre muscolari liscie e striate, con predominanza di queste ultime.

Qui nella mucosa, subito sotto l' epitelio, si trovano accumuli di globuli bianchi, nettamente circoscritti, simili del tutto a follicoli linfatici, assai più numerosi e più caratteristici, peraltro, di quelli rinvenuti nel collo e nel corpo della vescica.

Nella milza si ha perisplenite con numerosi fibromi sclerosati, splenite indurante, limitata non solo alle grosse trabecole connettive, ma diffusa anche al reticolo della polpa. I corpuscoli di Malpighi sono piccoli, deformati, la polpa contiene numerose cellule globulifere e pigmentifere.

Dopo quanto è stato esposto, se riandiamo adesso sulla storia di questo animale, noi possiamo concludere in generale che l' esito immediato e successivo di questa operazione fu oltremodo fausto, avendo la piccola cagna vissuto come animale sano per 2 anni $\frac{1}{2}$, ed essendo morta certo non per la conseguenza lontana della subita operazione. Questo infatti è escluso, e dal modo subitaneo della morte, e dall' aver trovata la nuova vescica piena d' orina, e dalla dimostrazione da noi ottenuta della completa libertà delle vie orinarie. È vero che il rene destro era leggermente idronefrotico, ma non essendo tale lesione bilaterale nè molto grave, non poteva certamente dar luogo alla morte per uremia. Se poi si rammenta a questo proposito che noi abbiamo trovato pervio tutto l' uretere destro e assolutamente normale il rene corrispondente, noi siamo autorizzati a ritenere che quella leggera idronefrosi dipendesse da lieve e non assoluto ostacolo che l' orina

poteva trovare nel suo deflusso per il decorso molto obliquo dell' uretere destro attraverso la parete dell' intestino, o per compressione che nella gravidanza il corno destro dell' utero avesse esercitato sul corso dell' uretere indicato, il quale per una accidentalità qualunque era appunto stato passato nell' operazione al davanti anzi che al didietro del rispettivo corno dell' utero.

Se poi indaghiamo la ragione del successo di tale esperimento, questa non possiamo davvero riportarla all' innesto del pezzo d' intestino, che, contro la nostra aspettazione, rimase del tutto passivo, indifferente nella formazione della nuova vescica, e servì solo a complicare l' esperimento e ad allungare la via alla eliminazione dell' orina.

Il successo dell' operazione deve invece attribuirsi al fatto di essersi formata una nuova vescica dall' ultima porzione delle vie orinarie, vescica, che, salvo la sottigliezza della sua parete muscolare, aveva tutti i caratteri anatomo-istologici di una vescica normale e ne rivestiva tutte le funzioni; era capace, cioè, di contenere l' orina in modo assoluto, e di emetterla ad intervalli, a getto del tutto regolare.

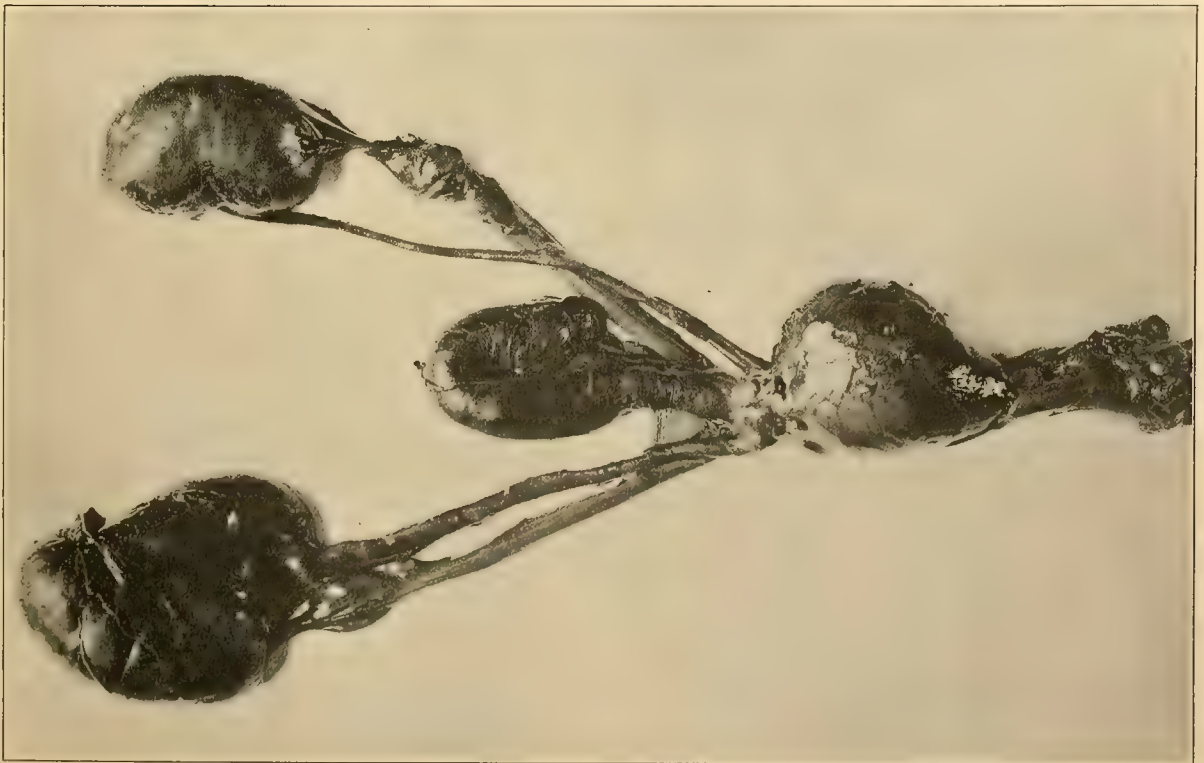
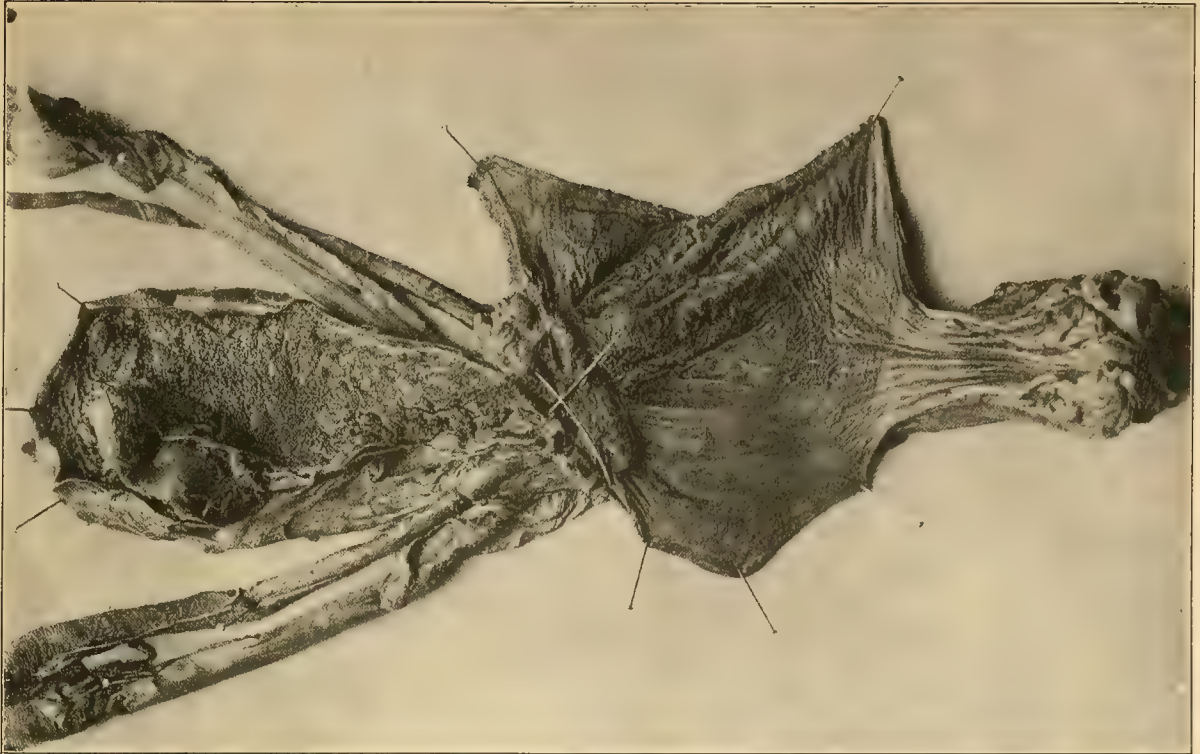
Da quale parte poi questa vescica si sia formata anche è facile poterlo dire. Infatti il corpo della vecchia vescica fu completamente asportato nella operazione, e nel suo collo vi fu invaginata l' ansa intestinale e saldata a quello mediante sutura. È dunque al disotto del collo o da porzione di questo e dalla prima porzione dell' uretra che dev' essersi rigenerata questa vescica, come lo prova ancora il fatto della sua posizione molto profonda, della presenza nel nuovo collo vescicale di fibre muscolari striate, che si continuano con quelle che circondano l' uretra, e finalmente dalla dimostrazione nella mucosa della vescica di specie di follicoli linfatici che si trovano egualmente, per quanto più caratteristici e in numero maggiore, nella mucosa dell' uretra.

Per questo noi possiamo argomentare fin d' ora che lo stesso risultato felice si sarebbe ottenuto in questo esperimento se i due ureteri fossero stati direttamente innestati nell' uretra; tanto più che prove successive ci hanno dimostrata la possibilità di questo innesto.

In ogni modo, se questo sperimento può dirsi fallito riguardo al concetto della ricostruzione della vescica coll' intestino, esso riesce per altra parte di grande importanza, perchè *dimostra la possibilità della rigenerazione della vescica con tutti i suoi caratteri anatomo-istologici e con tutte le sue attribuzioni funzionali, ciò che finora non era assolutamente conosciuto.*

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. 1ª — Apparecchio uropoetico con la vescica orinaria rigenerata, leggermente distesa da orina. Fotografata a $^2/_3$ di grandezza.

Fig. 2ª — Lo stesso preparato, della figura precedente, ma aperto nel mezzo per lasciare vedere la superficie interna dell' uretra, della vescica, e lo sbocco dei due ureteri nell' estremo inferiore dell' ansa intestinale innestata. Fotografata quasi a grandezza naturale.

PERCHÈ IL SALASSO FOSSE GIÀ PENA MILITARE IGNOMINIOSA

NOTA

DEL

Prof. ALFONSO CORRADI

(Letta nella Sessione del 26 Aprile 1891).

Fra le annotazioni, che Aulo Gellio metteva insieme stando in Atene nelle lunghe sere d'inverno, e colle quali componeva le sue *Notti Attiche,* una ve n'ha intorno al salasso riguardato castigo ignominioso per i soldati.

Cotesta era usanza antica; ma egli, per quanto avesse cercato ne' vecchi libri, non ne avea potuto trovare la ragione: e però credeva che in origine il trarre sangue non fosse già una punizione, bensì un espediente di cura nei soldati torpidi, od in qualsiasi modo non del tutto in istato naturale; appresso il rimedio divenne castigo perchè applicato ad altri difetti, ad altre colpe, quasi non sano dovesse reputarsi, chi commetteva alcun fallo o crimine; *quasi minus sani viderentur omnes qui delinquerent* (1). Memorabile sentenza, a cui non badò la *nuova scuola criminale,* sebbene quella compendi tutta la dottrina di coloro pe' quali il delitto non è che segno od effetto di malattia del corpo, la dottrina cioè degli stoici, che chiamavano i vizi malattie dell'animo. Ma la spiegazione del Grammatico romano, se è ingegnosa, non vale a farci capire in qual modo avvenisse tale trapasso od applicazione da uno ad altro ordine sì diverso di fatti.

I.

Parecchi commentatori, non paghi delle parole di Gellio, hanno procurato di chiarire altrimenti la cosa. Nel secolo XII Giovanni di Salisbury,

(1) « Fuit haec quoque antiquitus militaris animadversio, jubere ignominiae causa militi venam solvi et sanguinem dimitti, cujus rei ratio in litteris veteribus, quas equidem invenire potui, non extant: sed opinor factum hoc primitus in militibus stupentis animi atque a naturali habitu declinantis; ut non tam poena quam medicina videretur. Postea tamen ob pleraque alia delicta idem factitatum esse credo per consuetudinem, quasi minus sani viderentur omnes qui delinquerent ». (GELLII AULI, Noctes Atticae Lib. X, Cap. VIII).

mentre che riferiva il detto passo come se fosse di Plinio, notava che il salasso pur essendo divenuto punizione, era emenda di lievi colpe, né mai di carattere ignominioso (1), laddove che Aulo Gellio pone proprio la *sanguinis dimissio* fra le *ignominias militares* colle quali i soldati venivano castigati. L' erudito giurista napoletano Alessandro Alessandri, morto nel 1523, restringeva tale castigo ai soldati più audaci, temerari o sventati, affinché tolta la sovrabbondanza del sangue, queglino meglio potessero contenersi intra *gyrum rationis* (2). Ma allora cosa restava di vituperevole al provvedimento, se questo in sostanza era un mezzo di cura? E come Gellio potevalo dirlo ignominioso, se l' ignominia era la massima tra le correzioni militari, siccome l' ammonizione la minima? (3). Per il Muret sarebbe stata la pena dei vigliacchi, i quali avrebbero così perduto vergognosamente quel sangue, che non vollero spargere con onore per la patria (4). Da questo parere, scostavasi il P. Gio. Antonio Valtrini, contemporaneo del celebre umanista francese, che con bell' ordine ed elegantemente scrisse della milizia degli antichi romani: per lui il salasso era propriamente il rimedio della paura, l' opposto quindi di quello che lo voleva il D' Alessandro, correttivo cioé, come abbiamo sentito, della soverchia impetuosità, dell' audacia (5). E peró nell' uno e nell' altro caso dovremmo supporre che l' antica disciplina militare avesse tali riguardi da precorrere la stessa medicina, e con gli argomenti di essa accomodasse l' esercito in guisa da contenere la spalvaderia, da incitare l' ignavia.

Oppone Giusto Lipsio al Mureto che anche i ladri venivano puniti col salasso; quindi chi mai vorrebbe dire fosse loro tratto quel sangue, che avrebbero dovuto dare per la patria? (6) Per altro Antonio Thysius faceva osservare all'oppositore, che se il salasso fu dapprima pena per il furto, in seguito ad altri delitti poté essere simile pena applicata; egli anche aggiun-

---

(1) « Nam levioris culpae non erat ignominiosa animadversio, etsi nec illa ex vigore disciplina militaris dissimulatione locum relinqueret » (Sarisberiensis Joannis, Policraticus: sive de Nugis Curialium, et Vestigiis Philosophorum Lib. VI. Cap. XII. Lugduni Batav., 1595, p. 303).

(2) Alexandro (Ab) Alexandri, Genialium Dierum Lib. II, Cap. 13. Lugduni Batav., 1673, I, 368.

(3) « Inter animadversiones militares levissima est admonitio, castigatio minor, deprensa (*reprehensio?* ovvero *depensa*, multa speciale?) major, ignominia maxima. Ideo milites in quos lege militari, castigatione aut admonitione animadversum est, non propterea ignominia notati erant » (Ibid.).

(4) « Se (Aulo Gellio) igitur putare id (salasso) factum, quasi minus sani viderentur omnes qui delinquerent. Ego autem potius id factum puto ut sanguinem quem cum gloria fundere pro patria noluerant; eum cum ignominia amitterent (Mureti Marci Antonii, Variarum Lectionum Lib. XIII, Cap. 20. Antverpiae 1587, p. 360).

(5) « Sanguinis mittendi consuetudinem inde ortam puto, quod in subito pavore medici sanguinem mitti iubeant: ut ergo pavoris ac timiditatis ignavos milites arguerent, sanguinem mittebant. Postea usus obtinuit, ut in quocumque delicto sanguis mitteretur » (Valtrini Joan. Ant., De Re militari Veterum Romanorum Libri septem. Coloniae 1597, p. 393, Lib. VI, Cap. 8).

(6) « Sed rogo, te Marce, in furto sic castigato (Cato dixit) quis sanguis pro patria fundendus fuit? » (Lipsi Justi, De Militia Romana Lib. V, Dial. 18, Op. omn. Antverpiae, 1637, III, 216).

geva potersi ben credere dovessero perdere del proprio sangue coloro, che avevano rifuggito dallo spargere quello de' nemici (1). Laonde se ne dovrebbe dedurre che il salasso per riescire pena condegna avrebbe dovuto finire collo svenamento; ma il filologo di Leida sì poco insisteva su tale opinione, da non esser alieno dall' accettare quella del Lipsio medesimo, il quale non lasciava aperte le vene che tanto da averne modica emissione di sangue (2). L' eruditissimo Gronov dissentiva con parole alquanto acerbe dal Muret e dal Thysius, nè dissentendo chiariva bene il suo pensiero (3); il quale, oscuro o no, non trovò grazia presso Gerardo Sichterman, che decisamente attenevasi alla sentenza del Lipsio, cioè che il salasso stava come segno o vestigio dell' estremo supplizio, che per effetto di clemenza si riduceva alla cavata di poco sangue (4); la spiegazione parevagli sì adatta e persuadevole da dire: *nihil clarius, et militaribus moribus convenientius*. Se non che può proprio credersi conforme alla vita e alla disciplina militare, che la pena capitale andasse a finire in una cavata di sangue?

Il principale argomento in appoggio dell' opinione del Lipsio, lo darebbe Frontino, il quale, dopo aver detto che ai soldati scoperti ladri veniva recisa la mano destra, soggiunge che, volendo usare più mite castigo, facevasi loro trarre sangue (5). Lasciando da parte che questo brano dello scrittore dei militari stratagemmi ha diverse lezioni, e quindi può essere diversamente interpretato (6), è manifesto ch' esso riguarda altra punizione

---

(1) « Sed pro Mureto responderi posset originem hanc poenae fuisse, sed postmodum tralatitiam factam esse. Etiam alia quoque ratio addi potest, ut illi qui in hostili sanguine fundendo parci, vel meticulosi fuissent, suum sanguinem amitterent » (Auli Gellii, Noctes Atticae cum selectis novisque commentariis et accurata recensione Antonii Thysii J. C. e Jacobi Oiselii J. C. Lugduni Batav., 1666, p. 518).

(2) « Potuit interea quoque esse nota meritae mortis, ut Lipsius censet, sed clementer condonatae, cujus species erat sanguinis missio modica » (Ibid).

(3) « Mihi videtur olim hanc unam vel ignominiae speciem fuisse inter milites, ut hinc Romanis in ore manserit *dandum esse invidiae sanguinem* . . . . quod deinde aliis notis inventis obtinuit in certo genere » (Auli Gellii, Noctium atticarum Libri XX perpetuis notis et emendationibus illustraverunt Johannes Fredericus et Jacobus Gronovius. Lugduni Batav., 1706, p. 477).

(4) Sichterman Gerardi, De poenis militaribus Dissertatio philologico-juridica. Amstelodami 1709, p. 99.

(5) « M. Cato memoriae prodidit, in furto comprehensis, inter commilitones dextras esse praecisas, aut si lenius animadvertere voluissent, in principiis sanguinem missum » (Frontini, Stratagemat. Lib. IV, Cap. 1).

(6) Lipsio invece di *lenius* o *levius*, legge *lentius;* altri, come lo Stewech, in luogo di *principiis*, emendamento proposto dallo stesso Lipsio (cioè piazza d' armi negli accampamenti, innanzi al Pretorio), vorrebbe tenere *principes*, ovverossia soldati principali, in opposizione ai gregari. All' Oudendorp non garba l' interpretazione sterrechiana, poichè nessuno dice *mittere sanguinem in aliquem;* piace invece l' altra *in principiis*, e la conforta con parecchi argomenti (*Frontini S. Julii*, Libri Quatuor strategematicon cum notis integris, etc. Lugduni Batavorum 1731, p. 416). Marc' Antonio Gandino traduce: « a coloro i quali erano trovati a rubare fra soldati era tagliata la man destra; ovvero, se pure i Principi gli voleano manco severamente punire, a essi cavavano il sangue » (Stratagemmi militari di Sesto Giulio Frontino ecc. Venetia 1574, p. 109 v.). Nel volgarizzamento di Francesco Lucio Durantino non venne compreso il detto passo di Frontino, ossia di Catone (Astutie militari di Sesto Julio Frontino ecc. Venetia 1541).

che la suprema contemplata dal Lipsio e dal Sichterman, onde se lo sgorgo del sangue dalla vena può farsi clemente simulacro di mutilazione, tale non può apparire quando ad un reo di morte si conceda la vita; allora all' indulgenza, che vuole serbare le irrisorie apparenze della pena, si contrappone l'assoluzione, la quale, giusto perchè così, non ha bisogno di ammenda, e tanto meno di ammenda ingiuriosa. In ogni modo il racconto di Catone, ripetuto da Frontino, conferma che la missione di sangue, fosse pure mitigata, era pena infame, poichè ai poltroni, ai vili, ai ladri riserbata.

Ma dopo tutte queste erudite e sottili disquisizioni (1), niuno dei commentatori si spinse più innanzi, ad investigare cioè come mai una nota di vituperio poteva essere attribuita ad un rimedio, ad una maniera di cura, che aveva l' universale estimazione, le lodi de' medici più insigni dell' antichità. Anzi ad uno dei primi commentatori gelliani, sebbene uomo dottissimo, parve sì fatta indagine cotanto malagevole, da non veder modo di trarne costrutto, se pure non si volesse rimaner contenti di congetture (2); conclusione la quale non ci deve fermare, perciocchè non è colla sfiducia che si risolvono le quistioni, o se ne rimuovono le difficoltà.

II.

Presso gli antichi, come tuttora nella lingua nostra e in altre, *sangue* significa *spirito*, *forza, nerbo, vigore:* l' *integer aevi sanguis* di Virgilio è l'età vigorosa (3); il sangue è la *schiatta*, la *famiglia*, la *discendenza*, la *radice del corpo* (4); il sangue in una parola è la *vita*, onde che Orazio,

---

(1) Roberto Valturio sulla fine del secolo XV e più tardi il Calcagnini (Lodovico Celio Rodigino) ricordano il fatto del salasso come pena militare, ma non lo spiegano, e neppure citano il nome dell' autore, a cui attingevano (Valturii, De Re militari Lib. XI, Cap. 16. Parisiis 1532, p. 345. — Rhodigini, Lectionum antiquarum Lib. VI, Cap. 1. Francofurti 1666, col. 266); così pure il Robortello, sebbene n' avesse il debito, dissertando *de poenis militum* (Graevii, Thes. Antiq. Rom. Lugd. Batav. 1699, X, 1484). Pietro Fabre si rimette allo stesso Gellio, *cujus rei rationem et originem subtiliter indagat* (Semestrium Lib. I, Cap. 17. Genevae 1660, p. 102). Il P. Proust nel pubblicare le Notti attiche *ad usum Delphini* (Parigi 1618) si contenta di riferire a pag. 273 le opinioni del Muret, e del Lipsio; il Conradi, nel ripetere l' edizione gronoviana nulla aggiunge a quanto in questa si legge. Il Rev. W. Beloc nella traduzione inglese di Aulo Gellio accetta l' interpretazione del Mureto, sembrandogli *reasonable enough* (The Attic Nights of Aulus Gellius, translated into english. London 1795, II, 214); invece il traduttore francese, abbate De Verteuil, non fa nessuna osservazione, intento piuttosto a rimaneggiare il testo dell' autore e a disporne le parti a suo talento; di guisa che il passo da noi studiato trovasi portato nel Capitolo LXIV del 1° libro. (Les Nuits attiques d' Aulugelle, traduites par M. l' abbé de V..... Paris 1776, I. 232).

(2) « Unde autem sit (salasso) ad ignominiam translatum non apparet, nisi coniecturis agere velimus » (Musellani Petri Protegensis, In Auli Gellii Noctes atticas annotationes. Lugduni 1542, pag. 102).

(3) Aeneidos. Lib, II, v. 639.

(4) « Corporis radix sanguis est; sanguine enim corpus sustentatur. Propterea nisu conservandus est sanguis, in vita quasi stabilitas » (Su'srutas Âyurvéda. Erlangae 1844, I, 31).

per dire che non rivivrà il suo Quintilio, esclama, *non vanae redeat sanguis imagini* (1), armonioso verso, che ricordava le dottrine degli antichi filosofi, i quali affermavano il sangue esser l' anima, ovvero l' anima nutrirsi dal sangue (2); ricordava altresì il divieto ebraico di non mangiar carne di animali, essendo che per essi *sanguis pro anima est* (3). Non occorre addurre maggiori testimonianze per dimostrare la grande importanza, che in tutta l' antichità davasi al sangue, non soltanto nell' ordine fisico, ma eziandio nel morale: se a dì nostri l' autore del più splendido Trattato di Fisiologia concepito con larghi intendimenti scriveva, che dall' idea della vita può dedursi l' esistenza d' *un succo vitale, il quale occupi il centro del cerchio della vita vegetativa* (4); questo medesimo pensiero s' incontra nella filosofia, nella medicina, nella storia, nella letteratura de' popoli più vetusti. La tradizione lo manteneva lungo il corso de' secoli, la diffondeva da una in altra lingua; l' imaginoso parlare de' popoli ne allargava il significato, ne formava traslati, ne faceva figure: donde la *justitia sanguinis* del diritto feudale, le bevande di sangue per affermare alleanze ed amicizie, consuetedine, che dagli Sciti antichissimi (5), passava agli Armeni (6), ai Latini (7) e mantenevasi nel medio evo fra le genti settentrionali; alle quali rimanevano altresì le rituali aspersioni di sangue (8), e la scusa del tracannar vino, affinchè l' anima non rimanesse a secco mancando l' umore al sangue (9).

Dalla dottrina, che poneva lo stato di salute nella proporzionata commestione del caldo e del freddo, ossia nella giusta crasi dei quattro umori, nasceva pur quella dei *temperamenti*, i quali si modificavano secondo la natura dei luoghi, la qualità dei climi. E però Vegezio suggeriva di eleggere i nuovi soldati da luoghi temperati, affinchè non mancasse loro l' abbondanza del sangue per disprezzare le ferite e la morte, nè dalla sovrabbondanza di esso avessero difetto di prudenza; ed il consiglio era conforme all' avviso di *uomini dottissimi*, secondo i quali tutte le nazioni

(1) Horatii, Carmin. Lib. I. 24, v. 15.

(2) Galeni, De Hippocratis et Platonis decretis. Lib. II, Cap. (Op. omn. Ed. Kühn. Lipsiae 1823, V, 283).

(3) Deuteronomi Liber XII, 23. — « Anima omnis carnis in sanguine est » (Levitici Liber, XVII, 14).

(4) Burdach C. F., Trattato di Fisiologia. Venezia 1843, VII. 495.

(5) Herodoti, Historia. Lib. IV. — Luciani, Toxaris, sive amicitia (Opera. Amstelodami 1687, II. 57, 75).

(6) Taciti, Annalium XII, 47.

(7) Festum, in voce Assiratum. — Sallustii. Catilina XXII.

(8) Canciani, Leges Barbarorum, III, 86.

(9) « Anima dicitur habitare in sanguine, et propterea dicitur quod Normandi, Anglici et Poloni fortiter bibunt ne contingat animam habitare in sicco » (Grillandi Pauli, Tractatus de sortilegiis Lib. II, Quaest. XIII, n° 4. Lugduni 1536, fol. LXIII).

vicine al sole, per esser disseccate dal troppo caldo, sono più intelligenti, ma hanno, dicono, manco di sangue; laonde tanto più men forti, men sicure a combattere e paurose delle ferite, conoscendo aver poco sangue. Per lo contrario i popoli settentrionali, lontani dall' ardore del sole, sono meno avvisati, ma assai abbondando di sangue, si dimostrano coraggiosissimi nelle armi (1). Questi precetti di Vegezio, generalmente accolti, venivano ripetuti anche quando non v' era più impero sì vasto da poterli applicare: venivano ripetuti nella seconda metà del quattrocento dai primi nostri scrittori di cose militari, il Valturio e il Cornazano, e l' uno e l' altro si compiacevano di conchiudere che nell' Italiano v' era, perché di regione temperata, quella *salubris utrinque mixtura*, che ricercasi nel buon soldato (2).

Ma chi erano gli *uomini dottissimi* da cui Vegezio (che visse verso la fine del IV secolo) traeva questi avvertimenti? Parecchi; tutti per altro fanno capo direttamente, o per il tramite di Galeno, ad Aristotile. Il medico di Pergamo anteriore di circa due secoli all' autore *de re militari* (3), scriveva un libro speciale per provare *che le qualità dell' animo sono la conseguenza del temperamento del corpo:* ὅτι τὰ τῆς ψυχῆς ἤθη ταῖς τοῦ σώματος κράσεσιν ἕπεται (4),

---

(1) « Constat in omnibus locis et ignavos et strenuos nasci. Sed tamen gens gentem praecedit in bello, et plaga coeli ad robur non tantum corporum, sed etiam animorum plurimum valet, quo loco ea quae a doctissimis hominibus comprobata sunt, non omittam. Omnes nationes, quae vicinae sunt soli, nimio calore siccatas, amplius quidem sapere, sed minus habere sanguinis dicunt: ac propterea constantiam ac fiduciam cominus non habere pugnandi, quia metuunt vulnera, qui se exiguum sanguinem habere noverunt. Contra septentrionales populi, remoti a soli ardoribus, inconsultiores quidem, sed tamen largo sanguine redundantes, sunt ad bella promptissimi. Tyrones igitur de temperatioribus eligendi sunt plagis, quibus et copia sanguinis suppetat ad vulnerum et mortis contemtum, et non possit deesse prudentia » (VEGETII FLAVI RENATI, De Re militari Lib. I, Cap. 2).

(2) VALTURII ROBERTI, De Re militari Lib. VI, Cap. 8. « Gentium diversarum ratio in deligendis militibus ». Parisiis 1532, p. 102. La prima edizione venne fatta a Verona nel 1472; ivi pure undici anni dopo usciva la seconda, e quasi contemporaneamente la traduzione italiana. — CORNAZANO ANTONIO, Poema dell' Arte militare (Opera bellissima delarte Militar. Del excellentissimo poëta miser Antonio Cornazano in terza rima). Venexia 1493. Fra le molte ristampe che si fecero di quest' opera, per le quali può vedersi il Poggiali (Memorie per la Storia Letteraria di Piacenza, Piacenza 1780, I, 94), ho davanti quella che Bernardo di Filippo di Giunta Fiorentino dava fuori a Firenze il 25 maggio 1520 col titolo *Cornazano De Re Militari nuovamente con somma diligentia impresso.* L' impressore nella lettera *ad gli lettori* dice d' aver procurato di rendere l' opera più intelligibile levandola dalla *lombarda bàrbarie* in cui era *submersa.* Misser Antonio, come lo chiama il Giunta, non cita Vegezio nè il Valturio, sebbene manifestamente li traduca; bensì avverte d' aver ascoltato que' consigli *dai dotti Cosmografi,* e conchiude con il Valturio, che l' Italiano è il miglior soldato, perchè di regione temperata, la quale assai contribuisce, oltre la disciplina, a formare buoni figliuoli di Marte:

« Però alcun volser chel soldato eletto
De lochi temperati come Italia,
Fosse excellente per ogni rispetto »

(Lib. I, Cap. 9. Le terre che producono buoni soldati, et le parte spectante al capitanio p. 31).

(3) Galeno nato nell' anno 131 moriva nel primo decennio del secolo III.

(4) « Quod animi mores corporis temperamenta sequantur » (GALENI, Op. Omn. Ed. Kühn cit. IV, 767).

e la sua opinione principalmente confortava coll' autorità del grande filosofo e naturalista di Stagira, tanto che di parecchi brani dell' opera *de animalium partibus* esso componeva quasi tutto il Capitolo VII, che è uno dei principali del libro suddetto. Leggesi di fatti in quel trattato aristotelico, περὶ ζώον μορίων, che il sangue quanto è più denso e caldo dà maggior forza, che il sangue più sottile e frigido affina il sentire ed avviva la mente; e però gli animali, che ad un tempo hanno sangue caldo, tenue e puro sono i meglio provveduti, poiché uniscono le condizioni, che danno insieme il coraggio e l' intelligenza (1). Gli animali senza sangue, o con sangue acquoso, sono timidi, pusillanimi, perché il sangue che tiene troppa acqua è frigido, non coagula, oltre che la paura stessa raffredda; invece gli altri di sangue fibroso, denso, sono arditi, focosi, l' ardimento producendo calore: il toro, il cinghiale sono fieri, impetuosi, perché appunto il loro sangue è quanto mai fibroso e facile a coagulare. Pertanto, conchiude il filosofo, con ragione si considera la natura del sangue come causa di molte particolarità negli animali, così nel carattere, come nell' azione de' loro sensi: esso umore è materia di tutto il corpo, ne è l' intimo nutrimento; per ciò grandi diversità ne debbono conseguire, secondo che il sangue sia calido o frigido, sottile o denso, puro ovvero torbido (2). Platone pure è chiamato in sostegno della tesi, poiché nel *Timeo* fa dire a Minerva d' aver prescelto Atene, vedendo che gli uomini vi sarebbero savi, grazie al *buon temperamento delle stagioni;* perché nel V libro delle *Leggi* lo stesso filosofo osserva che, a seconda dei luoghi, gli uomini nascono buoni o cattivi; che l' alimento non solo può rendere il corpo sano o mal sano, ma dare all'animo questa o quella inclinazione. In fine viene la testimonianza del divino Ippocrate (3): il trattato di questo *principe fra tutti i filosofi su l' aria le acque e i luoghi*, l' altro sull'*epidemie* confermano le relazioni, che intercedono fra i temperamenti del corpo e le qualità dell' anima, stringono i vincoli che queste a quelli congiungono. Le quali opere Galeno citava non già, avverte, per un cieco ossequio all' autore, ma perché ne trovava serie le dimostrazioni (4); chi non si persuaderà con lui che gli abitanti delle regioni medie, cioè delle zone temperate, sono meglio favoriti, così rispetto al corpo come alle qualità dell'animo e della mente, degli abitanti delle due regioni estreme? (5).

---

(1) ARISTOTELIS, De Animalium partibus. Lib. II, Cap. 2.

(2) Ivi, Cap. 4. — Vedi anche l' articolo 62 della Sezione X e l' intera Sezione XXVII dei *Problemi* dello stesso Aristotile.

(3) « Quum liceat Hippocratem illum divinum speculationis huius inter omnes philosophos principem in testimonium producere » (GALENI, Quod animi mores etc. Cap. VII, p. 798).

(4) « Ego sane non ut testi Hippocrati credo, sicut alii plerique, sed quod solidas demonstrationes ejus video, idcirco etiam laudo Hippocratem » (Op. cit. Cap. IX, p. 805).

(5) « Nemo siquidem non videt, corpus animumque eorum, qui sub septentrione degunt, longe aliter ab iis qui juxta zonam ustam habitant, affectum esse. Aut quis ignorat, inter hos tempe-

Se l' eccesso del calore, conchiude Galeno, rende l' uomo maniaco ed irascibile, il temperamento freddo per l'opposto lo fa pigro e pesante, ne intorpidisce tutti i movimenti (1); ovunque troverai vera la sentenza ippocratica *hominum et formas et mores regionis naturam ut plurimum imitari* (2).

Non é qui da ricercare quanto Galeno siasi valso delle grandi autorità da lui addotte, e se per avventura abbia anche sforzato il significato del loro pensiero, per avvalorare le proprie opinioni e trarne esca per quella sua tendenza speculativa, che lo spingeva ad un soverchio filosofeggiare; non é, dico, da istituire simile indagine, la quale se potrebbe avere qualche importanza per lo studio psicologico del celebre medico, o per la storia della filosofia, non avrebbe motivo o riescirebbe superflua rispetto al nostro scopo, che é semplicemente di cercare la ragione di antica usanza; ragione, che nella lunga successione de' tempi s' era perduta o dimenticata.

III.

Difatti sentimmo Aulo Gellio, quantunque persona colta, confessare di non aver potuto trovare cotesto *perché*, né vivo, né nei libri; eppure quello stava scritto da cinque secoli, quando non prima ancora (3). Se non che non bastava semplicemente cercare si fatta ragione: siccome né evidente, né prossima, conveniva indagarla, e indagata scoprire le attinenze della dottrina con la pratica; ma tanto non potevasi pretendere da un grammatico o da un dilettante. Né meglio riescirono i commentatori anche più dotti, avvegnacché la loro erudizione, sebbene vasta, non giungeva ad afferrare un vincolo troppo fuori dei loro studi, ad abbracciare un collegamento, di cui non vedeveno gli anelli, perché troppo riposte le congiunzioni. Abituati a spiegare, ad interpretare i classici con la sola scorta delle lettere, della storia, della filosofia, come potevano quegli umanisti, quei filologi, quegli eruditi andare a domandare alla fisiologia e alla medicina, ad Aristotile e a Galeno quella spiegazione, che altrimenti loro sfuggiva? Il passo di Vegezio non li avviava, l' altro di Frontino, o meglio di Catone, anzi che fermarli nella retta interpretazione li allontanava, togliendo alla

---

ratum colentes tractum corporis praestantia, moribus animi, ingenio et prudentia caeteris omnibus antecellere »? (Ivi).

(1) « Nam furibundos sane, iracundosque caloris copia efficit; segnes, tardos, graves et ad motum difficiles temperamenti frigiditas » (Cap. VIII, p. 804).

(2) Hippocratis, De aëre, locis et aquis. Lipsiae 1825, Ed. Kühn, I, 550.

(3) Aristotile visse dall' anno 384 al 322 avanti Cristo; Aulo Gellio compilava la sua opera sulla metà del II secolo, o poco dopo.

pena del perder sangue il carattere affatto particolare dell' ignominia. Per comprendere questa nota occorreva innanzi tutto persuadersi dell' importanza, che davasi nell' antichità al *sangue*, dal quale proveniva la gagliardia del corpo e dell' animo, la robustezza ed il coraggio: buone alle armi le complessioni sanguigne, inette le flemmatiche. E però se timido ed imbelle è il povero di sangue, ne segue che il salasso divenga castigo scemando di proposito l' umore, che conferisce le opposte virtù. D' altra parte il soldato reo di vigliaccheria, di furto, o d' altro disonore doveva essere punito coll' ignominia: or bene quale maggior mortificazione per chi deve impugnare le armi, di quella d' essere dichiarato impotente al combattere, a lui mancando la forza, il coraggio, perchè senza sangue?

Oggi ai soldati, che vengono meno all' onore, prima dell' espiazione della pena sono degradati: la punizione morale precede alla fisica, per il più elevato concetto che abbiamo della dignità della persona e dell' uffizio; allora l' afflizione dell' animo doveva innanzi tutto essere afflizione del corpo, perchè appunto le azioni e i sentimenti si tenevano strettamente all' uomo quale era formato e composto. Il salassato mandavasi fra le turme imbelli: il disonore confondevasi con il sangue sottratto, e come questo si rifaceva, quello purgavasi. A sì fatta restaurazione del sangue con grande cura attendeva la medicina: da ciò il riposo, il miglior vitto e le lautezze stesse, che concedevansi a coloro che sottoponeansi ai salassi periodici, alle *minuzioni*, per antivenire le malattie. Questo forzato riposo di per sè solo (mentre ad altro ordine di persone poteva riescire gradito e desiderato) doveva tornare in pena ai soldati (1), perchè li toglieva dalla vita comune, li segregava dai commilitoni, li dichiarava inetti alle armi. Sfregiati nell' aspetto della balda vivezza, che dà l' abbondanza del sangue, *cujus natura fervor est* (2), agli sciagurati quasi più non restava, come ai pusilli d' Orazio, che d' andar a piagnucolare sulle scranne delle loro seguaci, femmine vili e bagascie (3): tra quelle gonne dovevano nascondere la smortezza della paura e del disonore. Se il salasso fosse stato fatto per deprimere le forze esuberanti, per tener meglio soggetti uomini nel maggior vigore dell' età, ovvero per qualsiasi cagione di malattia, il pallore non avrebbe fatto vergogna, nè ignominia il sangue perduto.

Ma la vergogna c' era, ed il salasso nelle antiche milizie in certi casi

(1) Sotto questo punto di vista il passo d' Aulo Gellio venne considerato anche nell' altra mia dissertazione della *Minutio sanguinis e dei salassi* periodici, pubblicata fra le *Memorie del R. Istituto Lombardo* (Vol. XVI, VII della Serie III Classe di Scienze 1887).

(2) MACROBII AUR. THEODOSII, Saturnal. Lib. VII, C. 7. Op. omn. Lipsiae 1774, p. 652.

(3) HORATII, Satirarum. Lib. I, 10, v. 90.

non che pena, era pena ignominiosa. Come ciò avvenisse, credo d'averne recate sufficienti ragioni; e, se male non mi sono apposto, avrò dato insieme nuova prova quanto sia utile alle interpretazioni filologiche, l'ajuto della storia e delle cognizioni delle scienze speciali.

CONSIDERAZIONI ED ESPERIENZE

INTORNO

ALLA COSTITUZIONE INTIMA DEI NUCLEI TETROLICI

MEMORIA

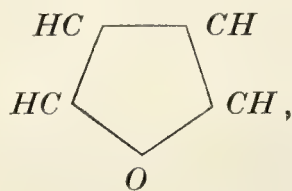
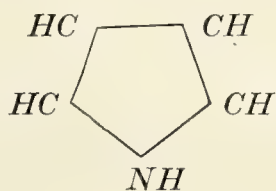
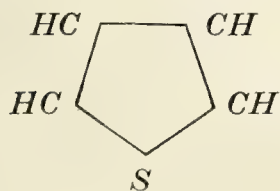
DI

GIACOMO CIAMICIAN ED ANGELO ANGELI

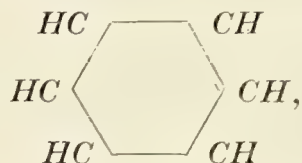
(Letta nella Sessione del 12 Aprile 1891).

Mentre sulla struttura intima dell'anello benzolico sono state fatte lunghe discussioni e numerosissime ricerche, non venne ancora sottoposta a serio esame la questione della costituzione intima dei nuclei tetrolici a cui appartengono il tiofene, il pirrolo, il furfurano ed i loro derivati. A noi pare che i fatti noti intorno a questo argomento insieme a quelli da noi trovati, che esporremo nella presente Memoria, costituiscano un materiale sperimentale sufficiente per potere formulare una teoria dei nuclei tetrolici, massime se si tiene conto delle vedute che sono state svolte recentemente dal Baeyer sulla costituzione del benzolo.

Che il tiofene, il pirrolo ed il furfurano sieno costituiti in modo da formare degli anelli pentatomici, rappresentati dai seguenti schemi:

HC—*CH*	*HC*—*CH*	*HC*—*CH*
HC ⟨ ⟩ *CH*	*HC* ⟨ ⟩ *CH*	*HC* ⟨ ⟩ *CH*,
S	*NH*	*O*

non v'é dubbio alcuno; le difficoltà sorgono invece quando si voglia cercare d'indagare in qual modo i quattro atomi di carbonio, che sono contenuti in ciascuno di questi corpi, sieno legati reciprocamente mediante le quattro valenze di cui ogni atomo di carbonio dispone. Il problema che si presenta é, come si vede, della stessa indole di quello che tratta dell'intima struttura del nucleo benzolico.

Le formole sopraindicate corrispondono alla prima formola di Kekulé, quella in cui le sei valenze latenti del benzolo sono trascurate:

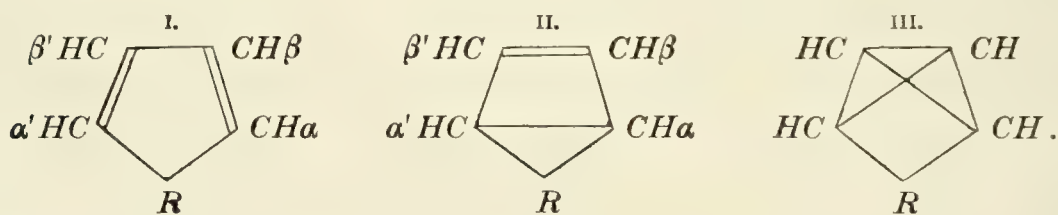
HC — CH
HC CH,
HC — CH

e nella quale tacitamente si ammette che il carbonio nel benzolo sia un elemento trivalente.

Ora a noi pare che una simile ipotesi non si possa fare, quando si consideri le valenze, nel senso di direzioni, in cui l'atomo di carbonio esercita le sue attività, conformemente alla tanto felice teoria di Le Bel e Van 't Hoff. L'atomo di carbonio ha in tutti i suoi composti una simmetria tale, quale la rappresentano i modelli del Kekulé, che come disse giustamente il Baeyer (*) contengono più di quello che il loro autore intendesse con essi rappresentare. Queste quattro direzioni, che corrispondono alle rette, che uniscono il centro d'un tetraedro con i vertici, esistono in ogni atomo di carbonio; alcune forse potranno, in rari casi, rimanere senza effetto (nell'ossido di carbonio e negli isonitrili), ma non cessano però d'esistere.

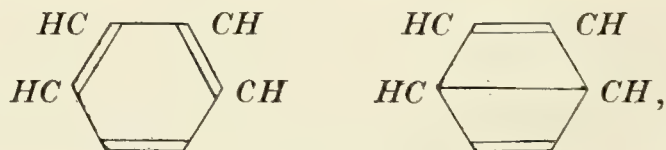
Tenendo perciò conto delle quattro valenze d'ogni atomo di carbonio si hanno i seguenti schemi, in cui è indicato con *R* l'atomo o il radicale bivalente, che chiude l'anello tetrolico e che rappresenta lo zolfo, l'immino o l'ossigeno.

I. β'HC — CHβ / α'HC CHα / R

II. β'HC — CHβ / α'HC CHα / R

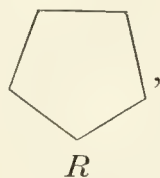
III. HC — CH / HC CH. / R

I due primi di questi schemi corrispondono alle formole del benzolo di Kekulé e di Dewar:

HC — CH / HC CH

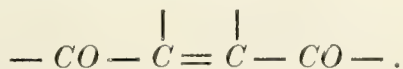
HC — CH / HC CH,

(*) Berl. Ber. XXIII, 1273.

l' ultimo non sarebbe strettamente comparabile a nessuna delle formole che sono state attribuite al benzolo, ed è come si vedrà, il meno probabile di tutti.

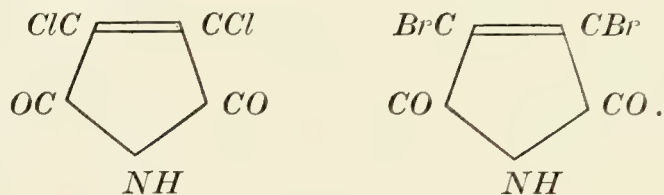
L'analogia che i composti tetrolici presentano col benzolo ed i suoi derivati è tanto nota, che non v' è bisogno di illustrarla ulteriormente. Qui è soltanto necessario ricordare, che queste somiglianze di comportamento sono diverse nei tre diversi gruppi di composti. Mentre i tiofeni ed i loro derivati (segnatamente gli acidi tiofencarbonici ed i composti chetonici) hanno la più perfetta analogia col benzolo ed i suoi omologhi, e coi corrispondenti derivati di questi corpi, i pirroli somigliano di preferenza ai fenoli. I derivati del furfurano, in fine, sono composti aromatici (*), i quali per la facilità con cui danno prodotti d'addizione, s'avvicinano molto alle sostanze, che contengono una catena aperta di atomi con lacune.

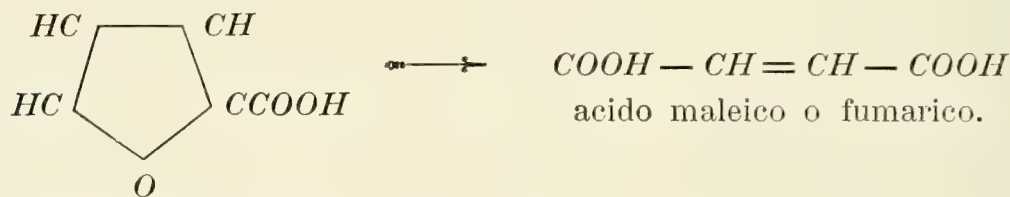
Volendo rendersi ragione delle cause, che possono determinare tali differenze di comportamento, bisogna prima di tutto, a nostro avviso, escludere la possibilità ch' esse provengano da una diversa *costituzione* dei tre nuclei. Che la *struttura fondamentale* dell'anello tetrolico sia la stessa in tutti questi corpi e corrisponda allo schema più volte menzionato

è largamente provato dal fatto, che i tiofeni, i pirroli ed i furfurani si possono ottenere per analoghi processi sintetici da un comune punto di partenza, p. es. dai γ-dichetoni.

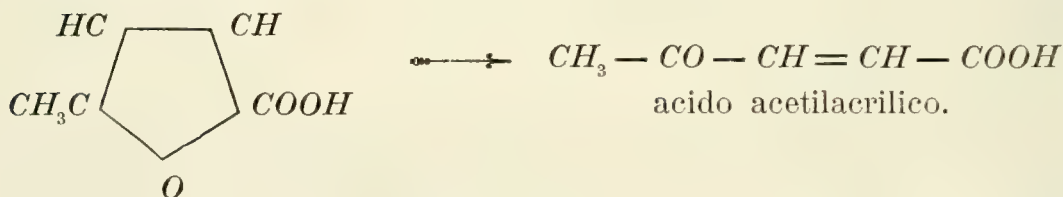
Ma anche la *struttura intima* non può essere, a parere nostro, diversa, perchè tutte le sostanze tetroliche danno, sottoposte allo stesso trattamento, gli stessi prodotti di scissione. Ossidando moderatamente questi corpi si ottengono sempre derivati dell'*acido maleico*, o per meglio dire composti, che possiedono la catena fondamentale :

$$-CO-\overset{|}{C}=\overset{|}{C}-CO-.$$

(*) Per sostanze aromatiche si devono intendere non solamente i derivati del benzolo, ma altresì tutti i corpi, che contengono nuclei simili a quello del benzolo, dunque i tiofeni, i pirroli, i furfurani ed i loro derivati, la piridina ed i composti piridici ecc.. — V. Meyer (Lehrbuch der organischen Chemie 1891; pag. 92), propone di classificare tutti i corpi organici in tre gruppi: alifatici, omociclici ed eterociclici; io credo invece sia più conveniente riunire in un unico gruppo i composti, che somigliano al benzolo e di chiamarli composti *fenociclici*.
G. Ciamician.

Ciamician e Silber hanno dimostrato alcuni anni or sono, che quasi tutti i derivati completamente clorurati o bromurati del pirrolo, danno per ossidazione con gli ipocloriti ed ipobromiti alcalini o con l'acido nitrico le imidi degli acidi bicloromaleico e bibromomaleico:

$$\begin{array}{ccc} ClC = CCl \\ OC \quad\quad CO \\ NH \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} BrC = CBr \\ CO \quad\quad CO. \\ NH \end{array}$$

Pei derivati del furfurano è stato provato segnatamente da Hill e dai suoi collaboratori che per ossidazione si ottengono derivati dell'acido maleico (o fumarico). I diversi derivati bromurati dell'acido piromucico danno per ossidazione con acido nitrico gli acidi maleico, monobromomaleico e bibromomaleico (*). L'acido α-metilpiromucico dà analogamente, l'acido acetilacrilico per ossidazione con bromo in presenza d'acqua (**).

$$\begin{array}{ccc} HC — CH \\ HC \quad\quad CCOOH \\ O \end{array} \longrightarrow COOH — CH = CH — COOH$$

acido piromucico — acido maleico o fumarico.

$$\begin{array}{ccc} HC — CH \\ CH_3C \quad\quad COOH \\ O \end{array} \longrightarrow CH_3 — CO — CH = CH — COOH$$

acido α-metilpiromucico — acido acetilacrilico.

Mancavano finora le corrispondenti osservazioni riguardo ai derivati del tiofene e noi abbiamo riempito tale lacuna studiando i prodotti di ossidazione dei tiofeni bromurati, che sono descritti, col relativo dettaglio sperimentale, nella seconda parte di questa Memoria. I resultati furono perfettamente conformi alle nostre previsioni: il tetrabromotiofene dà per ossidazione con acido nitrico l'acido bibromomaleico e dai due metil-

(*) Hill e Sanger — L. Annalen der Chemie, 232, 42.
(**) Hill e Hendrixson — Berl. Ber. 23, 452.

tiofeni (tiotoleni) tribromurati si ottengono rispettivamente gli acidi monobromocitraconico (metilbromomaleico) e bibromoacetilacrilico.

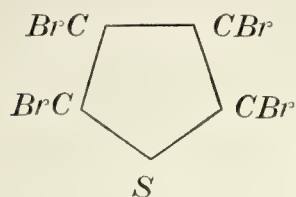
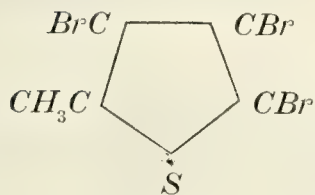
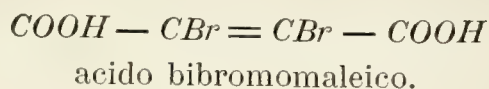
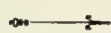
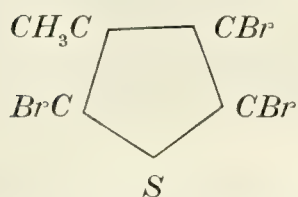
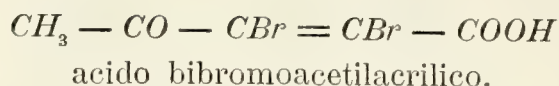
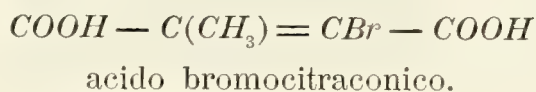
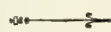
$$\begin{array}{ccc} BrC & & CBr \\ BrC & & CBr \\ & S & \end{array} \longrightarrow COOH - CBr = CBr - COOH$$

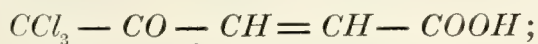
tetrabromotiofene — acido bibromomaleico.

$$\begin{array}{ccc} BrC & & CBr \\ CH_3C & & CBr \\ & S & \end{array} \longrightarrow CH_3 - CO - CBr = CBr - COOH$$

α-metiltribromotiofene — acido bibromoacetilacrilico.

$$\begin{array}{ccc} CH_3C & & CBr \\ BrC & & CBr \\ & S & \end{array} \longrightarrow COOH - C(CH_3) = CBr - COOH$$

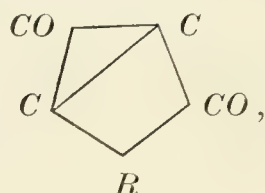
β-metiltribromotiofene — acido bromocitraconico.

Questi prodotti di ossidazione dei nuclei tetrolici corrispondono in modo assai rimarchevole a quelli ottenuti dal benzolo o dai suoi derivati. Per ossidazione del benzolo con clorato potassico ed acido solforico si forma il famoso acido triclorofenomalico di Carius, che Kekulé ha dimostrato non essere altro che l'acido tricloroacetilacrilico (*)

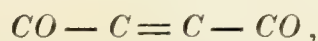
$$CCl_3 - CO - CH = CH - COOH;$$

per trattamento con alcali del bicloruro di cloroanile si ottiene l' acido bicloromaleico (**).

Le tre formole suaccennate non danno tutte ugualmente bene spiegazione dei fatti ora esposti.

La formola III con due legami diagonali in posizione *meta* è quella che apparisce come meno probabile. Secondo questa i composti tetrolici do-

(*) L. Annalen. 223, pag. 170.
(**) Vedi Zincke — L. Annalen. 261, 218; e Zincke e Fuchs — Berl. Ber. 23, 1334.

vrebbero dare per ossidazione una specie di derivato chinonico della seguente forma:

dal quale non si potrebbero ottenere i composti con la catena fondamentale

$$CO - C = C - CO,$$

che sono invece i più importanti prodotti di scomposizione delle sostanze tetroliche.

La formola II con un legame diagonale in posizione *para* ed un doppio legame $\beta\beta'$ darebbe facile spiegazione di queste metamorfosi, come la formola di Dewar rende agevolmente conto della formazione dei chinoni benzolici. A questa formola si oppongono però pel furfurano, le osservazioni di Hill e Sanger (*) sulla genesi degli acidi bibromopiromucici dal tetrabromuro dell'acido piromucico.

Del resto la formola col legame diagonale in posizione $\alpha\alpha'$ non offre nessun vantaggio su quella I, coi due doppi legami $\alpha\beta$ e $\alpha'\beta'$, per spiegare la formazione di composti con un doppio legame in posizione $\beta\beta'$, perchè è noto quanto facilmente avvenga, in simili casi, un tale spostamento di legami doppi (**). Una ulteriore discussione intorno a queste due formole non può riuscire proficua se non si considerano le posizioni, che gli atomi occupano nello spazio, perchè soltanto in questo modo si arriva ad intenderne il loro vero significato.

Da tutti i fatti ora esposti risulta dunque, come assai probabile, che i tre nuclei tetrolici abbiano la stessa costituzione e che le differenze, che si riscontrano nel loro comportamento, sieno perciò da attribuirsi in parte ad una diversa configurazione delle loro molecole.

Baeyer (***) è arrivato, in seguito ai suoi importanti studi sulla costituzione del benzolo, al risultato, che nei diversi derivati benzolici l'anello esatomico non ha sempre la stessa configurazione. Nei derivati più resistenti esso si avvicina ad una forma limite, in cui le valenze sono congiunte

(*) L. Annalen. 232, pag. 97.
(**) L. Annalen. 215, pag. 256 e 257, pag. 1 e seguenti.
(***) Berl. Ber. 23, 1272 e seguenti.

nel modo il più saldo, tanto da costituire un nucleo perfettamente simmetrico, senza doppi legami. A questo stato, che egli chiama *benzolo ideale*, è da contrapporsi quello dell'anello meno resistente, in cui i legami doppi della formola di KEKULÉ hanno quasi gli stessi caratteri delle lacune dei composti non saturi della serie alifatica. — Queste diverse forme dell'anello benzolico si intendono e si rappresentano facilmente coi modelli di KEKULÉ. Alla forma più stabile corrisponde quella configurazione, che possiede la minima periferia ed in cui le valenze, che nel benzolo non sono disponibili, non formano più legami semplici e doppi, ma sono distinte in periferiche e centrali (Fig. 1).

Fig. 1.

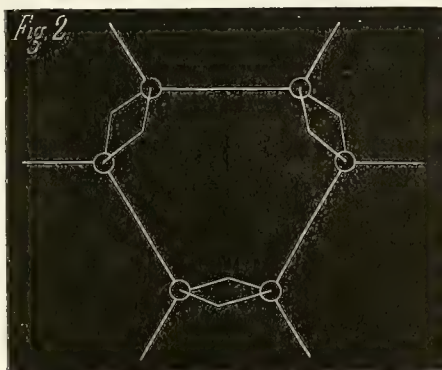
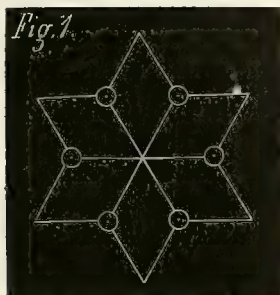
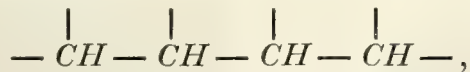



Fig. 2.

Nella configurazione meno resistente invece, l'anello acquista un diametro maggiore e la disposizione delle valenze è tale da dare origine a tre doppi legami i di cui piani sono normali a quello che passa pei sei atomi di carbonio (Fig. 2).

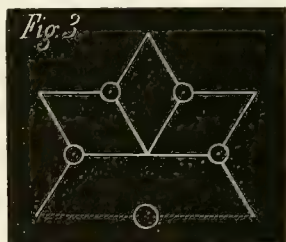
Queste diverse configurazioni vengono determinate dalla natura dei radicali sostituenti gli atomi d' idrogeno del benzolo, in modo che la forma più stabile è rappresentata dal benzolo stesso e dagli acidi carbossilici, mentre a quella meno resistente corrisponde la floroglucina.

Nei nuclei tetrolici la configurazione del residuo « C_4H_4 »

$$\begin{array}{c} \quad | \qquad\quad | \qquad\quad | \qquad\quad | \\ -CH-CH-CH-CH-, \end{array}$$

che è a tutti comune, dipende dalla natura del quinto atomo, che chiude l' anello.

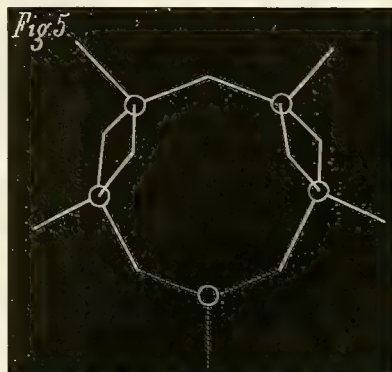
Ora è da osservarsi, che fra tutti i composti tetrolici, quelli che maggiormente s' accostano ai derivati più resistenti del benzolo sono i tiofeni. L' analogia della maggior parte dei composti tiofenici con i più stabili composti benzolici è così rimarchevole, che bisogna ammettere pel residuo « C_4H_4 » nel tiofene una configurazione corrispondente a quella dell'anello

benzolico più stabile. Al tiofene ed alla maggior parte dei suoi derivati spetta perciò il nucleo rappresentato dalla seguente figura.

Fig. 3

L'atomo di zolfo deve avere tali dimensioni da permettere la chiusura dell'anello senza alterarne la configurazione. In questo schema sono contenute, come si vede, tutte e due le formole I e II, che in questo caso non esprimono costituzioni diverse.

Nel pirrolo invece la questione prende un altro aspetto. L'anello pirrolico contiene un atomo d'azoto e basta compararlo coll'anello piridico per arrivare ad una soluzione del problema. Quest'ultimo corrisponde al nucleo benzolico così esattamente, che noi crediamo giustificato l'ammettere, che la sfera d'azione dell'atomo d'azoto sia presso a poco uguale a quella d'un atomo di carbonio. Soltanto facendo questa supposizione si può, a parer nostro, intendere perché ai composti piridici più stabili si debba attribuire una configurazione analoga a quella del benzolo ideale (*). Riferendosi ai modelli di Kekulé, tutto ciò vuol dire, che le valenze dell'atomo d'azoto hanno le stesse dimensioni di quelle dell'atomo di carbonio, immaginando che le tre valenze del primo sieno distribuite simmetricamente in un piano, oppure nelle direzioni delle rette, che uniscono il centro d'un tetraedro con tre vertici. — Date queste proprietà dell'atomo d'azoto non è più possibile ammettere pel pirrolo una configurazione analoga al tiofene. Il modello insegna subito, che le dimensioni dell'immino sono insufficienti a chiudere l'anello, se il residuo « C_4H_4 » mantiene la configurazione, che ha nel tiofene (Fig. 4).

Fig. 4.

Fig. 5.

(*) Vedi anche Guthzeit e Dressel — L. Annalen. 262, 104.

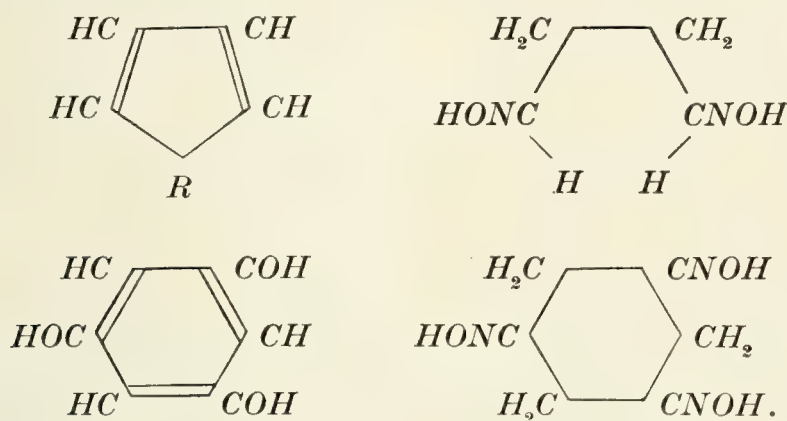
Il residuo « C_4H_4 » deve avere perció nel pirrolo una maggiore estensione in modo, che i piani dei due doppi legami formino un angolo quasi retto col piano degli atomi di carbonio. Questo peró, come s' é detto, é il carattere della configurazione meno stabile del nucleo aromatico (Fig. 5).

Del resto che al pirrolo spetti una configurazione corrispondente a quella della floroglucina, lo prova tutto il suo comportamento chimico ed in modo speciale quello coll' idrossilammina (*). La metamorfosi ossimica dei pirroli puó essere interpretata in modo da renderla strettamente comparabile alla trasformazione ossimica della floroglucina studiata dal Baeyer. Il pirrolo, come si sa, dà luogo in questo processo alla formazione della succindialdossima e la floroglucina alla triossima del trichetoesametilene.

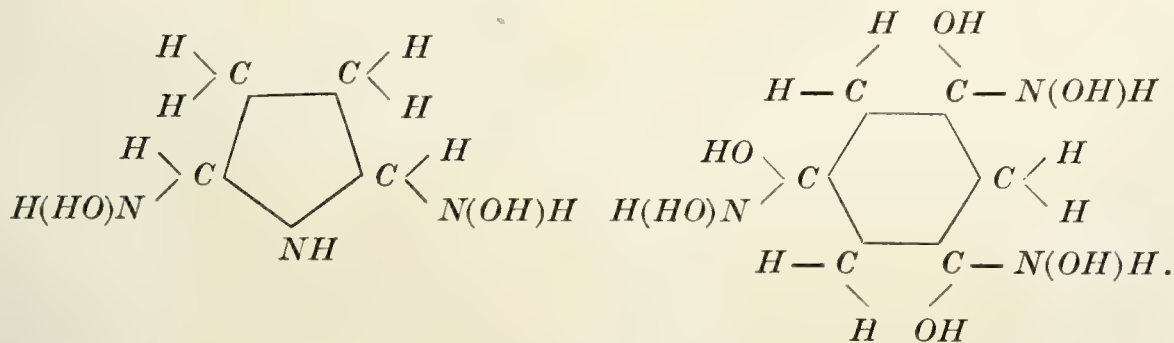
HC CH
HC CH
R

H_2C CH_2
HONC CNOH
H H

HC COH
HOC CH
HC COH

H_2C CNOH
HONC CH_2
H_2C CNOH.

Si puó ammettere in entrambi i casi, che l' idrossilammina si addizioni in principio alla molecola del composto aromatico colmandone le lacune:

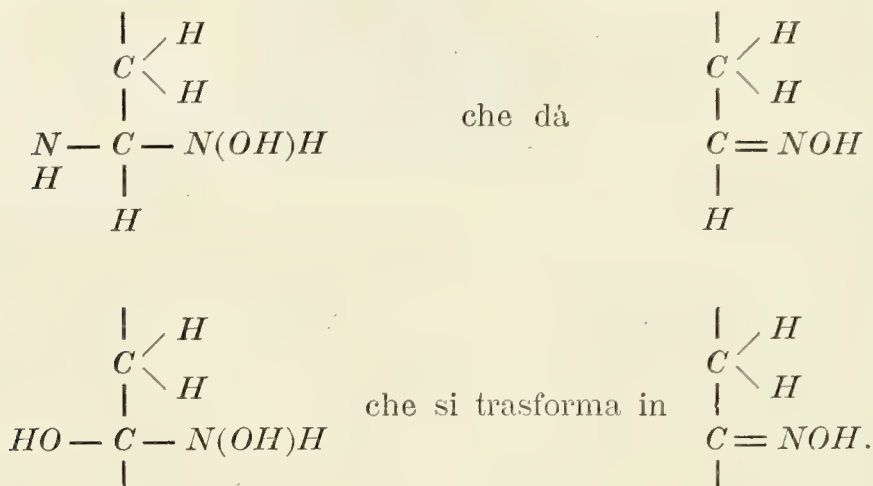
H H
C C
H H
H H
C C
H(HO)N N(OH)H
NH

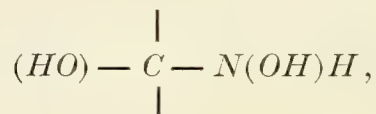
H OH
H — C C — N(OH)H
HO H
C C
H(HO)N H
H — C C — N(OH)H.
H OH

Il composto esametilenico si trasforma poi subito, per spontanea eliminazione di tre molecole d'acqua, nella triossima, mentre il derivato pirroli-

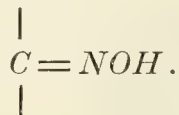
(*) Vedi G. Ciamician e C. U. Zanetti — Gazz. chim. 20, pag. 73 e 546; e 21, pag. 231.

dinico diventa succindialdossima per eliminazione d'una molecola d'ammoniaca. La corrispondenza dei due fenomeni è, come si vede, soddisfacente perchè in entrambi i casi l'atomo di carbonio, a cui rimane attaccato il residuo ossimico, ha le sue valenze impegnate in modo analogo:

$$\begin{array}{c} | \\ C\begin{matrix} \diagup H \\ \diagdown H \end{matrix} \\ | \\ \underset{H}{N}-C-N(OH)H \\ | \\ H \end{array} \qquad \text{che dà} \qquad \begin{array}{c} | \\ C\begin{matrix} \diagup H \\ \diagdown H \end{matrix} \\ | \\ C=NOH \\ | \\ H \end{array}$$

$$\begin{array}{c} | \\ C\begin{matrix} \diagup H \\ \diagdown H \end{matrix} \\ | \\ HO-C-N(OH)H \\ | \end{array} \qquad \text{che si trasforma in} \qquad \begin{array}{c} | \\ C\begin{matrix} \diagup H \\ \diagdown H \end{matrix} \\ | \\ C=NOH. \\ | \end{array}$$

Noi crediamo del resto che nella formazione delle ossime dalle aldeidi e dai chetoni, l'idrossilammina agisca, in una prima fase della reazione, in modo analogo all'ammoniaca, dando cioè origine ad un prodotto d'addizione instabile, contenente il residuo:

$$\begin{array}{c} | \\ (HO)-C-N(OH)H, \\ | \end{array}$$

il quale composto passa subito per spontanea eliminazione d'acqua, alla forma ossimica:

$$\begin{array}{c} | \\ C=NOH. \\ | \end{array}$$

Il pirrolo possiede dunque una configurazione corrispondente alla Fig. 5 ed è da rappresentarsi con la formola coi due doppi legami $\alpha\alpha'$ e $\beta\beta'$.

Nel furfurano il residuo « C_4H_4 » ha senza dubbio una configurazione tale, che i suoi doppi legami non differiscono per le loro proprietà dalle lacune dei composti non saturi della serie grassa. L'acido piromucico addiziona quattro atomi di bromo e viene facilmente ossidato dal permanganato po-

tassico. Quest' ultimo carattere è, secondo BAEYER (*), uno dei più importanti per determinare la resistenza dei doppi legami nei composti aromatici. La configurazione dell' anello furfuranico dipenderà dalle dimensioni dell' atomo d' ossigeno, le quali saranno certo minori di quelle dello zolfo e forse poco diverse da quelle dell' azoto. Il piano dei doppi legami sarà perciò probabilmente normale a quello degli atomi di carbonio.

Sui prodotti d' ossidazione dei tiofeni bromurati.

Le esperienze che descriviamo nel presente capitolo formano il seguito di quelle eseguite da CIAMICIAN e SILBER (**) intorno alla ossidazione dei derivati alogenati del pirrolo, per determinare la posizione dei radicali, che ne sostituiscono gli idrogeni metinici. Gli studi di CIAMICIAN e SILBER dimostrarono, che la maggior parte dei derivati del pirrolo, che si ottengono per sostituzione diretta, contengono i radicali in posizione α. Rimaneva da sperimentare il comportamento dei derivati della serie β, che nel pirrolo non è stato ancora eseguito. Noi abbiamo studiato perciò i prodotti d' ossidazione non soltanto del tiofene bromurato, ma anche quelli dei due tiotoleni, appunto per colmare in certo modo questa lacuna.

I tiofeni reagiscono in modo assai violento coll' acido nitrico ; moderando opportunamente l' azione di quest' ultimo, si formano prodotti nitrici senza che il nucleo venga alterato. I tiofeni completamente bromurati, essendo più resistenti e non potendo dare prodotti di sostituzione, si prestano invece assai bene allo studio delle trasformazioni del nucleo tiofenico.

I. *Comportamento del tetrabromotiofene.*

Il tetrabromotiofene venne preparato, seguendo il metodo descritto da VITTORIO MEYER (***), per azione del bromo sul tiofene sintetico, ottenuto dal succinato sodico. Il prodotto, perfettamente puro, venne trattato in vari modi coll' acido nitrico. Se si impiega acido nitrico di concentrazione ordinaria, l'azione è a freddo assai lenta, ma anche con un acido più concentrato, della densità 1,47 e con quello fumante ($d = 1{,}52$) il tetrabromotiofene rimane in principio inalterato e soltanto dopo qualche tempo si scioglie nel liquido. Trattando 1 parte di tetrabromotiofene con 10 parti d' acido nitrico fumante ($d = 1{,}52$), raffreddato con un miscuglio di neve e sale, il

(*) L. Annalen. 245, pag. 149.
(**) Gazz. chim. 17, pag. 269.
(***) Die Thiophengruppe 1888, pag. 79.

composto da principio rimane inalterato al fondo del vaso e si trasforma, dopo qualche tempo, in una materia semisolida brunastra, mentre il liquido va acquistando un colore rosso. Togliendo il miscuglio frigorifero ed abbandonando il tutto a sé stesso, avviene a poco a poco soluzione completa, con sviluppo di calore e produzione di bromo libero. Se si versa il liquido lentamente e con cura nell'acqua fredda, si osserva la separazione d'una materia bianca e cristallina, che peró tosto si ridiscioglie. La soluzione acquosa é colorata in giallo e contiene in sospensione delle goccie oleose, che peró dopo qualche giorno spariscono assieme al colore giallo del liquido, che diviene perfettamente limpido e scolorato. Estraendo questo con etere, dopo avere neutralizzato in gran parte l'acido nitrico libero colla potassa, si ottiene in grande quantitá una materia bianca e cristallina, che ha tutti i caratteri dell'*anidride dell'acido bibromomaleico.* Il rendimento é quasi teoretico.

Noi abbiamo trovato, che il punto di fusione del nostro prodotto era alquanto superiore a quello che ordinariamente si attribuisce all'anidride bibromomaleica e perció abbiamo purificato con grande cura il composto ottenuto, per eliminare ogni dubbio intorno a questa costante.

Il prodotto greggio venne seccato nel vuoto sulla calce ed indi distillato ripetutamente in una corrente d'anidride carbonica secca, raccogliendo soltanto la porzione che passava per ultimo.

La materia bianca e cristallina, cosí ottenuta, venne sciolta a caldo nel benzolo e precipitata con etere petrolico. Ripetendo due volte questa operazione, il punto di fusione dell'anidride si mantenne costante a 117-118°, come era stato trovato da principio. L'anidride bibromomaleica fonde a questa temperatura e non a 114-115°, come s'era creduto finora.

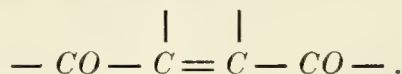
La purezza del nostro prodotto venne accertata dalla seguente analisi.

0,2483 gr. di materia dettero 0,3652 gr. $AgBr$.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_4Br_2O_3$
Br	62,58	62,50 .

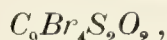
Noi abbiamo inoltre studiato l'azione dell'acido cromico sul tetrabromotiofene, per vedere se anche in questo caso si formassero prodotti contenenti la catena fondamentale:

$$\begin{array}{c} \quad\quad | \quad\;\; | \\ -CO-C=C-CO-. \end{array}$$

Le ricerche fatte in proposito non ci hanno dato peró risultati molto

concludenti, perché il tetrabromotiofene viene attaccato assai difficilmente dall'acido cromico ed i prodotti che risultano si formano in quantità così piccole, da non permettere nessuna considerazione teoretica sull'andamento del fenomeno.

Noi abbiamo impiegato una soluzione del tetrabromotiofene in acido acetico a 90 p. cto. ed anidride cromica in eccesso. Bollendo a lungo, il liquido diventa verde e versando nell'acqua si ottiene un precipitato giallo, che contiene ancora in gran parte il composto inalterato. Per ottenere una trasformazione completa bisogna operare in modo, che la maggior parte del tetrabromotiofene venga distrutta. A tale scopo si tratta, a poco a poco, una soluzione bollente di 3 gr. del composto bromurato in 50 c. c. d'acido acetico al 90 p. cto., con 5 gr. d'anidride cromica. Verso la fine dell'operazione si sviluppano copiosamente vapori di bromo e si separa, in seno al liquido bollente, un composto cristallino di colore giallo-ranciato. Questa assai singolare sostanza é insolubile quasi in tutti i solventi e si puó purificare già per sola ebollizione con alcool. Essa si presenta in squamette splendenti, che scaldate sulla lamina di platino si volatilizzano in gran parte senza fondere, formando un vapore colorato in giallo. Scaldata in tubicino, comincia a colorarsi in bruno a circa 240° ed a 310° non fonde ancora. È sublimabile. Noi abbiamo analizzato la sostanza bollita semplicemente con alcool e quella purificata per cristallizzazione dal xilene bollente. Essa è, come si disse, quasi insolubile nei solventi ordinari, nel xilolo bollente si scioglie tanto da poterla fare cristallizzare, impiegando peró molto liquido e bollendo a lungo. La soluzione è colorata in giallo-ranciato e depone per raffreddamento dei cristallini dello stesso colore. La materia, che rimane in soluzione, ha peró proprietà assai diverse da quella che si separa e per ottenerla conviene concentrare fortemente il liquido.

Le analisi dettero numeri, che conducono alla formola:

$$C_9Br_4S_2O_2,$$

che noi pubblichiamo con riserva.

I. 0,2106 gr. di sostanza, bollita con alcool, dettero 0,3049 gr. di $AgBr$ e 0,1908 gr. $BaSO_4$.

II. 0,1908 gr. di sostanza, cristallizzata una sola volta dal xilolo bollente, diedero 0,1732 gr. di $BaSO_4$.

III. 0,1709 gr. di sostanza, cristallizzata tre volte dal xilolo bollente e seccata a 140°, dettero 0,2463 gr. di $AgBr$.

IV. 0,1660 gr. di sostanza, come sopra, dettero 0,1507 gr. di $BaSO_4$.

V. 0,1534 gr. di sostanza, come sopra, dettero 0,1169 gr. di CO_2 e 0,0124 gr. di H_2O.

VI. 0,2757 gr. di sostanza, come sopra, dettero 0,2070 gr. di CO_2 e 0,0067 gr. di H_2O.

In 100 parti:

	trovato						calcolato per $C_9Br_4S_2O_2$
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
C	— —	— —	— —	— —	20,78	20,48	20,61
H	— —	— —	— —	— —	0,89 (*)	0,27	— —
Br	61,60	— —	61,32	— —	— —	— —	61,07
S	12,43	12,46	— —	12,46	— —	— —	12,21.

Non è possibile per ora fare nessuna supposizione sulla costituzione chimica di questo corpo, che si forma in assai piccola quantità. Esso si scioglie nella liscivia di potassa bollente con colorazione bruna, colla potassa alcoolica dà già a freddo un liquido colorato in rosso, che per ebollizione diventa giallo. Bollendolo con una soluzione alcoolica di cloridrato d'idrossilammina rimane inalterato, mentre riscaldandolo direttamente con fenilidrazina, oppure bollendolo con una soluzione acetica o xilenica di questo reattivo, si svolge idrogeno solforato e si formano dei prodotti amorfi molto colorati.

Nel xilolo, che ha servito a purificare il composto ora descritto, rimane disciolta una materia, che è molto più solubile. Concentrando fortemente il liquido, si separa e forma dei fiocchi gialli, amorfi, che fondono verso i 220° e che sono facilmente solubili anche nel benzolo. L'etere petrolico la precipita dalle soluzioni allo stato amorfo. Non è improbabile che questo corpo sia un prodotto di scomposizione della materia poco solubile che abbiamo analizzato.

Per studiare la natura di questi composti sarebbe necessario impiegare una grande quantità di tetrabromotiofene.

II. *Comportamento dell' α-tribromotiotolene.*

L' α-metiltiofene impiegato per questi studi venne preparato per sintesi

(*) L'eccesso d'idrogeno non è da attribuirsi ad impurezza della sostanza, ma ad un errore [illegible]rso nell'analisi, del quale s'è trovata la causa.

col metodo di Paal (*) dall'acido levulinico, per azione del solfuro di fosforo. La trasformazione nel composto tribromurato avviene facilmente seguendo le indicazioni di Vittorio Meyer (**), ed il prodotto da noi ottenuto aveva il suo punto di fusione a 86° in corrispondenza con quello trovato da questo autore. I tribromotiotoleni agiscono prontamente coll'acido nitrico ed in modo molto energico; giova quindi aggiungere lentamente il composto all'acido raffreddato. Noi abbiamo operato nel seguente modo: 1 parte (uno o due grammi per volta) di tribromotiotolene venne introdotta a poco a poco in 10 parti di acido nitrico della densità 1,52, raffreddato con neve e sale; appena la sostanza viene in contatto con l'acido vi si scioglie con leggero sibilo, colorando il liquido in rosso-bruno. Questo emette vapori rossi, ma non si osserva la separazione di bromo. Ad operazione terminata si versa l'acido in 60 parti d'acqua fredda, che si colora in giallo e s'intorbida alquanto. Per estrarre con etere il nuovo composto formatosi, è conveniente neutralizzare con soda o potassa la maggior parte dell'acido nitrico. L'estratto etereo lascia indietro un residuo oleoso, giallognolo, che contiene ancora acido nitrico. Per liberarlo da questo lo si scioglie nell'acqua calda, in cui non é molto solubile, si filtra la soluzione, perché contiene in sospensione delle goccette oleose, e si ripete l'estrazione con etere. Il prodotto, così ottenuto, è sempre oleoso e colorato in giallo, ma si solidifica dopo qualche tempo, massime se viene fortemente raffreddato ed agitato con poca acqua. La materia solida, filtrata e seccata nel vuoto, venne purificata sciogliendola a caldo nel benzolo e precipitando la soluzione con etere petrolico. Ripetendo alcune volte questo trattamento si ottengono prismetti senza colore, che fondono a 78-79°. — Da 12 gr. di α-tribromotiotolene abbiamo avuto 6 gr. del composto perfettamente puro.

Le analisi conducono alla formola:

$$C_5H_4Br_2O_3,$$

che è quella dell'acido bibromoacetilacrilico.

I. 0,2833 gr. di sostanza, dettero 0,2313 gr. di CO_2 e 0,0434 gr. di H_2O.

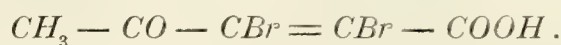
II. 0,2980 gr. di materia, dettero 0,4114 gr. di $AgBr$.

(*) L. Annalen. 206, 19.
(**) Die Thiopengruppe. pag. 38.

In 100 parti:

	trovato		calcolato per $C_5H_4Br_2O_3$
	I.	II.	
C	22,26	— —	22,06
H	1,70	— —	1,47
Br	— —	58,74	58,82.

Per i nostri studi la formazione di questo acido presentava un notevole interesse e perciò era necessario dimostrare sperimentalmente che esso possedesse la costituzione dell'*acido bibromoacetilacrilico* da noi supposta:

$$CH_3 - CO - CBr = CBr - COOH.$$

Il composto, da noi ottenuto, si scioglie nei carbonati alcalini con effervescenza; la potassa probabilmente lo scompone e si ottiene un liquido colorato in giallo. Trattando la sua soluzione acetica con fenilidrazina si produce, dopo qualche tempo, un precipitato, formato da aghi giallastri, che si possono fare cristallizzare dall'alcool diluito. Questo prodotto non sembra però essere una sostanza unica, perchè fonde fra 84° e 100°. Evidentemente nell'azione della fenilidrazina viene in parte eliminato il bromo e ciò rende troppo complicata la reazione.

Non potendo per questa via raggiungere lo scopo, abbiamo studiato i prodotti di riduzione del nuovo acido, impiegando come riducente l'amalgama di sodio in soluzione acida. La soluzione acquosa dell'acido venne trattata con una piccola quantità di acido solforico ed indi agitata con amalgama di sodio al 2,5 p. cto.. Questo venne aggiunto a poco per volta, fino ad arrivare a 30 gr. per 2 gr. di acido impiegato, avendo però sempre cura, che il liquido rimanga leggermente acido. Il liquido separato dal mercurio fu in fine trattato con un forte eccesso d'acido solforico diluito ed estratto con etere. Si ottiene un prodotto oleoso, che contiene ancora bromo, il quale sembra non possa essere completamente eliminato nelle condizioni in cui noi abbiamo operato. Supponendo che il prodotto di riduzione contenesse un acido monobromolevulinico assieme ad acido levulinico, l'abbiamo trattato con bromo per ottenere un acido bibromolevulinico facilmente riconoscibile. Difatti aggiungendo alla soluzione cloroformica la quantità necessaria di bromo e svaporando il solvente, resta indietro una materia oleosa, che non tarda a solidificarsi e che, cristallizzata ripetutamente dal cloroformio, si presenta in aghetti bianchi, il di cui punto di fusione, 114-115°, coincide con quello d'uno degli acidi bibromolevulinici.

Anche l'analisi venne a confermare la composizione del prodotto.

0,1440 gr. di materia, dettero 0,1984 gr. di $AgBr$.

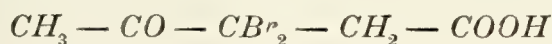
In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_5H_6Br_2O_3$
Br	58,62	58,40.

L'acido bibromolevulinico, che fonde a 114-115°, è quello che si forma direttamente trattando l'acido levulinico con bromo, ma la sua costituzione non è stata ancora determinata con certezza. Wolff (*) suppone che esso abbia una delle due seguenti formole:

$$CH_3 - CO - CBr_2 - CH_2 - COOH$$

oppure

$$CH_2Br - CO - CHBr - CH_2 - COOH,$$

di cui la prima avrebbe la maggiore probabilità.

Per la questione, che avevamo a risolvere, non importava, del resto, conoscere esattamente la costituzione dell'acido bromolevulinico formatosi, perchè sarebbe stato già sufficiente ottenere l'acido levulinico. Le nostre esperienze dimostrano, che il prodotto di ossidazione dell'α-bromotiotolene contiene la catena fondamentale di atomi propria all'acido levulinico, e la sua costituzione deve essere perciò quella dell'acido bibromoacetilacrilico, come avevamo supposto.

Ci resta ancora ad indicare alcune proprietà di questo acido, delle quali non abbiamo fatto menzione finora. L'acido $\alpha\beta$-acetilbibromoacrilico, che fonde a 78-79°, è poco solubile nell'acqua fredda, facilmente nella calda, da cui può essere agevolmente cristallizzato. Nell'etere e nell'alcool è del pari molto solubile. Si scioglie pure abbastanza facilmente nel benzolo, mentre è insolubile nell'etere petrolico.

Svaporando lentamente una soluzione benzolica, si ottengono facilmente cristalli bene sviluppati, che furono studiati dal dott. G. B. Negri, alla cui cortesia dobbiamo le seguenti misure:

« Sistema cristallino: trimetrico.

« $a : b : c = 0,63807 : 1 : 0,46704$.

(*) L. Annalen. 260, pag. 85.

« Forme osservate: (010), (110), (101), (111) riunite costantemente in « una sola combinazione.

ANGOLI	MISURATI		CALCOLATI	*n*
	LIMITI	MEDIE		
010 : 111	69°.15′ — 69°.32′	69°.21′	*	8
110 : 111	49°.01′ — 49°.04′	49°.02′	*	6
010 : 110	57°.22′ — 57°.37′	57°.28′	57°.28′	10
110 : $1\bar{1}0$	65°.07′ — 65°.11′	65°.10′	65°.05′	6
111 : 101	20°.15′ — 21°.00′	20.°42′	20°.39′	8
111 : $\bar{1}\bar{1}1$	81°.59′ — 82.°06′	82°.02′ $\frac{1}{2}$	81°.56′	2
111 : $\bar{1}11$	67°.06′ — 67°.12′	67°.09′	67°.06′	2
101 : $\bar{1}01$		72°.12′	72°.24′	1
110 : 101	60°.11′ — 60°.43′	60°.27′	60°.08′	2
110 : $1\bar{1}1$	73°.55′ — 73°.59′	73°.57′	73°.58′	2
111 : $\bar{1}01$	73°.09′ — 73°.40′	73°.27′	73°.34′	4

Fig. 1.

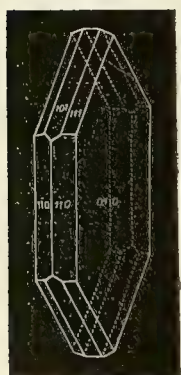



Fig. 2.

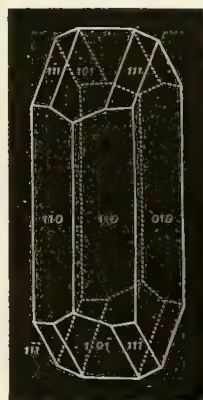



Fig. 3.

« Cristalli vistosi, incolori, con facce lucentissime, d'abito assai varia- « bile. Generalmente laminari secondo (010) ed allungati nel senso di « [001] (Fig. 1); alcune volte prismatici ed allungati pure secondo [001] « (Fig. 2), altre volte laminari secondo (010) e con apparenza spiccatamente

« emimorfica rispetto agli assi x e z (Fig. 3). V'hanno poi dei casi in cui « le facce delle singole forme sono di estensione così differente, che i cri- « stalli assumono un aspetto triclino. Le facce predominanti sono quelle di « (010), (110), (111), mentre le (101) sono di solito assai strette, però anche « esse, in qualche cristallo, appariscono ampie e permettono buone misure.

« Al goniometro le facce di tutte le forme riflettono immagini semplici « e nette.

« Sfaldatura (010) perfetta.

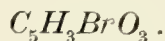
« Piano degli assi ottici (100), i quali escono attraverso (010); bisettrice « acuta b; $\rho < v$.

Il tribromo-α-tiotolene viene ossidato anche dall' acido cromico in soluzione acetica ed il prodotto che si ottiene, presenta grande somiglianza con quello proveniente dal tetrabromotiofene, tanto che è possibile sia la medesima sostanza.

III. *Comportamento del β-tribromotiotolene.*

Il β-tiotolene fu preparato dall' acido pirotartrico, distillando, conformemente alle indicazioni di Volhard ed Erdmann (*), il suo sale sodico con solfuro di fosforo. Le proprietà del tiotolene ottenuto erano corrispondenti á quelle descritte da questi autori e così pure quelle del suo derivato tribromurato, che fondeva a 34°. L'ossidazione con acido nitrico fu eseguita in modo simile a quella del α-tribromotiotolene. La sostanza venne introdotta in una quantità 10 volte maggiore del suo peso d'acido nitrico, della densità 1,52, raffreddato con neve e sale. I fenomeni, che si osservano, sono anche in questo caso presso a poco gli stessi. L'acido agisce prontamente sul composto tiofenico, il quale si scioglie colorandolo in rosso. Al fondo del vaso si separa però questa volta del bromo. Versando tutto nell'acqua si ottiene una soluzione limpida, che venne trattata nel modo già indicato. Il prodotto della reazione é un liquido oleoso, che però si solidifica facilmente. Lasciandolo per qualche giorno nel vuoto sulla calce, per liberarlo del tutto dall'acido nitrico, esso forma una massa opaca, bianca o leggermente colorata in giallo. Da 6 gr. di tribromotiotolene si ottennero 5 gr. del prodotto greggio. Per purificarlo lo si scioglie nel benzolo, in cui è molto solubile, e dopo avere scolorato la soluzione con nero animale, la si precipita con etere petrolico. Nel benzolo rimangono insolubili piccolissime quantità d' una sostanza gialla semisolida. Ripetendo più volte la precipitazione del composto con etere petrolico in soluzione benzolica, si ottengono squamette senza colore, che fondono a 100-101°.

(*) Berl. Ber. 18, 454.

L' analisi dimostra, che il prodotto ha la composizione dell' *anidride bromocitraconica* :

$$C_5H_3BrO_3 .$$

0,2168 gr. di sostanza, dettero 0,2136 gr. di $AgBr$.

In 100 parti :

	trovato	calcolato per $C_5H_3BrO_3$
Br	41,92	41,88 .

Le proprietà della sostanza da noi ottenuta corrispondono perfettamente a quelle dell' anidride monobromocitraconica ; soltanto il punto di fusione da noi osservato è di un grado più elevato di quello trovato da Fittig e Krusemark (*). Questa lieve differenza è però senza dubbio da ascriversi all'avere noi impiegato un termometro di Zincke, la di cui scala incomincia a + 40°, in modo che le temperature direttamente osservate non hanno quasi bisogno d' essere corrette.

IV. *Ricerche sull' andamento quantitativo dell' ossidazione dei bromotiofeni con l' acido nitrico.*

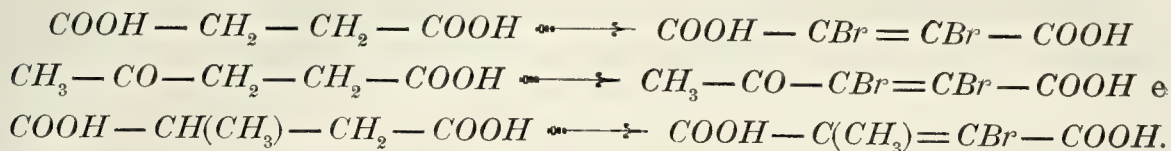
La reazione ora descritta, che avviene fra i tiofeni bromurati e l'acido nitrico, non solo dimostra l'analogia di comportamento del nucleo tiofenico con quello pirrolico e furfuranico, ma presenta anche un certo interesse per la determinazione della posizione dei radicali alcoolici, che sostituiscono l' idrogeno nel tiofene. Se la costituzione dei due tiotoleni non fosse stata già nota, le nostre esperienze l' avrebbero determinata. In ogni modo esse provano, che la formazione dei nuclei tiofenici dagli acidi levulinico e pirotartrico avviene realmente nel modo che s' era supposto.

L' ossidazione dei tiofeni bromurati coll' acido nitrico, può essere considerata, in certo modo, come un' inversione del processo sintetico dei tiofeni corrispondenti, perchè i prodotti di scomposizione sono analoghi alle sostanze con cui vennero eseguite le sintesi.

Il tiofene, che si ottiene dall' acido succinico per azione del solfuro di fosforo, produce nell' ossidazione del suo derivato tetrabromurato l' acido bibromomaleico, e nello stesso modo l' α-metiltiofene ed il β-metiltiofene,

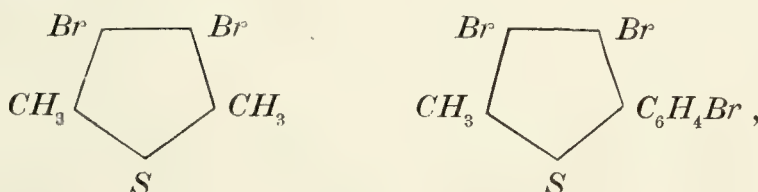
(*) L. Annalen. 206, 19.

che si ottengono rispettivamente dagli acidi levulinico e pirotartrico danno, gli acidi bibromoacetacrilico e bromocitraconico.

$$COOH-CH_2-CH_2-COOH \longrightarrow COOH-CBr=CBr-COOH$$
$$CH_3-CO-CH_2-CH_2-COOH \longrightarrow CH_3-CO-CBr=CBr-COOH \text{ e}$$
$$COOH-CH(CH_3)-CH_2-COOH \longrightarrow COOH-C(CH_3)=CBr-COOH.$$

Queste ricerche meritano d'essere proseguite, applicandole agli altri derivati *monosostituiti del tiofene*, per vedere, se le regole da noi stabilite si verificano generalmente.

I tiofeni bisostituiti hanno invece, a quanto sembra, un comportamento diverso. I loro derivati bromurati danno per azione dell'acido nitrico sostanze liquide o amorfe, che presentano al loro studio quasi insuperabili difficoltà.

Noi abbiamo sperimentato coll'*αα'-dimetilbibromotiofene* e coll'*αα'-metilfeniltribromotiofene*

Br — Br / CH_3 — CH_3 / S   Br — Br / CH_3 — C_6H_4Br , / S

con la speranza d'ottenere i composti chetonici corrispondenti:

$$CH_3-CO-CBr=CBr-CO-CH_3 \text{ e } CH_3-CO-CBr=CBr-CO-C_6H_4Br,$$

e sebbene i prodotti formatisi sieno ancora di natura sconosciuta, pure ci sembra non possiedano i caratteri dei due chetoni indicati.

L'*αα*-dibromotioxene reagisce violentemente sull'acido nitrico ($d = 1,52$), raffreddato a — 18°, ed il liquido, diluito con acqua, cede all'etere una materia oleosa, densa, giallognola, che non si solidifica e che sembra non si combini con la fenilidrazina.

L' *αα*-tribromometilfeniltiofene, che, per ossidazione con acido cromico in soluzione acetica, dà l'acido *p*-bromobenzoico (*), si scioglie prontamente nell'acido nitrico ($d = 1,52$), raffreddato con neve e sale, ed il liquido, versato nell'acqua, produce un precipitato d'una materia fioccosa gialla, amorfa,

(*) Vedi C. Paal — Furfuran, Thiophen und Pyrrolsynthesen aus γ-Diketonen und γ-Ketonsäuren. Habililationsschrift. Würzburg 1890, pag. 115.

ribelle a tutti i nostri tentativi, diretti a trasformarla in un prodotto cristallino bene definito. Bollendola a lungo con acido nitrico si forma, è vero, una sostanza di indistinta struttura cristallina, ma il prodotto, anco dopo ripetute cristallizzazioni dal benzolo, ha un punto di fusione così indeciso da non invogliare ad uno studio ulteriore.

Resultati del pari poco soddisfacenti abbiamo ottenuto nei tentativi di seguire quantitativamente l'andamento dell'ossidazione dei tiofeni bromurati. Impiegando un acido nitrico meno concentrato, della densità 1,45 fino a 1,47, ed interrompendo dopo un certo tempo la reazione, si può dedurre, misurando la quantità d'acido solforico formatasi, il grado della trasformazione avvenuta. Noi abbiamo fatto in proposito numerose esperienze, allo scopo di vedere se in questo modo si potesse determinare la resistenza relativa del nucleo tiofenico nei suoi derivati. I resultati hanno però dimostrato che questa reazione non si presta a tale scopo, perché sul suo andamento influiscono in sommo grado le condizioni in cui si opera.

Per dare un' idea di queste misure, ne riporteremo alcune, sebbene non corrispondano al concetto per cui furono istituite. I tiofeni bromurati venivano posti in contatto coll' acido nitrico, d' una data concentrazione, in condizioni per tutti perfettamente identiche, durante un certo spazio di tempo, alla temperatura di 0°. Per interrompere l' azione, si trattava il miscuglio con una grande quantità di acqua e si estraeva immediatamente con etere la parte del composto rimasta inalterata. Nel liquido acquoso veniva poi determinato l' acido solforico con le norme ordinarie e dalla quantità di questo si deduceva il grado della trasformazione avvenuta.

Impiegando l' acido nitrico della densità di 1,47 (a 13°) e lasciandolo agire sui tiofeni bromurati per 18 minuti, si ebbero i seguenti risultati: La quantità di acido stava a quella del tiofene bromurato come 30 a 1.

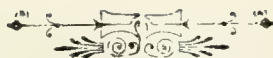
Tetrabromotiofene .	Quantità trasformata :			2,92 p. cto.
α-tribromotiotolene.	»	»	»	84,62 p. cto.
β-tribromotiotolene.	»	»	»	72,00 p. cto.

Con un acido nitrico più diluito, della densità 1,45 (a 15°), si ebbero, operando nello stesso modo, con una durata dell' azione di 51 minuti, i seguenti numeri:

α-tribromotiotolene.	Quantità trasformata :			24,14 p. cto.
β-tribromotiotolene.	»	»	»	31,12 p. cto.

Impiegando un acido più diluito il β-tribromotiotolene venne dunque

attaccato maggiormente del suo isomero. Noi crediamo che queste differenze provengano segnatamente dal fatto, che le quantità di bromo, che si liberano da questi composti, non sono le stesse, per cui, massime in presenza d' un acido nitrico più diluito, l' azione ossidante del bromo potrà influire in modo diverso nei diversi casi.

Noi crediamo che queste ricerche, convenientemente modificate, potranno condurre a resultati migliori ed in questo senso saranno forse continuate.

LE FORMICHE DELL'AMBRA SICILIANA

NEL MUSEO MINERALOGICO DELL'UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

MEMORIA

DEL

Prof. CARLO EMERY

(Letta nella Sessione del 12 Aprile 1891).

(CON TRE TAVOLE)

Dum phaëtontea formica vagatur in umbra
Implicuit tenuem succina gutta feram.
Martialis Epigr. Lib. VI, 15.

I. INTRODUZIONE

La presente memoria ha per oggetto lo studio delle formiche fossili, contenute nelle Ambre Siciliane della ricca collezione radunata dal Prof. Bombicci, nel Museo Mineralogico di questa Università. Tra i pezzi insettiferi, dieci soli contenevano formiche, ma alcuni di essi n'erano tanto ricchi da costituire, ciascuno per sè, un piccolo museo. Avevo sperato di poter fare un lavoro più esteso e completo, aggiungendo allo studio della raccolta bolognese quello degl'importanti materiali esistenti nel Museo di Catania, tra i quali avrei forse ritrovati i tipi di Maravigna figurati dal Guérin-Méneville. La morte immatura del Prof. Silvestri, il quale mi aveva già promesso di affidarmi quelle collezioni preziose, mi costringe a contenere entro più angusti limiti questo scritto, senza abbandonare la speranza di proseguire più tardi i miei studi sulla interessantissima fauna mirmecologica fossile della Sicilia.

Nel suo classico lavoro sulle formiche dell'ambra del Baltico, il Mayr enumera le cause d'errore e le difficoltà che si oppongono all'esame accurato degl'insetti fossili dell'ambra. Queste difficoltà sono anche maggiori per l'ambra di Sicilia, i cui colori carichi e riflessi fluorescenti, tanto belli allo sguardo, sono un nuovo ostacolo allo studio di minuti inclusi a luce incidente, quando non si trovino vicinissimi alla superficie; questa circostanza rende particolarmente malagevole riconoscere la sottile scultura della chitina; anche le tinte divengono perciò difficili a distinguere

e quasi tutte le formiche appariscono quindi più o meno fosche, forse ancora in molti casi per alterazioni sofferte durante la fossilizazione. Il valore ragguardevole dei grossi pezzi, e alcune volte il gran numero degl' insetti contenuti in uno stesso masso fanno desiderare di conservare, per quanto sia possibile, l' integrità degli esemplari, non adoperando la sega e la lima più di quanto sia necessario per potere osservare gli inclusi con la lente e col microscopio; in alcuni casi, gl' insetti sono tanto numerosi e ravvicinati fra loro che, dividendoli, si corre rischio di distruggere involontariamente qualcuno degl' inclusi, situati profondamente, la cui posizione nell' interno di un pezzo irregolare è spesso difficile a determinare con precisione. — A questo proposito, devo speciali grazie al Prof. Bombicci che mi concesse di eseguire quei tagli e faccette che giudicai necessari, per mettere meglio in evidenza le formiche da determinare, e anche di staccare in un pezzetto isolato alcuni di questi insetti. Un esame veramente accurato e una determinazione precisa, spesso non sono altrimente attuabili e, nella ricchissima collezione di fossili succinici del Museo Stantien & Becker di Königsberg, ciascun insetto è separato a quel modo in un parallelipipedo d' ambra abbastanza piccolo perchè sia possibile esaminarlo con forte ingrandimento da diversi lati.

Descriverò nella parte speciale le condizioni di conservazione dei singoli esemplari, e le alterazioni che ebbero a soffrire. Qualchevolta queste alterazioni sembrano essere dovute alla poca consistenza del tegumento, come si osserva in quasi tutti gli esemplari della *Plagiolepis labilis*, che veggonsi stecchiti, come insetti immaturi disseccati all' aria. Merita speciale menzione il *Technomyrmex deletus*; nell' unico esemplare molto guasto, l' addome è stato squarciato e il gigerio chitinoso, isolato in mezzo all' ambra, costituisce un preparato anatomico naturale tanto perfetto da permetterne l' esame con forte ingrandimento col microscopio

II. CENNO STORICO-BIBLIOGRAFICO

La letteratura scientifica delle formiche dell'ambra siciliana si riduce a poca cosa. — Nel 1838, il Maravigna, professore di Chimica nell'Università di Catania, recava a Parigi alcune ambre siciliane insettifere che furono esaminate dal Guérin-Méneville; questi pubblicava un elenco degl'insetti osservati in esse (1), nel quale novera, senza descriverle, nè nominarle, sette specie di formiche di forme singolari, di cui quattro sono figurate nella tavola annessa al lavoro (fig. 9-12), in modo assai primitivo e non tale da permettere una determinazione generica nel senso odierno. — Nella sua memoria sulle formiche dell'ambra baltica, il Mayr (2) riferisce che non riuscì ad ottenere ambre insettifere siciliane, per quanto ne facesse ricerca, e tenta d'interpretare le figure del Guérin, delle quali riferisce le 10 e 12 al genere *Sima*, la 9 con dubbio al genere *Leptomyrmex* e suppone che la 11 possa essere una *Plagiolepis*. Dopo il Mayr, non mi consta che altri siasi occupato delle formiche dell'ambra sicula, fuorchè il Malfatti (3), il quale, in una breve nota, descrive e figura una piccola formica da lui attribuita al genere *Tapinoma*. La figura, eseguita in condizioni sfavorevoli della superficie dell'ambra e guastata dall'incisore, è tutt'altro che esente da gravi difetti: l'insetto appartiene senza dubbio al gruppo dei Dolichoderinae, e la forma del peduncolo addominale figurata è propria dei generi *Tapinoma* e *Technomyrmex*; però la grandezza e la posizione attribuite agli occhi nella figura sono diverse da quanto osservasi in tutti i generi noti di quel gruppo.

(1) Lettre (de M. Maravigna) à M. Guérin-Méneville etc. in: Revue Zoologique par la Société Cuvierienne. Paris, Tome I, pag. 168-170, Pl. 1.

(2) Die Ameisen des baltischen Bernsteins, in: Beiträge zur Naturkunde Preussens, herausg. v. d. Physik. Oekon. Ges. Koenigsberg 1868, 102 pgg. 5 Taf.

(3) Due piccoli imenotteri fossili nell'ambra siciliana; in: Atti R. Accademia dei Lincei. Serie 3. Vol. V. Transunti. Seduta del 2 Gennajo 1881.

III. ELENCO DEL MATERIALE STUDIATO

A. Distinta dei pezzi d'ambra e delle formiche contenute in essi. Alcuni pezzi che sono stati tagliati portano ora più di un numero nell' inventario del Museo.

Numero d' ordine	Numero d' inventario	NOME	Esemplari per specie	Esemplari per pezzo
1	16618	Ponera leptocephala	1	11
		Cataulacus planiceps	2	
		Hypopomyrmex Bombiccii	1	
		Podomyrma Mayri	2	
		Leptomyrmex Maravignae	1	
		Plagiolepis labilis	4	
2	16624 16625	Podomyrma Mayri	4	7
		Tapinoma minutissimum	1	
		Plagiolepis labilis	1	
		Gesomyrmex corniger	1	
3	16629	Ectatomma gracile	1	4
		Cataulacus Silvestrii	1	
		Crematogaster praecursor	2	
4	16632	Podomyrma Mayri	1	2
		Technomyrmex deletus	1	
5	16622	Aëromyrma Sophiae	7	7
6	16626	Plagiolepis labilis	2	2
7	16617	Oecophylla sicula	2	2
8	86 (uno dei pezzi)	Plagiolepis labilis	4	4
9	16633	esemplari non determinabili	1	1
10	16631		1	1

B. Distinta delle specie e degli esemplari determinati.

Numero d' ordine	NOME E SESSO	Numero d' esemplari
1	Ectatomma gracile ♂	1
2	Ponera leptocephala ♀	1
3	Cataulacus Silvestrii ☿	1
4	—— planiceps ☿	2
5	Hypopomyrmex Bombiccii ♀	1
6	Podomyrma Mayri ☿	7
7	Aëromyrma Sophiae ♂	7
8	Crematogaster praecursor ♂ . . .	2
9	Leptomyrmex Maravignae ♂ . . .	1
10	Tapinoma minutissimum ♂	1
11	Technomyrmex deletus ☿	1
12	Plagiolepis labilis ☿	11
13	Gesomyrmex corniger ☿	1
14	Oecophylla sicula ☿	2
	Totale	39

IV. DESCRIZIONE DELLE SPECIE

1.ª Sottofamiglia *PONERINAE.*

Genere *ECTATOMMA*, F. Smith.

1. E. gracile n. sp. tav. I, fig. 1, 2.

Mas. *Gracilis, haud pilosus, capitis vertice carina transversa alta, mandibulis cultriformibus edentatis, oculis prominentibus, antennis longis et tenuibus, collo pronoti perlongo, peduncolo abdominis elongato, angusto, humili, pedibus gracillimis, Long. verisimiliter* 3,5 mm. *(abdominis apex deest in specimine unico).*

L'unico esemplare è ben conservato, ma si trova vicino alla superficie di un pezzo lavorato ad ovoide appiattito ; nel dare questa forma al pezzo,

erano state portate via l'estremità dell'addome e parte delle ali e dei piedi. Le ali, una fessura dell'ambra e un esemplare di *Crematogaster* fanno ostacolo all'esame della faccia dorsale dell'insetto. Tutto il corpo sembra essere fittamente punteggiato, salvo l'addome che, almeno di sotto, é liscio. Le figure basteranno a far conoscere il profilo dell'insetto e la forma del suo capo. Questo é notevole per la sporgenza a forma di cresta trasversale che si vede sul vertice e per gli occhi piccoli ma fortemente sporgenti e come peduncolati. Un leggero intorbidamento dell'ambra non mi ha permesso di riconoscere con precisione la posizione degli ocelli e altri particolari del capo. Il peduncolo addominale veduto di sotto é stretto e coi lati paralleli, un poco piú stretto ancora nel suo quarto posteriore. Tutto l'insetto é nero, con le sole mandibole (che sono deboli, diritte e acuminate) di colore testaceo scuro. Le venature delle ali sono testacee, lo stigma quasi nero.

Genere *PONERA*, Latreille.

2. **P.(?) leptocephala** n. sp. tav. I, fig. 3, 4.

Femina. *Insignis capite elongato, postice attenuato, oculis magnis, post media capitis latera positis, mandibulis trigonis elongatis, antennis 12-articulatis, gracilibus, metanoto postice truncato, squama elevata, superne attenuata, margine acuto, abdomine antice truncato; corpus totum, scapi et pedes pilosi, unguiculi simplices. Long. (capite deflexo)* 4 mm. *Alae cellula radiali clausa, cubitalibus duabus.*

L'esemplare descritto é uno dei molti insetti contenuti nel grande pezzo N.° 16618 della collezione. Esso faceva parte di un gruppo di formiche incontrato da una grande fessura naturale dell'ambra. Nel dividere il pezzo nella direzione di questa fessura venne notevolmente danneggiato. Il capo, le antenne, parte delle zampe e l'estremitá dell'addome con l'aculeo sporgente sono intatti; del torace e del peduncolo rimane l'impronta cava; gran parte delle ali é perduta, peró la metá apicale dell'ala anteriore sinistra é conservata sopra un altro preparato, nel quale si trova l'*Hypopomyrmex Bombiccii.* D'altronde il corpo di questa ponera era notevolmente alterato e l'ambra fortemente oscurata e intorbidata intorno ad esso. Ho poco da aggiungere a quanto mostrano le figure e la diagnosi; é singolarissima la forma del capo che si puó vedere bene soltanto di profilo: peró ho potuto assicurarmi che, anche veduto d'innanzi, é notevolmente allungato e stretto e che le mandibole sono trigone, ma molto allungate e acuminate all'apice. — L'aspetto singolare dell'insetto da l'impressione che esso debba formare un genere a sé; non mi é parso conveniente istituire

una nuova divisione generica, perché, non potendo, per le condizioni speciali dell'esemplare, vedere bene la disposizione del clipeo e delle lamine frontali, il genere sarebbe stato fondato su caratteri superficiali e di poca importanza. Perciò ho preferito lasciare provvisoriamente la specie nel genere *Ponera*, al quale si avvicina pel modo di articolazione dell'addome e per le unghie semplici.

2.ª Sottofamiglia *MYRMICINAE.*

Genere *CATAULACUS*, F. Smith.

3. **C. Silvestrii** n. sp. tav. I, fig. 5-7.

Operaria. *Elongata, creberrime punctata, opaca, pilis erectis brevibus hirta; caput convexum, reticulatum, postice utrinque spinosum, mandibulis striatis: thorax gracilis, pro-mesonoto mutico, lateribus antice posticeque obtuse angulato, metanoto utrinque spina longa et valida armato, superne et lateribus rugoso-reticulatus, metanoto magis longitrorsum rugoso, pagina ipsius declivi concava, sublaevi; abdomen segmentis petioli gracilibus, superne reticulatis, nodulis reticuli prominentibus, primo postice angustato, infra cum appendice laminari apice dilatato, secundo antice emarginato, infra bidentato; segmentum tertium fere totum abdomen tegens, striato-rugulosum, versus marginem anticum subreticulatum; pedes striati. Long. capite deflexo* 3, 8 mm., *capite extenso* 5 mm.

L'unico esemplare proviene dal medesimo pezzo che conteneva l'*Ectatomma gracile*; esso è mirabilmente conservato in tutte le sue parti e, isolato in un piccolo pezzo d'ambra, lascia ben vedere la scultura della superficie. È notevole la forma allungata del torace, i cui margini laterali sono affatto inermi; una fessura contenente aria impedisce di determinarne con precisione i contorni, specialmente nell'aspetto dorsale; le spine del metanoto sono congiunte fra loro alla base da un margine tagliente che separa la faccia declive di questo segmento dalla basale. La forma speciale dei segmenti del peduncolo e le loro appendici sono illustrati meglio dalle figure che da qualsiasi descrizione. La scultura che ho cercato di rendere nel disegno, laddove era meglio visibile, è quella abituale dei *Cataulacus* viventi, cioè che, sopra un fondo costituito da una punteggiatura fitta e sottile, è disposto un sistema di rughe elevate formanti un reticolo a maglie irregolari, i cui nodi sono più sporgenti e portano un pelo. Le singole maglie sono più regolarmente poligonali sul capo, più allungate sul pro-mesonoto, e si trasformano quasi in solchi longitudinali irregolari sulla faccia basale del metanoto, mentre sul pedun-

colo la rete è più minuta e molto rilevata, in ispecie i suoi nodi che sembrano tubercoletti sporgenti. L'addome propriamente detto offre sottili strie longitudinali e solo l'estrema base è nettamente reticolata. Tutto il corpo è irto di peli corti ma numerosi. Il corpo dell'insetto è nero.

L'insieme dei caratteri ora descritti allontana questa specie da tutte le viventi a me note. La dedico alla memoria del Prof. ORAZIO SILVESTRI, da cui vennero raccolte gran parte delle ambre ora appartenenti al Museo Mineralogico bolognese.

4. **C. planiceps** n. sp. tav. I, fig. 8, 9.

Operaria. *Modice elongata, creberrime punctata, capite thoraceque reticulatis, pilis brevioribus, abdomine pilis longioribus hirtis, capite depresso, subrectangulari, lateribus postice crenatis, angulis posticis spina armatis, thoracis dorso subrecto, lateribus minute denticulatis, metanoto breviter bispinoso, abdominis peduncolo crasso, scabro, segmento secundo subtus mutico, primo obtuse dentato.* Long. 4 — 4, 2 mm.

Ho studiato due esemplari di questa specie; l'uno di essi è molto ben conservato, ma in posizione sfavorevole per lo studio, essendo raggomitolato su di sé; l'altro è alquanto alterato e trovasi molto vicino all'*Hypopomyrmex;* entrambi provengono dal medesimo pezzo d'ambra e differiscono l'uno dall'altro per la grandezza. La scultura è malagevole a vedere e non ho potuto ottenere una buona veduta del dorso del torace. Come nella specie precedente, le spine del metanoto sono unite insieme da un margine tagliente, che limita in alto le superficie declive concava. La forma depressa e subquadrata del capo (1) è caratteristica. Il peduncolo è più breve e robusto che nel *C. Silvestrii*, il primo è munito inferiormente solo di un grosso dente, e il secondo offre appena una sporgenza ottusa. Il colore dell'insetto è nero, i peli, e specialmente quelli più lunghi dei quali l'addome è irto a mo' di spazzola, hanno nel migliore esemplare una tinta rosso porporino.

Genere *HYPOPOMYRMEX* n. gen.

Femina. *Genus* Strumigenyi *ut videtur proximum; cum illo structura capitis scrobis supraocularibus praediti, oculisque minutis, inferis convenit; differt antennis 10-articulatis, clava 2-articulata, scapo basi angusto, versus apicem depresso et dilatato. Alae costis crassis, cella radiali clausa et minute appendiculata, cubitali una clausa et discoidali.*

---

(1) Non è inverosimile che la *Formica quadrata* di Holl (Handbuch der Petrefaktenkunde. 1. Bd. 1829 p. 140) debba riferisi a specie affine alla presente.

5. **H. Bombiccii** n. sp. tav. I, fig. 10, 11.

Femina. *Gracilis, pilosa, confertim reticulato-punctata, capite subcordiformi, mandibulis longe porrectis, scapo cum serie marginali pilorum brevium arcuatorum, metanoto utrinque spinoso et infra spinam appendice compresso, obtuso, segmentis pedunculi ambobus superne cum eminentia squamiformi subtruncata, pedibus longis, gracilibus, tibiis apice dilatatis. Long.* 3, 5 mm.

L'unico esemplare é molto alterato e lascia vedere poco piú di quanto risulta dalla figura e dalla breve diagnosi. Le mandibole sono quasi scomparse e lasciano appena riconoscere il loro contorno esterno attraverso l'ambra intorbidata, e non é possibile vedere la forma del clipeo; l'antenna sinistra é sola visibile; l'estremitá del suo scapo é ripiegata in guisa da simulare un articolo basale del flagello. Il metanoto ha da ciascun lato una spina acuta e, al disotto di essa, il margine laterale della faccia declive si eleva in un lobo piatto che porta alcuni peli. Il primo segmento del peduncolo, veduto obliquamente come lo mostra il preparato, offre una parte anteriore fatta a mo' di picciuolo, su cui s'innalza una specie di squama, col margine superiore troncato e ottusamente quadridentato; il 2° segmento porta anch'esso una squama consimile. Tutto il corpo é fornito di abbondanti peli che sono di due sorta, gli uni lunghi, quasi diritti e assottigliati alla punta, gli altri corti, piú fortemente curvati e non assottigliati all'estremo, ma neppure clavati. La scultura sembra consistere in una fitta punteggiatura a ditale da cucire, ma non é possibile vederla molto distintamente. Tutto l'insetto é testaceo scuro, ma la chitina é molto alterata e in alcuni punti frammentata. La venatura delle ali é molto appariscente, con le coste larghe e fortemente marcate.

Genere *PODOMYRMA* F. Smith.

Sottogenere *ACROSTIGMA* n. subgen.

Operaria. *Structura capitis et clypei cum* Podomyrma *convenit, differt tamen antennis 12-articulatis, clava 3-articulata, reliquo flagello aequilonga, stigmatibusque metanoti mutici superne tuberculi instar prominentibus: femora modice incrassata.*

La specie fossile per la quale instituisco questo nuovo sottogenere mi ha lasciato lungamente perplesso circa le sue affinitá, e ne avrei fatto il tipo di un nuovo genere, se il gen. *Podomyrma* non fosse giá per sé stesso molto eterogeneo. Alle specie australiane e papuane con antenne di 11 articoli e femori fusiformi, André ha aggiunto una specie della

Nuova Caledonia, notevole per le antenne di 12 articoli e i femori semplici. Allo stesso entomologo dobbiamo la conoscenza di una formica africana affine alle Podomyrme sulla quale egli ha fondato il suo genere *Atopomyrmex*; differisce dal genere *Podomyrma* per le antenne di 12 articoli e la singolare armatura del peduncolo.

Il sottogenere *Acrostigma* differisce dalle *Podomyrma* tipiche per le antenne di 12 articoli; da esse e da altre forme affini, per la posizione singolare delle così dette stigme del metatorace, le quali formano ciascuna un tubercolo elevato sul dorso di questo segmento, che è privo di spine e di denti (nella *Podomyrma Albertisi* Emery della Nuova Guinea, che ha anch'essa il metanoto inerme, le stigme sono collocate molto in alto, ma non raggiungono il contorno dorsale quando l'insetto è veduto di fianco). Anche il pronoto è affatto inerme e soltanto il suo dorso è separato dai fianchi mercè uno spigolo tagliente che si prolunga in dietro sul mesonoto e sul metanoto. In un esemplare, vedo sporgere 3 brevi articoli di un palpo che suppongo mascellare, probabilmente fatto di 4 articoli. Le mandibole hanno 7 denti, gli ultimi due più grandi; le lamine frontali sporgono alquanto sul clipeo che è quasi piano e rotondato indietro.

6. **P. (Acrostigma) Mayri** n. sp. tav. II, fig. 12-16.

Operaria. *Sparse pilosa, sparsissime pubescens, nitida, capite, ut videtur, latitudine sua maxima parum longiore, postice truncato, lateribus striatulo, thorace superne utrinque marginato, dorso laevi, lateribus striato-rugosis, sutura pro-mesonotali vix distincta, meso-metanotali profunde impressa, stigmatibus metanoti prominentibus, pedunculo lateribus subparallelis, segmento primo superne obtuse angulato, secundo cum nodo subgloboso. Long.* 3 mm.

Ho esaminato 7 esemplari di cui 4 molto bene conservati. Ciò nonostante, ho durato fatica a riconoscere esattamente la scultura. Debbo specialmente esprimermi in modo riservato circa la scultura del capo che credo sia debolmente striato; negli esemplari in cui era possibile vedere il capo di prospetto, la sua immagine era velata da qualche bollecina d'aria o da intorbidamenti dell'ambra. Le guance e i lati del capo sono striati, il dorso del torace sembra liscio (prescindendo da scarsa punteggiatura), ma le pleure sono obliquamente striato-rugose; il peduncolo pare liscio; l'addome propriamente detto è levigato e lucido, fuorchè forse la base. Il colore degli esemplari migliori è ferrugineo scuro, altri più o meno alterati sono testacei.

Genere *AËROMYRMA* Forel in litt. (1).

Questo genere è stato istituito dal Forel per una specie vivente di Madagascar *(A. Nossindambo)* di cui si conosce solo le forme alate, ♂ e ♀ e che differisce dal genere *Solenopsis* per la cella radiale chiusa; nella ♀ il metanoto è dentato, le antenne di 11 articoli, il clipeo inerme; nel ♂, le antenne sono lunghissime, di 13 articoli. — Appartiene senza dubbio allo stesso genere la formica dell'ambra baltica di cui Mayr descrive la ♀ col nome di *Pheidologeton antiquus;* questa formica differisce dalle ♀ del genere *Pheidologeton* per la piccola statura, la forma meno tozza e la costa cubitale distintamente angolosa nel punto in cui s'incontra con la ricorrente. Della nuova specie fossile siciliana conosco solo il ♂.

7. **A. Sophiae** n. sp. tav. II, fig. 17, 18.

Mas. *Insignis verticis eminentia transversa ocellos pares gerente. Pilosus et pubescens; gracilis, segmento petioli primo valde elongato, latitudine maxima plus triplo longiore, secundo haud breviore quam latiore. Long.* 3, 2 mm. *Alae brunescentes, costis et stigmate obscure testaceis.*

Benché l'identità generica di quest'insetto con la specie vivente sia evidente, ne differisce notevolmente per la forma del capo e tutto l'insieme più gracile. Come si vede dalla figura, il capo della nuova specie, veduto di fianco, ha un contorno triangolare e sembra troncato di dietro, con la fronte larga e pianeggiante (2). Il metanoto offre due tubercoli ottusi. Il peduncolo è molto gracile; l'addome allungato; le valvole genitali esterne robuste. La scultura è una punteggiatura finissima e fitta da cui sorge la sottile pubescenza. I peli ritti sono piuttosto numerosi sul torace, mancano sulle tibie. Il colore è bruno con le zampe più chiare; le ali sono distintamente affumicate con le coste bruno chiaro.

Sette esemplari molto ben conservati e qualche avanzo di un ottavo alla superficie di un pezzo lavorato a forma sferica e forato (N. 16622). La specie è dedicata alla gentile signorina Sofia Bombicci.

(1) Sarà pubblicato quanto prima nell'opera di Grandidier su Madagascar. La definizione del genere è tolta da lettera direttami in proposito dello stesso Forel.

(2) Nella specie di Madagascar, di cui ho d'innanzi esemplari tipici, il capo ha figura rotondeggiante e il peduncolo addominale è molto più breve e grosso.

Genere *CREMATOGASTER* Lund.

8. Crematogaster praecursor n. sp. tav. II, fig. 19-21.

Mi limito a dare di questa minuta specie alcune figure, senza descriverla ulteriormente. È instituita sopra 2 esemplari ♂ racchiusi nello stesso pezzo di ambra (n. 16629) che contiene l'*Ectatomma gracile.* L'uno di essi è talmente circondato da una bolla d'aria da non lasciar vedere distintamente fuorchè il capo e un'ala. L'altro è meglio disteso, ma l'*Ectatomma* che gli sta vicinissimo impedisce di esaminarlo dal lato dorsale. Il peduncolo ha una forma stretta alquanto eccezionale, ma non escludo il sospetto che sia deformato. — I maschi delle numerose forme viventi del genere sono troppo male conosciuti per potere istituire confronti. La lunghezza del corpo è di 2 mm.

3.ª Sottofamiglia *DOLICHODERINAE.*

Genere *LEPTOMYRMEX* Mayr.

Il Mayr riferisce con dubbio a questo genere la fig. 9 del Guérin-Méneville; forse il maschio che sono per descrivere appartiene alla medesima specie. Io lo attribuisco al genere *Leptomyrmex* a cagione della venatura alare che ricorda quella descritta da André nel *L. pallens* Emery della Nuova Caledonia e quella di due esemplari australiani della mia collezione che suppongo appartenere al *L. erythrocephalus* F. (1). Come nelle forme viventi, la venatura alare del fossile è ridottissima, non vi è cella cubitale chiusa, e il ramo interno della costa omonima è rudimentale e staccato dalla cella radiale; quest'ultima è molto ampia nella specie fossile; strettissima e quasi lineare nelle viventi. Il capo è appiattito, allargato in avanti e incavato indietro. — Forse meriterebbe di costituire un genere nuovo.

9. L. Maravignae n. sp. tav. II, fig. 22.

Mas. *Figura habeatur pro diagnosi speciei. Long.* 2 mm.

L'esemplare è molto alterato, specialmente i membri e l'addome; il colore è testaceo, la testa più scura, le zampe e le antenne più chiare.

---

(1) Ho rappresentato a fig. 23 uno di questi esemplari per confronto; provengono dal Queensland. Hanno la testa molto allungata e stretta, rotondata in dietro, con grandi occhi sporgenti; il colore è tutto testaceo. Mancano gli ultimi due segmenti dell'addome, l'estremità delle antenne e parte dei piedi. Lunghezza totale probabile 10 mm.

Non sono riuscito a riconoscere la scultura, nè a vedere nessuna pubescenza, fuorchè pochissimi peli ritti, meno scarsi sull'addome.

Genere *TAPINOMA* Foerster.

10. **T. minutissimum** n. sp. tav. III, fig. 24, 25.

Mas. *Specierum quae hucusque innotuerunt pussillima. Figura habeatur pro diagnosi. Long.* 0.8 mm.

L'unico esemplare di questa piccolissima formica trovavasi nel centro di un grosso pezzo d'ambra che fu segato per poter meglio studiare altri inclusi; fu scoperto solo dopo l'operazione e trovato monco delle sue ali. Lo riferisco al genere *Tapinoma* per le rassomiglianze che offrono con le specie viventi l'aspetto generale, la forma gracile del peduncolo addominale, la lunghezza relativa dello scapo delle antenne, le valvole genitali esterne voluminose e massicce. La sporgenza degli occhi mi sembra eccessiva e dovuta in parte a deformazione del capo. Anche il peduncolo dell'addome è manifestamente deformato, e le zampe che allo stato fresco dovevano essere delicatissime sono più o meno contorte. In ragione della posizione superficiale dell'esemplare, non era possibile ottenere veduta di profilo, nè l'aspetto frontale del capo. — Il colore è bruno scuro, col peduncolo, le zampe e i genitali testacei. Il corpo è vestito di sottile pubescenza, quasi senza peli ritti.

Genere *TECHNOMYRMEX* Mayr.

11. **T. deletus** n. sp. tav. III, fig. 26-28.

Operaria. *Notabilis dorso pronoti mesonotique valde extenso, metanoto brevissimo: subtilissime punctata et pubescens, pilis saltem paucis in abdomine. Long.* 3,2 mm.

L'unico esemplare sul quale istituisco questa specie è incompleto, con le zampe staccate dal tronco, un'antenna troncata e una mandibola strappata. Siffatte mutilazioni devono aver avuto luogo alla superficie della resina ancora fluida. L'addome è squarciato e lascia riconoscere (in *a* fig. 26) il gigerio chitinoso, in parte avvolto nella cuticola dell'ingluvie; queste parti costituiscono un preparato micro-anatomico naturale, unico nel suo genere, che ho potuto studiare minutamente, avendo staccato dal pezzo d'ambra un frammento contenente il fossile e abbastanza sottile per ammettere l'uso di forti ingrandimenti. La diagnosi generica è fondata sulla forma e la struttura minuta del gigerio (fig. 27, 28) che rassomiglia mol-

tissimo a quella che si osserva nell'attuale *T. strenuus* Mayr; ritengo perciò la specie fossile più affine a questa che alle altre due specie viventi conosciute (*T. albipes* F. Smith e *grandis* Emery). La chitina ben conservata e di colore testaceo lascia vedere una sottile punteggiatura dalla quale parte una pubescenza brevissima; esistono soli pochi peli ritti sull'addome. Una massa di micelio bruno vela in parte il peduncolo e le zampe. La forma allungata del dorso del pronoto e mesonoto, e la brevità del metanoto (purchè questa non sia dovuta ad alterazione accidentale) distinguono la nuova specie da tutte le altre.

4.ª Sottofamiglia *CAMPONOTINAE.*

Genere *PLAGIOLEPIS* Mayr.

12. **P. labilis** n. sp. tav. III, fig. 29-32.

Operaria. *Gracilis, antennis pedibusque valde elongatis, pubescens et setis rigidis hirta, scapis tibiisque haud pilosis. Caput depressum, postice distincte emarginatum, mandibulis porrectis, clypeo medio elevato, palpis maxillaribus perlongis. Thorax pronoto mesonotoque convexis, sutura meso-metanotali impressa. Squama petiolaris angusta, proclivis. Long.* 1,5 — 2 mm.

Per la forma generale gracile, i lunghi palpi e le lunghe setole di cui il corpo è sparso, questa specie ricorda alquanto la *P. longipes* Jerd., comune in tutta la regione indo-australiana, ma è meno snella e il protorace è solo brevemente prolungato a foggia di collo in avanti. Il capo è tutto diverso, essendo depresso, col margine posteriore distintamente incavato. Le antenne e le zampe sono molto meno lunghe e gracili; in quelle, il 2° articolo dal flagello è distintamente più breve del precedente e del seguente. Benchè io abbia esaminato 11 esemplari di questa specie, non ne ho trovato che 2 i quali non mi sembrassero molto alterati nei loro contorni. Le figure 29-31 sono ricavate da uno di questi due, più piccolo degli altri, ma che era situato in modo più favorevole per essere disegnato; la forma del suo addome è certamente un poco alterata, ma doveva pure essere notevolmente allungato in condizioni normali.

In quasi tutti gli esemplari, i contorni sono deformati, in tal guisa che l'insetto acquista un aspetto più gracile e il capo vedesi estremamente depresso e bernoccoluto, le zampe sottili e talvolta contorte (v. fig. 32). Io penso che il tegumento di questa formica doveva essere molto sottile e flessibile, e che le alterazioni qui descritte, le quali si possono paragonare a quelle che il disseccamento produce in insetti immaturi, siano dovute a fenomeni di esosmosi o di disseccamento, avvenuti nell'ambra dopo la

morte. Potrebbe sembrare da prima che i diversi aspetti osservati in questa formica corrispondessero a diverse specie, come infatti supposi da principio; un esame critico accurato mi ha convinto del contrario.

La scultura consiste in una sottile punteggiatura che porta la pubescenza abbondante e piuttosto lunga. Vi sono inoltre alcuni punti più grandi nei quali s'inseriscono le lunghe setole.

Genere *GESOMYRMEX* Mayr.

Nella bellissima nuova specie siciliana e anche nel *G. Hoernesi* dell'ambra baltica ho potuto riconoscere alla faccia inferiore del capo l'esistenza di quei solchi longitudinali descritti dal Forel nel *Gigantiops destructor* F., i quali servono ad accogliere i lunghissimi palpi. Questo carattere unito a quello della grandezza singolare degli occhi e della forma del clipeo che si avanza sopra le mandibole mi fanno considerare il genere estinto come in certo modo affine al neotropico vivente, dal quale differisce però per importanti caratteri, e principalmente per l'inserzione molto differente delle antenne.

13. **G. corniger** n. sp. tav. III, fig. 33-35.

Operaria. *Opaca, longe pilosa. Caput oculis magnis, prominentibus, fronte valde elevata, lateribus truncatis, postice utrinque cornu sive spina depressa, extrorsum et sursum curvata, confertissime punctatum, superne longitrorsum rugoso-striatum, lateribus rugoso reticulatis, clypeo striato, mandibulis striatulis. Thorax dorso pro-mesonoti planato et lateribus marginato, sutura meso-metanotali impressa, metanoto spinis duabus longis divergentibus armato, similiter confertissime punctatus, pro-mesonoto longitrorsum ruguloso, metanoto postice transverse striato. Petiolus abdominis elongatus, superne acuminatus; reliqua segmenta opaca, subtilissime punctata. Long.* 4.7 mm.

Specie notevolissima per le spine del capo e del torace. L'unico esemplare è mirabilmente conservato e, se la posizione dei membri fosse più favorevole, non lascerebbe nulla a desiderare come oggetto di studio. La forma dell'insetto è illustrata dalle figure meglio che da qualsiasi descrizione. Il colore è nero, coi margini dei segmenti dell'addome testacei. Il 2° articolo del flagello delle antenne notevolmente allungato sembra accennare ad essere il rappresentante di due o più articoli fusi insieme.

Genere *OECOPHYLLA* F. Smith.

14. **O. sicula** n. sp. tav. III, fig. 36, 37.

Operaria. O. smaragdinae *affinis et praesertim capite lateribus et supra minus convexo, occipite latiore, oculis magis lateralibus, thorace minus elongato diversa. Long. circiter* 7 mm.

I due esemplari di questa specie sono talmente aggomitolati assieme che molti caratteri non possono in nessun modo essere riconosciuti e durai gran fatica a districarne i membri onde disegnare la figura 36. Così la forma del torace e del peduncolo non sono visibili che in parte e, per meglio conoscerle, sarà d'uopo aspettare la scoperta di altri esemplari. La scultura consiste in una fitta e sottile punteggiatura; non vi sono peli ritti fuorché sull'addome. Il colore è scuro.

La specie fossile siciliana più che la baltica (*O. Brischkei* Mayr) si avvicina alla vivente *O. smaragdina* che abita la regione indiana e l'Africa tropicale e le differenze sono, benché di minore importanza, della stessa natura di quelle che separano la *Plagiolepis fragilis* dalla *longipes*. Però si può dire che nell'uno e l'altro caso, le specie dell'ambra sono i rappresentanti fossili europei di forme indiane attuali; i caratteri delle prime mostrano in esse maggiore indifferenza, cioè sono meno accentuati, quindi si può ritenere con molta verosimiglianza che quelle formiche si avvicinano ai progenitori estinti delle specie viventi.

V. CONSIDERAZIONI GENERALI

SULLE FORMICHE DELL'AMBRA E SULL'ORIGINE DELLA FAUNA MIRMECOLOGICA ATTUALE DELL'EUROPA

Benché il materiale che ho potuto studiare sia molto scarso, e lungi dall'essere sufficiente per cavarne un concetto anche incompleto della fauna mirmecologica, senza dubbio ricchissima, della Sicilia all'epoca dell'ambra, esso basta a mostrare che detta fauna era profondamente diversa, non solo dalla fauna vivente, ma ancora da quella fossile dell'ambra baltica. Le differenze che passano tra le due faune sono, come cercherò di provarlo, una esagerazione di quelle che separano oggi la fauna dell'Europa settentrionale da quella del littorale mediterraneo.

Dichiarerò anzitutto in che cosa consistano queste differenze. L'esame della **tabella I** qui annessa farà vedere che i generi di formiche spettanti

alla fauna europea possono distribuirsi in tre gruppi, dei quali il primo è composto di generi diffusi in tutto il mondo, con prevalenza ora del vecchio, ora del nuovo continente; un secondo gruppo comprende generi che mancano, o contano appena qualche specie in America, ma che sono ben rappresentati in Asia, in Africa, o in Australia. In un terzo gruppo, sono raccolti i generi che mancano o scarseggiano nelle regioni calde dell'emisfero orientale, ma sono diffusi nella regione paleartica e nell'America settentrionale (o nelle parti confinanti della regione neotropica). Chiamerò *gruppo cosmopolita* il primo, *gruppo paleotropico* o indiano il secondo, *gruppo boreale* o americano il terzo. Il collocamento di un genere nell'uno o nell'altro gruppo ha qualchevolta alcunchè di arbitrario, ed è anche in relazione con lo stato delle nostre conoscenze corologiche al momento in cui scrivo, per cui certi punti dovranno forse più tardi essere modificati, rimanendo però ferme le linee generali.

Le specie europee del gruppo paleotropico sono quasi tutte differenti dalle corrispondenti esotiche. Tra quelle del gruppo cosmopolita, alcune sono diffuse anche nell'America settentrionale o rappresentatevi da forme strettamente affini (1), mentre, se prescindiamo dalle vere specie cosmopolite (*Monomorium*, *Prenolepis*) diffuse per le vie del commercio in tutto il mondo, poche raggiungono l'India o l'Africa tropicale. Nel gruppo boreale, circa 20 specie o sottospecie, cioè più del 30 % si ritrovano nell'America settentrionale o vi sono rappresentate da semplici varietà o sottospecie molto affini.

Se ora ci facciamo a confrontare fra loro le formiche dell'Europa settentrionale e media con quelle dell'Europa meridionale, vediamo nella **tabella II** che, delle prime, 64 % appartengono al gruppo boreale, 26 % al cosmopolita e 1 ½ % soltanto al paleotropico. Nel mezzogiorno, mentre il numero assoluto delle specie cresce, in relazione col clima più caldo, e cresce anche quello dei rappresentanti del gruppo boreale, la percentuale di questi si abbassa a 53 %, e al 48 % se consideriamo soltanto la fauna del littorale mediterraneo europeo. Infine è ridotta al 33 % nella fauna del littorale africano e asiatico del Mediterraneo. All'opposto, la percentuale del gruppo cosmopolita che è di 26 % soltanto nell'Europa settentrionale (17 % in Svezia) si eleva successivamente a 38 e 43 % nell'Europa meridionale e mediterranea, per raggiungere il massimo di 57 % sul lido africano. Il gruppo paleotropico, che manca in Svezia, e conta una sola specie (1 ½ %) nel Nord d'Europa, ne ha 5 (4 ½ — 5 %) nell'Europa meridionale e mediterranea, 6 (7 ½ %) in Africa e raggiunge il massimo con 8 specie (13 %) nella fauna mediterranea asiatica. Si ottengono risultati consimili, anzi più

(1) Potrebbero quindi a rigore di termine essere classificate nel gruppo boreale.

accentuati confrontando fra loro le faune mirmecologiche di regioni limitate come quella della Svezia, della Svizzera, dell'Italia meridionale continentale e della Tunisia. Veggasi la **tabella II.**

La fauna dell'ambra baltica offre una certa rassomiglianza con quella dell'Europa meridionale. Su 50 specie conosciute, 15 (30 %) appartengono al gruppo cosmopolita, 13 (26 %) al gruppo paleotropico, 14 (28 %) al boreale, 8 a generi estinti. — Le formiche dell'ambra sicula da me studiate sono troppo poche per poter servire di base sicura a calcoli statistici; facendo però le debite riserve, per le modificazioni che ulteriori scoperte dovranno certamente recare al mio giudizio odierno, la fauna dell'ambra sicula si mostra totalmente diversa dalla baltica, con la quale non ha comune nessuna specie finora nota. In essa manca affatto il gruppo boreale, mentre più che metà dei generi e delle specie appartiene al gruppo paleotropico, e fra questi i generi *Cataulacus* e *Technomyrmex,* che non erano stati ancora trovati nell'ambra (1), nè hanno specie viventi nella fauna mediterranea, e i generi australiani attuali *Leptomyrmex* e *Podomyrma*, rappresentati però da specie molto differenti dalle attuali e che meriterebbero forse di costituire nuovi generi. Il genere *Aëromyrma* vive attualmente in Madagascar, e una specie fossile dell'ambra baltica è stata descritta dal Mayr sotto il nome di *Pheidologeton antiquus.* Alcune specie fossili siciliane come *Oecophylla sicula* e *Plegiolepis labilis* sono molto vicine a specie viventi indiane. I generi fossili estinti dell'ambra baltica non sono stati trovati finora in Sicilia, ad eccezione del genere *Gesomyrmex,* rappresentato nell'ambra sicula da una forma notevolissima per le spine di cui è armata.

Due fatti risultano anzitutto dal confronto istituito sopra: 1° La diminuzione graduale dell'importanza relativa del gruppo boreale, quando dalla fauna Europea settentrionale si discende alla meridionale, e da questa a quella del littorale africano del Mediterraneo. 2° L'aumento progressivo assoluto e relativo di numero delle forme del gruppo cosmopolita e ancora più di quello del gruppo paleotropico, passando dalla fauna boreale alla mediterranea. Differenze della stessa natura ma più grandi ancora differenziano la fauna fossile baltica dalla europea vivente, e la fauna fossile sicula a sua volta dalla baltica; i generi del gruppo boreale già scarsi nell'ambra di Prussia non sono stati rinvenuti finora nell'ambra di Sicilia, in cui predomina invece l'elemento paleotropico.

Su quanto ho esposto finora, vorrei tentare di istituire una teoria dell'origine della fauna mirmecologica europea. Credo che una parte del gruppo cosmopolita e tutto il gruppo paleotropico rappresentano gli avanzi,

(1) Il genere *Attopsis* Heer del terziario di Radoboj è molto affine, se non identico al genere *Cataulacus.*

o meglio i derivati della fauna primitiva, la quale esisteva in Europa nell'Eocene e nell'Oligocene, e che, successivamente, un gran numero di forme provenienti forse dall'America settentrionale, ma più probabilmente dalle terre polari, coperte allora di rigogliosa vegetazione e favorite da un clima mitissimo, abbiano invaso il nord del nostro continente, estendendosi poi successivamente verso il mezzogiorno (1). Non saprei dire se questa invasione giungesse per la via delle terre artiche del nord e dell'occidente o per quella dell'Asia boreale. Se conoscessimo meglio le formiche della Siberia e del Thibet, si potrebbe forse trarre dalla fauna di quelle regioni degli argomenti decisivi. WEITHOFER ammette che gli antenati fossili del Cavallo, partiti dall'America, penetrarono a più riprese in Europa attraverso l'Asia: non è inverosimile che alcune formiche neartiche seguissero la stessa via. — Tra le formiche dell'ambra baltica sono rappresentati i generi *Formica, Lasius, Leptothorax, Myrmica, Aphaenogaster,* oggi comuni all'Europa e all'America, ciascuno da una o più specie, ed è notevole che le specie succinee *Formica Flori* e *Lasius Schiefferdeckeri* si avvicinano a quelle fra le loro congeneri moderne che hanno la massima diffusione verso il Sud; esse contano fra le formiche più comuni dell'ambra, e formano insieme più del 20 % dei 1400 esemplari esaminati dal MAYR.

I depositi succiniferi della Sicilia possono attribuirsi al Miocene medio e sono quindi senza dubbio più recenti di quelli della Prussia riferiti dall'HEER all'Oligocene. Questi ragguagli cronologici che debbo al Collega Prof. CAPELLINI rendono tanto più notevole la mancanza di formiche boreali o neartiche nell'ambra siciliana; esse non erano ancora giunte tant'oltre verso il Sud, o, se lo erano (la qual cosa potrebbe risultare da ulteriori scoperte), non vi avevano acquistato importanza. Forse furono fermate dai tratti di mare che dividevano allora l'Europa settentrionale dalla meridionale o da altre barriere naturali oggi scomparse. Attualmente fanno parte integrante della nostra fauna e tendono a continuare la loro marcia progressiva. L'uomo ha introdotto di recente in Africa la *Formica fusca* e la *Myrmica scabrinodis* (2) e probabilmente anche i *Lasius niger* e *alienus* che non tarderanno a diffondervisi, come prima dell'intervento dell'uomo, vi si diffusero le specie del genere *Aphaenogaster*. Tra queste, l'*A. barbarus* è oggi una delle forme tipiche e dominanti della fauna barbaresca

---

(1) Il BUGNION (Introduction à la faune entomologique du Valais; in: Mém. Soc. helvétique sc. nat. Vol. XXXI p, VII-XLIV) giunge, per analoghe considerazioni, ad ammettere una origine boreale della maggior parte degl'insetti paleartici viventi. Egli suppone che la discesa di questa fauna verso il mezzogiorno fu determinata da un raffreddamento graduale del clima nel pliocene, in relazione con l'epoca glaciale. — L'esistenza di generi tipicamente paleartici, tra le formiche dell'ambra baltica, prova che detta migrazione incominciò molto prima di quel tempo.

(2) Vedi A. FOREL — Eine myrmekologische Ferienreise nach Tunesien und Ostalgerien; in: Humboldt. IX Bd., 9 Heft. September 1890.

ed offre numerose varietà, delle quali alcune si estendono sino al Capo di Buona Speranza e all' India.

L'epoca e le cagioni che fecero diminuire e quasi estinguersi in Europa le formiche paleotropiche ci sono ignote. Fu il freddo dei periodi glaciali o la concorrenza vittoriosa degl'invasori boreali quella che determinò la estinzione delle *Sima*, dei *Cataulacus*, delle *Oecophylla* che popolavano le selve mioceniche? La paleontologia delle formiche non basta da sola a risolvere il quesito, che per ciò propongo ad altri più di me forniti di cognizioni di geologia e di paleontologia animale e vegetale.

Nè vorrei dietro l'esame di un materiale così scarso, come quello che ho qui descritto, e nello stato imperfetto delle nostre conoscenze attuali sulla popolazione mirmecologica di molti paesi, diffondermi di più in congetture, intorno alle origini delle faune e alle migrazioni dei loro componenti. Quello che sappiamo delle formiche dell'ambra mostra che, nei tempi in cui questa resina stillava dai tronchi, i generi attuali erano già tutti o quasi tutti differenziati e molte specie offrivano caratteri di stretta affinità con le attuali (*Formica Flori* con *fusca*, *Lasius Schiefferdeckeri* con *niger* e forme affini, *Oecophylla sicula* con *smaragdina*). Non posso quindi ammettere col Mayr (1) che il gruppo dei Ponerini fosse allora meno sviluppato che all'epoca presente. Il gran numero dei generi attualmente viventi che contano una sola o pochissime specie, la singolare varietà e la stranezza delle forme, la grande estensione geografica di piccoli gruppi ad es. *Amblyopone, Centromyrmex, Proceratium* che conducono vita nascosta, le molte specie prive di occhi o con occhi rudimentali mostrano ad evidenza che questo gruppo è molto antico ed ha avuto bisogno di lunghissimo tempo per giungere al differenziamento delle sue forme attuali (2). La scarsezza dei Ponerini nell'ambra trova la sua ragione semplicissima nel fatto che il maggior numero conducono vita sotterranea e non frequentano gli alberi; perciò pochi sono stati involti e conservati nell'ambra, e questi, per quanto furono finora descritti, sono quasi tutti esemplari alati. La fauna entomologica dell'ambra non riflette l'insieme di quella dei paesi in cui fu prodotta, ma soltanto quella del genere di località in cui crescevano gli alberi succiniferi. Le specie che frequentavano altri luoghi non vi si possono trovare che per circostanze fortuite difficili ad avverarsi, e vi sono quindi rarissime, come sono straordinariamente rari gli avanzi di molluschi e di vertebrati conservati nell'ambra.

---

(1) Vorläufige Studien über die Radoboj-Formiciden, in Jahrb. K. K. geolog. Reichsanstalt 17 Bd. Wien 1867 p. 49.

(2) Molti generi di Ponerini, e in ispecie quelli che sono comuni alla fauna neotropica e alla paleotropica sono probabilmente gli avanzi di una fauna molto più antica di quella dell'ambra e che risale forse ai tempi mesozoici.

Tabella I. — Distribuzione geografica dei generi europei viventi e fossili di formiche che si ritrovano nella fauna attuale di altre regioni.

GRUPPI GEOGRAFICI	GENERI	AMBRA		EUROPA		LITTORALE MEDITERRANEO			TERRE PALEOTROPICHE			AMERICA		OSSERVAZIONI
		Sicula	Baltica	Settentrionale	Meridionale	Europa	Africa	Asia	Regione indiana	Regione australiana	Regione etiopica	Regione neartica	Regione neotropica	
GRUPPO COSMOPOLITA	Ponera	1	3	2	4	4	2	—	10	3	6	7	9	
	Ectatomma	1	1	—	—	—	—	—	5	15	—	—	21	
	Amblyopone	—	—	—	2	2	1	—	2	4	—	1	2	
	Anochetus	—	—	—	1	1	2	—	6	3	1	—	5	
	Pheidole	—	—	—	1	1	4	2	25	22	13	7	70	
	Myrmecina	—	—	1	1	1	—	—	2	—	—	1	—	La specie americana è identica all' europea.
	Cardiocondyla	—	—	—	1	1	1	2	2	—	—	—	1	Specie di vasta estensione geografica, forse diffuse dal commercio.
	Monomorium	—	1	—	3	3	4	4	6	4	10	2	6	In parte specie cosmopolite diffuse dal commercio.
	Crematogaster	1	—	—	3	3	4	3	25	16	14	4	28	
	Solenopsis	—	—	1	2	2	2	1	2	1	4	4	12	
	Tetramorium	—	—	1	3	3	6	3	9	4	10	2	8	Il *T. caespitum* si ritrova nell' America sett.; *T. guineense* e *simillimum* sono specie cosmopolite.
	Strumigenys	—	—	—	2	2	—	—	2	3	—	4	13	
	Tapinoma	1	—	1	2	2	2	1	1	1	—	1	2	
	Dolichoderus	—	5	—	1	1	—	—	15	4	—	5	20	La specie europea vivente è strettamente affine alle neartiche e si scosta dalle indiane.
	Prenolepis	—	2	—	1	1	—	2	5	3	4	4	4	Molte sono cosmopolite e diffuse col commercio.
	Myrmecocystus	—	—	—	3	3	6	3	1	2	1	2	—	
	Camponotus	—	3	7	14	14	14	13	73	40	69	11	115	Le forme europee e mediterranee *maculatus, sylvaticus, pallens, aethiops* e molte altre costituiscono un gruppo di razze strettamente affini fra loro che conta rappresentanti in tutto il mondo.
	Colobopsis	—	—	1	1	1	1	—	12	8	1	1	3	
GRUPPO PALEOTROPICO O INDIANO	Dorylus	—	—	—	1	1	2	1	4	—	9	—	—	Non tengo conto delle forme americane descritte sotto il nome di *Typhlopone*, la cui pertinenza al genere Dorylus per alcune, la patria per altre mi sembrano incerte.
	Parasyscia	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1	—	—	Molto affine ai generi indiani *Lioponera* e *Cerapachys*.
	Sima	?	3	—	—	—	—	—	7	2	5	—	—	
	Podomyrma	1	—	—	—	—	—	—	—	18	—	—	—	Rappresentato in Africa dal genere *Atopomyrmex*.
	Holcomyrmex	—	—	—	—	—	—	1	4	—	—	—	—	
	Aëromyrma	1	1	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	Riferisco a questo genere il *Pheidologeton antiquus* Mayr dell' ambra baltica.
	Oligomyrmex	—	—	—	1	1	—	—	1	—	—	—	—	
	Cataulacus	2	—	—	—	—	—	—	10	—	9	—	—	
	Ischnomyrmex	—	—	—	—	—	—	1	4	1	1	—	2	Gli Ischnomyrmex neotropici formano un gruppo speciale.
	Leptomyrmex	1	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—	
	Technomyrmex	1	—	—	—	—	—	—	3	1	—	—	—	
	Bothriomyrmex	—	3	—	1	1	1	1	—	1	—	—	—	Riferisco a questo genere le *Hypoclinea Göpperti, Geinitzi* e *constricta* Mayr dell'ambra baltica, principalmente a cagione delle proporzioni dello scapo e degli articoli del flagello nel ♂. Nelle forme fossili, la 2ª cella cubitale, aperta nelle forme viventi, era chiusa, non essendo ridotta la costa trasversa. Nei ♂ dell' affine genere *Iridomyrmex* lo scapo delle antenne è più breve e gli articoli del flagello meno allungati.
	Plagiolepis	1	5	1	1	1	1	1	5	2	2	—	1	
	Acantholepis	—	—	—	1	1	2	2	1	—	2	—	—	
	Oecophylla	1	1	—	—	—	—	—	1	1	2	—	—	
GRUPPO BOREALE O AMERICANO	Proceratium	—	—	—	1	1	1	—	—	—	—	3	—	
	Myrmica	—	2	7	7	2	1?	1	3	—	—	6	—	Le forme europee sono quasi identiche alle neartiche.
	Macromischa	—	4	—	—	—	—	—	—	—	2	—	8	Forse andrebbe più acconciamente collocato nel gruppo cosmopolita.
	Stenamma	—	—	1	1	1	—	—	—	—	—	1	—	
	Aphaenogaster	—	2	4	12	12	13	12	1	—	2	9	—	Riunendovi come sottogenere gli *Ischnomyrmex*, il genere *Aphaenogaster* prenderebbe posto nel gruppo cosmopolita.
	Leptothorax	—	1	11	15	15	12	5	—	—	—	6	5	Le forme neotropiche formano un gruppo a sè: alcune specie europee si estendono nell' America settent.ᵉ
	Liometopum	—	—	—	1	1	—	1	—	—	—	1	1	Il *Liometopum microcephalum* della California non differisce dalla forma europea.
	Lasius	—	4	9	10	10	2	2	1	—	—	9	2	Parecchie specie di *Lasius* e di *Formica* sono comuni all'Europa e alla regione neartica.
	Formica	—	1	9	13	6	1?	1	—	—	—	12	—	
	Polyergus	—	—	1	1	1	—	—	—	—	—	1	—	
	Epitritus	—	—	—	1	1	—	—	—	—	—	—	1	

Tabella II. — **Partizione dei gruppi geografici nelle diverse regioni faunistiche dell'Europa e del bacino mediterraneo.**

(Le cifre grasse segnano il numero delle specie e sottospecie; le sottili il rapporto percentuale di questo numero col totale della fauna corrispondente).

GRUPPÌ	EUROPA		BACINO MEDITERRANEO			REGIONI LIMITATE				AMBRA		OSSERVAZIONI
	Settentrionale e media	Meridionale	Europa	Africa	Asia	Svezia (Adlerz)	Svizzera (Forel)	Italia meridionale continentale	Tunisia	Baltica (Mayr)	Sicula	
Cosmopolita	**14**	**45**	**45**	**49**	**33**	**6**	**17**	**28**	**36**	**15**	**4**	(1) Il numero delle specie paleotropiche si eleverebbe a 9, comprendendovi il *Polyrhachis spiniger*, di cui il Sig. Edward Saunders ebbe 2 esemplari raccolti in Palestina.
	26 %	38 %	43 %	57 %	51 %	17 %	27 %	43 %	51 %	30 %	29 %	
Paleotropico	**1**	**5**	**5**	**6**	**8** [1]	—	**2**	**3**	**5**	**13**	**8** [2]	(2) Questa cifra sarebbe 9 computando una specie figurata dal Guérin e riferibile al genere *Sima*.
	1½ %	4½ %	5 %	7½ %	13 %	—	3½ %	5 %	7 %	26 %	57 %	
Boreale	**42**	**62**	**50**	**28** [3]	**21**	**26**	**40**	**34**	**27**	**14**	—	(3) Questo numero si eleva a 30, se vi si comprendono le *Formica fusca* e *Myrmica scabrinodis* che ora trovansi in alcuni giardini, introdottevi dall'uomo. Verrebbe ridotto a 26 qualora se n' escludessero due specie di *Lasius* probabilmente anch' esse di recente importazione.
	64 %	53 %	48 %	32 %	33 %	74 %	63 %	52 %	39 %	26 %	—	
Generi propri della fauna europea vivente	**5**	**5**	**4**	**2**	**1**	**3**	**4**	—	**2**	—	—	
	8½ %	4½ %	4 %	2½ %	2 %	9 %	6½ %	—	3 %	—	—	
Generi estinti	—	—	—	—	—	—	—	—	—	**8**	**2** [4]	(4) Il genere *Gesomyrmex* è comune all' ambra Sicula e baltica.
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	16 %	14 %	
	62	**117**	**104**	**85**	**63**	**35**	**63**	**65**	**70**	**50**	**14**	

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

N. B. — In generale gl'insetti sono disegnati nello stesso atteggiamento nel quale sono conservati nell'ambra: solo in poche figure ho per maggiore chiarezza modificato la posizione di qualche membro, o pure ho omesso di disegnare un'ala o un'antenna o parte delle zampe. Gl'ingrandimenti sono segnati con una frazione nelle tavole.

Tavola I.

Fig. 1 — *Ectatomma gracile* ♂, veduto di fianco, ingrand. 20:1.

» 2 — Capo del medesimo veduto di prospetto (projettato sul piano *aa* fig. 1).

» 3 — *Ponera leptocephala* ♀, di profilo, ingrand. 14:1.

» 4 — La stessa: estremità di un'ala.

» 5 — *Cataulacus Silvestrii* ☿, di profilo, ingrand. 25:1.

» 6 — Lo stesso veduto dal dorso.

» 7 — Capo del medesimo di prospetto.

In queste tre figure è segnata la scultura, nei punti dove era più chiaramente visibile.

» 8 — *Cataulacus planiceps* ☿, veduto di profilo, 25:1.

» 9 — Altro esemplare della medesima specie veduto obliquamente 25:1, non sono disegnati i peli.

» 10 — *Hypopomyrmex Bombiccii* ♀, veduto quasi di profilo, un poco obliquamente da dietro e dalla faccia ventrale 20:1.

» 11 — Capo del medesimo maggiormente ingrandito 40:1.

Tavola II.

Fig. 12 — *Podomyrma (Acrostigma) Mayri* ☿, veduto dal dorso 25:1.

» 13 — Profilo del medesimo esemplare meno ingrandito; 12:1. La fig. 12 s'intende projettata sopra un piano parallelo alla linea *aa*.

» 14 — Altro esemplare veduto di fianco, 25:1.

» 15 — Primo segmento del peduncolo addominale veduto in profilo preciso 30:1.

» 16 — Capo e antenna di altro esemplare 30:1.

» 17 — *Aëromyrma Sophiae* ♂, quasi di profilo; il disegno delle ali é ricavato da altro esemplare 25:1.

» 18 — Capo di altro esemplare, esattemente di profilo 35:1.

» 19 — *Crematogaster praecursor* ♂, di profilo, 25:1. — Le ali non sono disegnate.

» 20 — Ala anteriore dello stesso esemplare 25:1.

» 21 — Addome veduto dal lato ventrale e maggiormente ingrandito 35:1.

» 22 — *Leptomyrmex Maravignae* ♂, quasi di profilo; il capo é veduto obliquamente di sotto 35:1.

» 23 — *Leptomyrmex erythrocephalus?* Fab. ♂, forma australiana vivente 7:1.

Tavola III.

Fig. 24 — *Tapinoma minutissimum* ♂, veduto dal dorso 50:1.

» 25 — Estremitá dell'addome del medesimo per mostrare le valvole genitali.

Fig. 26 — *Technomyrmex deletus* ☿, di profilo: in *a* si vede il gigerio isolato 25:1.

» 27 — Il gigerio solo maggiormente ingrandito 130:1.

» 28 — Aspetto della superficie dell'organo a forte ingrandimento 350:1.

» 29 — *Plagiolepis labilis* ☿, profilo del tronco 40:1.

» 30 — Capo del medesimo esemplare di prospetto.

» 31 — Peduncolo addome e zampe destre del medesimo dalla faccia ventrale.

» 32 — Esemplare deformato della stessa specie a debole ingrandimento 15:1.

» 33 — *Gesomyrmex corniger* ☿, quasi di profilo 16:1.

» 34 — Lo stesso veduto dal dorso 14:1.

» 35 — Capo del medesimo veduto d'innanzi; sulla metà della figura, è segnata la striatura 20:1

» 36 — *Oecophylla sicula* ☿, due esemplari aggomitolati insieme; quello il cui capo sporge a destra quasi di profilo 12:1.

» 37 — Capo dell'esemplare di destra veduto del dorso e maggiormente ingrandito 20:1.

C. Emery, dis. e inc.

lit. G. Wenk e Figli — Bologna.

Emery dis. e nc. lit. G. Wenk e Figli–Bologna.

C. Emery, dis. e inc. Lit. G. Wenk e Figli — Bologna.

INDICE

MEMORIE

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DELL' ISTITUTO DI BOLOGNA

SERIE V. — TOMO I

Fascicolo Quarto.

BOLOGNA

TIPOGRAFIA GAMBERINI E PARMEGGIANI

1891

SULLA RIGENERAZIONE PARZIALE DELL'OCCHIO NEI TRITONI

ISTOGENESI E SVILUPPO

STUDIO SPERIMENTALE

DEL

PROF. VINCENZO L. COLUCCI

(Letto nella Sessione del 21 Dicembre 1890).

(CON DUE TAVOLE DOPPIE).

I.

La facile e rapida riproduzione di alcune parti del corpo nei *tritoni* e nelle *salamandre*, trasse l'attenzione dei più celebri Naturalisti dello scorso secolo, i quali rivolti i loro studi a questi preziosi animali, mentre sforzavansi a sradicare i pregiudizi che allora — come in parte anche oggi — dominavano a riguardo di esseri tanto innocui, tentarono di estendere per via di esperimenti le conoscenze circa i maravigliosi processi di rigenerazione che in essi eransi veduti avvenire.

Con certezza sapevasi che un arto — degli anteriori più spesso — di un tritone vivo, preso e strettamente tenuto in bocca per un certo tempo da un altro spintovi dalla fame, o da istinto vorace ed aggressivo, come non é raro osservarsi in questa specie di animali, quell' arto, quantunque non troncato, per la profonda lesione patita nella pelle e nei muscoli, dopo qualche giorno staccavasene nel punto leso, e fra un mese, poco più o poco meno secondo l'età dell' animale, si vedeva un novello arto in via di riproduzione, e completamente sviluppato dopo un anno circa. Tal fatto servì di punto di partenza e di base ad importanti studi, che pel tempo e per i valentuomini che occuparonsene destarono la maraviglia e l'interesse in non pochi osservatori della natura.

Sono generalmente note le belle primitive esperienze dello *Spallanzani*, del *Bonnet*, del *Blumenbach*, di *Plateretti* (1), *Steinbuch*, *Murray* (2), e *Ru-*

---

(1) Sulla riproduzione delle gambe e della coda delle Salamandre acquaiuole. Scelta di opuscoli interessanti. Tomo 27.

(2) Comment. de redintegratione partium nexu suo selectarum vel amissarum. Gottinguae 1787.

dolphi; e più recentemente ripetute da altri valenti sperimentatori quali *Todd* (1), *H. Müller* (2), *Philipeaux* (3), *Hans-Strasser* (4).

Ma se gli antichi per la scarsezza di cognizioni istologiche, stante l'imperfezione dei microscopi di cui allora potevansi servire, non avevano potuto giungere a studiare le modificazioni dei tessuti vecchi da cui prendevano origine i nuovi per la rigenerazione delle parti asportate, i moderni, pur confermando le osservazioni di quelli, poco si occuparono di questo studio, importante anzi indispensabile mezzo per rendere utili quelle esperienze, nel senso che da esse possono ricevere molto schiarimento tanto i processi patologici comuni all'uomo ed agli animali domestici, quanto gli esperimenti che in varia guisa e per scopi molteplici vanno istituendosi in varie specie di mammiferi e di uccelli.

Fu per tali ragioni che a me parve utile, sei anni or sono, di ripetere nei tritoni simili esperimenti — i cui risultati abbastanza positivi aveano condotti quegli antichi sperimentatori ad esatte conclusioni — ed allo scopo principalmente di studiare i processi istologici che s'iniziano e svolgonsi per la riproduzione delle varie parti asportate (5). Studiai allora quanto più compiutamente mi fu possibile la riproduzione parziale degli arti e della coda, oggi Vi presento, Accademici illustri, i risultati di numerose esperienze sulla parziale asportazione e riproduzione dell'occhio nella stessa specie di animali.

Allora, come adesso, sarebbe stato mio desiderio, pur esprimendo una semplice opinione, di poter dire alcun che di almeno approssimativamente vero sulle cause che in questi anfibi producono e mantengono una così sorprendente potenza rigenerativa, poiché certezza alcuna non esiste in così difficile questione. A me pare che, nello stato attuale delle conoscenze circa le leggi dell'organizzazione, non é possibile stabilire con certezza dati tali, da poter per essi giungere alla interpretazione delle molteplici modalità che si osservano nelle riproduzioni in vari esseri della scala zoologica. E neppure parmi possibile avanzare ipotesi alcuna sopra un così arduo argomento, pel quale non altro si é potuto prendere in considerazione, se non l'ordine più o meno elevato a cui appartengono gli animali e l'età loro; ciò che, del resto, é l'unico dato positivo che n'é venuto

---

(1) On the Process of Reproduction of the members of the aquatic salamander. — Quarterly Journal of the Royal Institution 1824. Tom. 16.

(2) Ueber Regeneration der Virbelsäule und der Ruckenmarks bei Tritonen und Eidechsen. Frankfurt 1864.

(3) Gazette Médicale de Paris.

(4) Zur Entwichkelung der Extremitätenknorpel bei Salamandern und Tritonen. Eine morphogenetische Studie. Leipzig 1879.

(5) Intorno alla rigenerazione degli arti e della coda nei tritoni. — Memorie della R. Accademia delle Scienze di Bologna. Serie IV, Tomo 6.° 1885.

dall' osservazione e per cui si è stabilito, che negli animali vertebrati di ordine superiore il potere rigenerativo è molto più limitato che in quelli di ordine inferiore, e negli uni e negli altri è tanto più perfetto quanto più giovane è l' animale. Con ciò nulla si apprende circa le condizioni istologiche e vitali che facilitano e compiono la rigenerazione di tessuti e di organi asportati o distrutti.

Senza pretesa di risolvere anche parzialmente l'ardua questione, vorrei richiamare l' attenzione degli osservatori — onde da essi siano presi in considerazione — sopra alcuni fatti che istologicamente e fisiologicamente possonsi considerare come inerenti all'organizzazione speciale degli animali in cui la riproduzione di parti cospicue del loro corpo, tagliate o distrutte, si compie facilmente e rapidamente. Un tale esame per sè, ed esclusivamente fatto in questi soli animali — tritoni e salamandre — lo credo insufficiente, non potendosi, ad esempio, stabilire alcun dato sicuro dalla considerazione della forma e della grandezza e, se si potesse, anche della costituzione chimica delle cellule e dei nuclei nei singoli tessuti; ma un accurato esame di questi elementi istologici, anatomico, chimico e fisiologico, non che del sistema nervoso e vascolare, specialmente circa la reazione loro agli stimoli patologici, eseguito nei suddetti animali comparativamente a quelli di ordine superiore, parmi dovrebbe condurre ad utile risultato.

Accennerò qui ad alcuni fatti che costantemente ho potuto osservare nei vari e ripetuti esperimenti eseguiti nei tritoni, dai quali fatti — mi preme di dichiararlo in maniera la più esplicita — non intendo trarre deduzione alcuna; ma faccio questo, solo perchè credo che quali semplici fatti, e per ora isolati, potranno forse divenire un giorno elemento di un insieme risultante da altri, che da osservatori più abili saranno raccolti ed ordinati con vedute fisiologiche esatte e comprensive.

Ciò che mi ha colpito fin dalle prime mie osservazioni nei tritoni tanto nello stato normale che dopo averli assoggettati ad asportazioni parziali di organi o tessuti, si è la costituzione degli elementi cellulari dei tessuti connettivi ed epiteliali, e cioè la disposizione in tutti della sostanza cromatica dei loro nuclei in forma per lo più di reticolo, tranne i pochi in cui osservavansi figure di più avanzata mitosi; oltre di che, per la praticata asportazione, i nuclei del connettivo delle parti rimaste, e specialmente di quelle vicine al luogo del taglio, erano tanto ingrossati da costituire da soli tutto l' elemento connettivo. Queste particolarità istologiche mi pare stiano a mostrare una forte vitalità delle cellule ed inoltre una certa, dirò così, potenzialità riproduttiva sempre pronta a rispondere a qualsiasi stimolo atto a svegliare una irritazione nutritiva e formativa. Si vede infatti che in questi anfibi i nuclei connettivi in istato normale,

mostransi per lo più come quelli che sono in reazione flogistica in animali di ordine più elevato; e stimolati per ferita o amputazione, la loro sostanza cromatica entra in attivo movimento, scomparendo il poco protoplasma che li circonda, svolgendosi poi le comuni forme cariocinetiche e la moltiplicazione cellulare per la riproduzione delle parti perdute.

Un altro fatto che parmi di maggiore importanza si è che, nelle amputazioni degli arti o della coda e, come dirò più avanti, nelle parziali asportazioni dell' occhio, ben si può osservare il rammollimento della sostanza connettiva del tessuto fibroso, cartilagineo ed osseo, delle fibre muscolari ecc., ma non mi accadde mai di vedere la degenerazione degli elementi cellulari di quei tessuti, del connettivo intermuscolare, della cornea o della sclerotica, ma invece la più o meno pronta reazione formativa — secondo l'età e stato di nutrizione dell' animale, la stagione in cui veniva eseguita l' operazione ecc. — manifestantesi colla scomparsa del protoplasma, l'ingrossamento del nucleo e il vivo movimento della cromatina conducente alla divisione. Dippiù per quanto forte possa essere l'irritazione e la reazione flogistica, per la quale avviene una ricchissima produzione cellulare, in questa non si osservano processi degenerativi di sorta, e ciò perché, appena formatosi uno strato d' epitelio che prestamente cuopre i monconi amputati o qualunque altra lesione di continuo, al disotto immediatamente di tale epitelio si trovano già numerosi capillari che attraversano il nuovo tessuto embrionale, e alcuni di essi mandano pure delle anse che giungono a contatto delle cellule epiteliali. Per ciò puossi intendere come, malgrado le più sfavorevoli circostanze che accompagnano o seguono le amputazioni sperimentali nei tritoni, non si verifichino processi necrobiotici progressivi, nè alcun che di simile alle flogosi suppurative degli animali superiori, ma eliminate le parti necrotiche per l'azione del tr uma, s' inizia subito il processo rigenerativo, sempre costante per la forte vitalità e potenza riproduttiva specifica degli elementi dei singoli tessuti, non tolta nè disturbata da processi degenerativi. Di questa resistenza vitale, dipendente dalla grande attività del nucleo e dal particolare rapporto che esiste fra esso e il protoplasma, parmi ne sia una prova grossolana la tolleranza che questi anfibi hanno di lunghissimo digiuno, potendo vivere 18-20 mesi senza alimento di sorta. Per tal fatto devesi ammettere una grande limitazione del processo riduttivo, la quale del resto non impedisce che i tritoni mutilati di un arto, anche dopo essere stati a digiuno per un anno, lo riproducano. Vero è che l' arto riprodotto in tali condizioni, pur avendo abbozzate tutte le sue parti costitutive, non raggiunge le normali dimensioni dell' altro corrispondente, ed inoltre il tritone se non viene alimentato dopo l' operazione, nel mentre che avanza il processo riproduttivo, lo si vede dimagrire sensibilmente, fino a che — se è stato operato in primavera — muore d' ordinario, considerevolmente emaciato, nel prossimo autunno.

Da questi fatti, di natura così opposta, si può dedurre che vi è in tali animali una limitatissima usura nei tessuti tutti del corpo, mentre i processi neoformativi per la riproduzione delle parti amputate si svolgono in maniera relativamente considerevole e rapida. In questa facoltà di avere così limitati i processi riduttivi, mentrechè i nuclei conservano una così prodigiosa capacità di proliferare, manifestantesi, come sopra dicevo, anche nella normale attività nutritiva dell' organismo, col continuo movimento della cromatina, credo si possa almeno con probabilità riporre la principale causa di tanta potenza rigenerativa. Si verifica qui ciò che il *Cohnheim* cercò stabilire per la rigenerazione patologica, non differendo questa, secondo lui, dalla normale che per maggiore attività, dipendente da ciò che le perdite costituenti l' usura normale nelle parti lese sono, negli animali superiori e nell' uomo, momentaneamente sospese. Le perdite per l' usura normale sono in tutto l' organismo dei tritoni molto limitate, e più energico si manifesta il potere assimilativo e riproduttivo degli elementi della parte lesa nei casi in cui una parte del loro organismo debba essere rigenerata, mentre tutto il loro corpo dimagrisce sensibilmente. Questi fatti attestano, a mio modo di vedere, un' alterazione nell' equilibrio assimilativo e disassimilativo dell' organismo, per cui il potere assimilativo nell' organo offeso cresce per la rigenerazione della parte asportata, ed invece non solo esso diminuisce in tutto il resto dell' organismo, ma cresce il disassimilativo: sarebbe un' esagerazione di quanto fu ammesso dal *Cohnheim*, cioè non soltanto cessazione di usura — il che importa diminuzione almeno del processo nutritivo — ma aumento di essa. E ciò pare indubitatamente dipendere, oltre che da un perturbamento generale circolatorio e nutritivo, anche dalla mancanza di nutrimento, e probabilmente dall' impiego delle sostanze utilizzabili dell' organismo per il processo rigenerativo, poichè tale dimagramento non si osserva, o solo in minimo grado, nei tritoni alimentati in seguito alla operazione.

Riassumendo le precedenti considerazioni, a me pare potersi concludere che la grande potenza rigenerativa di tessuti ed organi lesi od asportati, nei tritoni, sia riposta nel grado di non compiuto differenziamento degli elementi cellulari dei tessuti del loro organismo, i quali elementi pare siansi relativamente arrestati ad una fase di loro evoluzione per cui conservano caratteri embrionali, onde appunto proviene la loro capacità di moltiplicarsi rapidamente ed abbondantemente e di riprodurre così le parti perdute. Tale condizione istologica è non solo relativa a ciò che si verifica nei tessuti corrispondenti di altri animali superiori, ma è ancora assoluta, considerata negli stessi tritoni, poichè, oltre i tessuti di sostanza connettiva, e gli epiteli e i muscoli, si riproducono ancora i gangli nervosi ed il midollo spinale; e come dirò appresso, per la riproduzione dell' occhio, le cellule

gangliari del cervello — che si estendono nel nervo ottico in un prolungamento conico di sostanza grigia — entrano in attiva proliferazione, la qual cosa è evidentemente dovuta alla semplicissima costituzione di dette cellule gangliari, per cui non differiscono da quelle che si osservano formare i centri nervosi degli altri vertebrati in diverse fasi del loro sviluppo embrionale.

II.

Unico scopo di questo scritto essendo quello di far conoscere i risultati delle mie ripetute esperienze, dirette principalmente a far rilevare quali processi iniziansi dopo l' asportazione parziale dell' occhio nei *tritoni*, quale il loro modo di svolgersi e quali gli esiti, mi parve ben fatto di ritrarre nella figura 1ª della Tav. 1ª una sezione di occhio normale, il quale possa servire come quadro di confronto, a cui ricorrere ogni volta che, leggendo delle alterazioni e modificazioni successive dell' occhio operato, sorgerà il bisogno di vederne le differenze, potendosi intendere, secondo a me pare, in tal modo assai meglio che con una lunga descrizione comparativa, i fatti nel loro successivo svolgimento.

La sezione, rappresentata nella detta figura, è stata eseguita nella direzione del piano meridiano e diretta dall' alto al basso, nella quale sono comprese tutte le parti costitutive del globo oculare. La forma di questo si approssima alla sferica, avendo quasi le stesse dimensioni in tutti i suoi diametri, poichè l' asse dell' occhio supera il diametro del piano equatoriale di mm. 0,12, misurando il primo mm. 2,58, ed il secondo 2,46.

La *sclerotica*, *s*, è grossa mm. 0,06 all' entrata del nervo ottico, e va rapidamente assottigliandosi in avanti fino a 0,025 in vicinanza al limite suo dalla cornea, dove mostrasi appena ingrossata, e non come generalmente si osserva in altri animali, più grossa nell' anello scleroticale che in tutti gli altri suoi punti. È costituita tutta di tessuto fibroso, e nessuna parte di essa si mostra cartilaginea come nell' occhio della rana. Non è ben distinta la maniera con cui la sclerotica sta in rapporto colla cornea, essendo quasi per nulla dissomiglianti gli elementi istologici vicini dell' una e dell' altra; però il limite loro puossi rilevare dalla disposizione delle lamine corneali rispetto al modo in cui sono distribuiti i fasci fibrosi della sclerotica, onde si rileva che l' anello di questa è incavato da un solco, di cui l' orlo interno è più sporgente dell' esterno, ed in questo solco va ad incastrarsi il margine della cornea.

La *cornea, c*, ha lo stesso grado di curvatura della sclerotica, e la sua grossezza, tranne che in vicinanza dove inseriscesi alla sclerotica ch' è di mm. 0,06, nel resto è tutta eguale e di 0,04. Nei preparati tinti coll' allume-

carminio si vedono assai distintamente le sue lamine costitutive, ed é rivestita esternamente da epitelio stratificato alto 0,03, *d*, ed internamente da uno strato endoteliale, *e;* l' uno e l' altro separati dalla sostanza propria della cornea per l' esistenza dell' elastica anteriore e posteriore, di cui la prima é grossa 0,0025 e la seconda 0,0022.

La *coroide, f,* nel tritone é relativamente molto sviluppata, misurando posteriormente nel massimo della sua grossezza 0,23 (1), donde va assottigliandosi gradatamente in avanti, fino ai processi ciliari. Essa, prescindendo dalla *lamina fusca,* mi pare costituita da uno strato solo connettivo-vascolare. È vero che i vasi sanguigni, i quali più che veri vasi potrebbonsi considerare come lacune separate da fasci di connettivo e di fibre elastiche, non hanno dappertutto le stesse dimensioni, perlocché é facile distinguere uno strato anteriore più stretto, corrispondente alla *chorioidea capillaris,* ed uno più largo posteriore, divisi da una membrana connettivo-elastica; ma, tranne la diversità di grandezza delle lacune vascolari, non vi é alcuna notabile differenza, avendo tanto l' uno che l' altro una tessitura di aspetto cavernoso. Nei *processi ciliari, u,* stante la gran quantità di pigmento, non ho potuto scoprire elementi muscolari, e senza alcun carattere istologico differenziale né interruzione di sorta vanno, assottigliandosi, a terminarsi nell' iride, il cui margine pupillare presentasi rigonfiato in fuori e tondeggiante, *g.* Alla base dei processi ciliari e fra essi e la faccia interna della cornea, al limite suo colla sclerotica, vi si osserva la sezione trasversa, di forma lanceolata, di un canale circolare abbastanza ampio, *p*, corrispondente al canale di *Fontana* o di *Schlemm.* Alla periferia della camera anteriore si trova una zona di tessuto connettivo occupante lo spazio triangolare compreso fra i processi ciliari e la parete interna del canale di *Schlemm,* ed aderente agli uni ed all' altro, e continuasi inoltre in avanti colla membrana di *Descemet* e posteriormente si prolunga sull' iride. Rappresenta il legamento pettinato dell' iride proporzionatamente più sviluppato che nell' uomo e in altri animali. L' ufficio di questo tessuto parmi debba essere di sostegno alle parti fra le quali esso trovasi, e forse influisce a limitare la dilatazione del canale di *Schlemm.*

La retina del tritone, Tav. 1ª, fig. 2 e 2 bis, considerata in rapporto a quella degli altri vertebrati delle classi superiori, non presenta differenze marcate in quanto al numero degli strati che la costituiscono. A me pare peró che, rigorosamente esaminata, essa manca dello strato granuloso esterno, se questo cosí sia denominato perché costituito da elementi rotondi o granuli e non già da nuclei ovali in diretta connessione coi bacilli e coni.

(1) Questa grossezza è variabile nelle tante preparazioni fatte, e dipende dalla maggiore o minore dilatazione delle lacune vascolari da cui essa è costituita.

Tal' è precisamente il caso dei tritoni, nei quali lo strato granuloso esterno è formato da due strati di nuclei ovali e allungati *c'*, *d'*, disposti alternativamente; dei quali, quelli dello strato esterno formano un corpo solo coi bacilli, e quelli dell' interno, mercè un prolungamento di sostanza poco rifrangente, si connettono colle basi dei coni. Ciascun bacillo si presenta quindi formato da due parti strettamente unite e continue, una *esterna* — a sua volta distinta in un segmento esterno cilindrico, jalino *b*, e in un interno più sottile e granuloso *c* — e una parte *interna* *c'*, formata da un nucleo e da un prolungamento conico diretto in dentro e terminato nello strato molecolare esterno. I coni risultano formati ciascuno da un segmento esterno di aspetto jalino *d*, conico, colla base in dentro contenuta fra i segmenti interni, e perciò assottigliati, dei bacilli, e col vertice in fuori prolungato fino quasi al quarto esterno della lunghezza dei bacilli, e da un segmento interno formato da un nucleo ovale *d'*, e connesso mercè un prolungamento sottile e conico colla base del segmento esterno. Parmi perciò potersi considerare ciascun nucleo del piano esterno come parte integrante di un bacillo a cui è immediatamente connesso, e così pure i nuclei del piano interno rispetto ai coni, benchè siano da questi un po' più discosti. È per tal ragione quindi, come dicevo, che rigorosamente considerato, lo strato della retina occupato da questi due ordini di nuclei non si dovrebbe dire granuloso, ma o ritenerlo come connesso allo strato dei coni e dei bacilli o, se si vuole pure distinto, chiamarlo strato delle cellule visive.

La limitante esterna *a* si trova immediatamente al di dentro della base dei coni, ma attraversa i nuclei o granuli dei bacilli, i quali sporgono per un terzo circa della loro lunghezza da questo limite. Essa perciò, veduta di fronte, dovrebbe presentarsi regolarmente perforata da vani rotondi, grandi e piccoli, alternativamente disposti ed atti a ricevere i nuclei bacillari ed i prolungamenti dei nuclei dei coni. È molto difficile di ottenere tal preparato che mostri questo fatto, ma in sezioni oblique della retina convenientemente tinte colla *nigrosina* appare tale lamina connettiva come una fibra sdoppiantesi per abbracciare le dette parti che l' attraversano; e perciò, più che una vera *limitante*, essa è una membrana di sostegno, o meglio un piano reticolato di fibre in connessione colla trama connettiva della retina.

Dentro dello strato delle cellule visive vi è il *molecolare* o *reticolare esterno*, *e*, formato di sottili fibre dirette nel senso del piano meridiano, e derivanti dalle fibre del nervo ottico che dalle papille espandonsi in esso strato.

La retina occupa poco meno dei due terzi della superficie interna del globo oculare, limitata anteriormente — all' *ora serrata* — dalla base dei

processi ciliari, fin dove essa conserva distinti tutt' i suoi strati, di cui quello dei bacilli e dei coni é gradatamente meno sviluppato, il quale coi suoi elementi molto modificati si estende, ripiegandosi in dentro, anche sull' interna superficie dei processi ciliari, e di là per tutto l' iride non vi rimane che lo strato epiteliale pigmentato.

La *lente cristallina, p'*, di forma sferica, é appoggiata all' interna superficie del margine dell' iride, tenuta in posto dall' umor vitreo e chiusa completamente nella membrana jaloidea, che le aderisce in maniera da non potersi quasi distinguere alla superficie dello strato epiteliale; non di rado peró accade di vederla parzialmente distaccata dalla faccia posteriore della lente sprovvista d' epitelio e poterla cosí seguitare in avanti, alla superficie di questo. Per una simile adesione alla faccia interna dell' iride, donde si continua anche alla superficie anteriore della lente, non esiste traccia di *zona dello Zinn*.

L' *umor vitreo* nell' adulto si mostra perfettamente omogeneo, ma tal non é in realtà, poiché, servendosi della nigrosina come mezzo di tintura, si riesce a vedere essere esso tutto costituito da una rete fibrillare a piccole maglie, nelle quali si contiene una sostanza che, negli occhi fissati col liquido di *Müller* e tinti coll' allume carminio e poscia colla nigrosina, si mostra finissimamente granulosa, ed assai meno tinta delle fibrille.

Credo infine opportuno dar qui un cenno sopra una particolarità anatomica del *nervo ottico* in questa specie di anfibi, di cui non trovo fatta menzione in alcun trattato di anatomia comparata di quelli che ho potuto consultare, e parmi importante per le modificazioni che anche in questa parte spettante all' occhio si osservano, dopo la parziale asportazione di esso.

I nervi ottici nascono dal cervello medio lateralmente alla sua superficie inferiore, e dirigonsi isolatamente in fuori, ciascuno verso l' occhio corrispondente, di modo che non esiste chiasma o incrociamento fra loro.

Dalle sezioni microscopiche si rileva, che fra i punti donde apparentemente hanno origine i due nervi esistono fasci di fibre nervose trasversalmente dirette fra l' uno e l' altro a guisa di ponte Tav. 1ª, fig. 3ª, e queste fibre pare abbiano origine dai due lati inferiori del cervello medio, e decorrono quelli di sinistra a destra, e viceversa a formare i fasci nervosi dei due terzi inferiori della grossezza di ciascun nervo ottico, mentre l' altro terzo superiore dei fasci ha origine dal lato dal quale sorte il nervo, *b*. Questa disposizione dei fasci costitutivi del nervo ottico dà ragione della mancanza di chiasma dei due nervi, e mostra chiaramente la direzione e l' origine doppia dei fasci nervosi, e cioé, che di questi, quelli che nascono dalla parte inferiore del cervello medio vanno all' occhio dal lato opposto e quelli che si originano dalle due parti laterali vanno direttamente all' occhio corrispondente. Quindi vi é in questi anfibii la stessa condizione

anatomica fondamentale dei nervi ottici che negli altri animali, e non mutano per conseguenza le leggi fisiologiche della visione; solo i fatti sono più semplici e di più facile intendimento, perché, mancando il chiasma, la direzione doppia delle fibre nervose si rileva fin dalla loro origine.

M' importa inoltre di notare che la cavità ventricolare del cervello medio si continua in uno stretto canale, *c*, il quale dopo attraversata la sostanza grigia e bianca del cervello, si prolunga fra i due suddetti ordini di fasci nervosi per circa mm. 0,3 nel corpo del nervo, in media nell' ottavo della sua lunghezza totale. Questo canale limitato da epitelio cilindrico, é per di più rivestito dalle cellule gangliari del cervello che dallo strato grigio, a forma di cono, attraversano la sostanza bianca, si prolungano esse pure nel nervo *d* per 0,45-0,50 — in media per un quinto circa della sua lunghezza totale — dapprima molto stivate e poi più rare, confondendosi a poco a poco per mutamento di forma coi nuclei delle fibre nervose. Questo fatto ho voluto notare, perché la particolare costituzione del nervo ottico in questi animali, rappresenta una fase embrionale dello sviluppo del nervo ottico in altri vertebrati superiori: vi sarebbe cioè un residuo del canale che si forma per lo strozzarsi della vescicola oculare primitiva, donde ne risulta il colletto o peduncolo, che poi trasformar devesi in nervo ottico; ed inoltre perché, come diró a suo luogo, questa porzione, che chiamo *grigia* (1), del nervo ottico piglia parte, quantunque in maniera apparentemente indiretta alla rigenerazione dell' occhio.

III.

Il primo esperimento di parziale asportazione dell' occhio nel *tritone* fu eseguito da *Claudio Bonnet* il 13 settembre 1779, e secondo egli stesso lasció scritto (2), ebbe un esito fortunato ed inaspettato. Questa circostanza é importante per la storia della riproduzione dell' occhio, perché vedremo il maggiore studio con cui furono in seguito ripetuti gli esperimenti. Il *Bonnet* infatti, é chiaro che aveva intenzione di asportare parzialmente l' occhio, *ma non essendo egli ancora impratichito nell' atto operativo, lese profondamente le membrane di esso e venne fuori il cristallino.* Dopo questa

(1) È d' avvertire, quantunque non riguardi questa specie di vertebrati, che la radice grigia del nervo ottico era stata segnalata dal *Vicq d' Azir (Traité d' Anat.)* e dopo molti anni descritta da *Foville (Anat. du systeme nerveux central ecc.)* come proveniente da una lamina di sostanza grigia, che si estende sulla porzione adiacente degli strati ottici e si mostra al fondo del terzo ventricolo. Il modo però di disporsi nel nervo ottico - del tritone - del cono di sostanza grigia, e l' origine sua sono differenti, e non è stata notata in altri animali l' esistenza del canale centrale in continuazione del terzo ventricolo.

(2) Ouvres d' Histoire naturelle et de Philosophie. Tome V, 1ère partie, pag. 356. Neuchatel 1781.

operazione, l'A. vide al posto dell' occhio una ferita sanguinante e nessun vestigio apparente delle parti proprie dell' occhio; non credette quindi possibile la riproduzione di esso. Ma con sua gran meraviglia, il 31 maggio 1780 — poco più di otto mesi e mezzo dopo — vide un nuovo occhio che stava formandosi. L' iride e la cornea erano già abbastanza bene conformate, ma questa non avea ancora il grado di trasparenza normale. Il 1.° settembre dello stesso anno l' occhio sembrava completamente rigenerato. La cornea era trasparente come quella dell' altro occhio; l' iride ben limitato e di color giallo-dorato su fondo nero, caratteristico dei tritoni: in una parola era impossibile di riconoscere in quest' occhio, così bene rigenerato, il minore vestigio della strana operazione eseguita. Il perfezionamento dell' occhio riprodotto ha sempre progredito fino all' 11 di Novembre, quando il tritone morì, e l'occhio riprodotto fu trovato completo e poco più piccolo dell' altro.

Blumenbach (1), tre anni dopo, ripetè l'esperimento con più larghe vedute di *Bonnet*. Dapprima asportò in tre tritoni l' intero bulbo oculare, escidendolo nel luogo ove inseriscesi il nervo ottico, e l' occhio non si è mai riprodotto; ma dal residuo del nervo ottico pullulava un bianco e solido fungo, il quale a poco a poco riempieva l' orbita, e dopo qualche tempo gli animali morirono. In un quarto tritone operato nel maggio 1784, incise per primo la cornea, così che l'occhio svuotavasi della lente e degli altri umori, ed allora tagliò le depresse tuniche in maniera da lasciare una piccola porzione della parete del bulbo, che con accurato esame verificò essere stata appena la quinta parte di tutto il globo oculare, rimasta aderente al nervo ottico. Nei prossimi successivi cinque mesi tutta l' orbita era quasi chiusa dalle palpebre, ma nel sesto mese circa dopo l' operazione, incominciò ad aprirsi di nuovo, e potevasi distinguere un piccolissimo bulbo, emergente dal fondo dell' orbita, il quale sebbene nel mese di aprile 1785 — 11 mesi dopo — quando l' animale per caso morì, era più piccolo dell'altro, nondimeno era perfetto, con cornea trasparente, iride dorato, e regolarmente traforato dalla pupilla.

Nel 1880 il *Philipeaux* (2) pubblicò una sua Nota, dalla quale risulta avere egli ripetuto esattamente l' esperimento di *Blumenbach* sopra 40 tritoni, ed ottenuto il risultato che, incisa la cornea e svuotato l' occhio del cristallino e del vitreo, questi si riprodussero dopo 25 giorni, e lo stesso è avvenuto allorquando era stata asportata una gran parte del globo oculare, solo che la rigenerazione si compì più tardi. L' occhio completamente estirpato, ad altri 40 tritoni, non si riprodusse.

---

(1) Specimen Physiolog. comparativæ inter animantia calidi et frigidi sanguinis. Vol. 8, pag. 95.

(2) Note sur la reproduction de l' Oeil chez la salamandre aquatique. — *Gazette Médicale de Paris. 51e Année, 6a Serie, Tome 2° 1880.*

Non conoscendo gli esperimenti di *Philipeaux*, e solo incompiutamente quelli di *Blumenbach* da quanto ne ha riferito *G. Müller* nel suo classico trattato di Fisiologia, ho voluto, coll' intendimento già innanzi manifestato, ripetere nella state dell' anno scorso tale esperimento, ed anche io dapprima estirpai totalmente il globo oculare, sempre con risultato negativo circa la riproduzione di esso; e mai vidi che il fungo, di cui parla *Blumenbach*, sorgente dal fondo dell' occhio, riempisse l' orbita, la quale invece rimase coperta dalle palpebre molto depresse. Coll' esame microscopico trovai le lamine ossee atrofiche e il cavo orbitario rimpicciolito e pieno di tessuto cicatrizio giovane, in mezzo al quale era ancora riconoscibile il moncone del nervo ottico, i cui elementi cellulari moltiplicati formavano una fitta massa cellulare bene distinta in mezzo all' altro tessuto.

In quest' anno ho potuto completare gli esperimenti di parziale asportazione incominciati l' anno scorso. Il metodo di operazione da me seguito è semplicissimo. Uncinata la cornea, stiravo riguardosamente in fuori il bulbo oculare e con una forbice curva escidevo ora l' intera cornea, ora parte di essa e di sclerotica, ed ora con l' intera cornea tanto di sclerotica da restare un terzo circa del globo oculare in fondo all' orbita. A seconda della maggiore o minore estensione del taglio, il bulbo svuotavasi da sè del contenuto, o pure — ciò che facevo in ogni caso — con lieve pressione, esercitata passando con ago curvo sulla ferita, ne uscivano il cristallino, l' umor vitreo e quasi tutta la retina, i cui elementi riscontravo coll' esame microscopico della sostanza in tal modo estratta. All' operazione seguiva una relativamente abbondante emorragia, poichè, come ho detto, i vasi coroidei sono molto ampi e con disposizione cavernosa; il grumo di sangue vi rimaneva aderente per uno o due giorni, e poscia le palpebre, chiuse e depresse, impedivano di poter vedere ciò che avveniva nell' interno del bulbo per un tempo più o meno lungo, secondo la maggiore o minor parte asportata. Per le modificazioni, che negli animali operati si andavano esteriormente man mano osservando nell' occhio rigenerantesi, non avrei che a ripetere quanto venne lasciato esattamente scritto da *Blumenbach*. Aggiungo soltanto di avere osservato nei tritoni, ai quali avevo asportato solo una parte della cornea e svuotato il bulbo, che la parte escissa veniva, il più delle volte dopo due giorni, sostituita da tessuto grigiastro, alquanto trasparente e bernoccoluto, attraverso il quale era possibile vedere il sangue che in non pochi casi riempiva il bulbo. Tale tessuto di nuova formazione diveniva dipoi liscio ed eguale e riproduceva la cornea, che, quantunque dapprima non del tutto trasparente, lasciava vedere la ripristinazione dell' iride e della pupilla, e la ricomparsa del pigmento dorato. Nei tagli più estesi il processo era più complicato, come si vedrà dalla descrizione dei fatti rilevati mercè l' osservazione microscopica; e

poi non era che rare volte possibile vedere esattamente dall' esterno, per l' impedimento opposto dalle palpebre chiuse, e più per l' accumulo al disotto di esse di muco misto a gran quantità di cellule epiteliali, il quale formava uno strato bianco-grigiastro sui tessuti di nuova formazione.

La reintegrazione dell' occhio è avvenuta dopo un tempo proporzionato all' estensione del taglio delle membrane dell' occhio, dopo un mese, cioè, fino a cinque o sei: in media si può approssimativamente stabilire, che negli animali a cui venne asportato circa la metà del globo oculare, dopo quattro mesi, o poco meno, l' occhio riprodotto mostrossi completo, ma più piccolo dell' altro, di cui non eguagliava la grandezza che dopo 10-14 mesi, secondo che l' operazione era stata eseguita al principio di maggio o in luglio. Conservo un preparato dell' intero cervello, a cui ho lasciati uniti gli occhi, di un tritone ucciso il giorno 25 agosto, ed al quale il 22 maggio aveva asportato la metà del bulbo compresavi tutta la cornea e parte di sclerotica. L' occhio rigenerato misura i $^4/_5$ del normale, è perfettamente ricostituito, e mostra soltanto, al limite fra la sclerotica e la cornea, un piccolo spazio triangolare spigmentato.

IV.

Processo di rigenerazione delle varie parti dell' occhio asportate. Istogenesi e sviluppo.

Il processo di rigenerazione, tranne che pel cristallino, s' inizia quasi contemporaneamente per tutte le parti costitutive dell' occhio, parzialmente o totalmente asportate, riconoscendo però l' origine genetica dei vari tessuti riproducentisi, nelle modificazioni nutritive e prolifere degli elementi rimasti e, per quanto possa avere importanza, nell' emigrazione ed organizzazione progressiva dei globuli bianchi.

Della rigenerazione delle diverse parti costitutive dell' occhio dirò ora partitamente e successivamente nell' ordine con cui esse compionsi nel loro sviluppo.

Epitelio corneale. — Negli occhi, dai quali era stata asportata solo una parte della cornea, fin dal secondo giorno dopo dell' operazione si osserva l' attiva proliferazione dell' epitelio rimasto sul lembo della cornea; e un po' più tardi dell' epitelio della congiuntiva palpebrale in quegli occhi in cui colla cornea era stata tagliata anche parte di sclerotica. Nel quarto giorno i nuovi elementi epiteliali si trovano già in più strati a ricoprire quelle parti eventualmente rimaste fra i margini della ferita — residui di vitreo, di retina o di coroidea — nell' atto dello svuotamento del bulbo, o pure il grumo di sangue ora non più ben riconoscibile per le comuni al-

terazioni degli elementi chimici e morfologici di esso, e l' accorrimento ed infiltrazione di leucociti. Fra questo nuovo epitelio ed il vecchio, che nelle più estese escisioni è da ogni lato quello della congiuntiva palpebrale, Tav. 1ª, fig. 5, *n*, non si osserva alcuna interruzione, anzi nel limite fra l' uno e l' altro esso è più alto, donde va gradatamente assottigliandosi verso il centro della superficie del nuovo, ed i suoi elementi che hanno raggiunto il loro completo sviluppo non differiscono pei loro caratteri da quelli onde hanno avuto origine.

Cornea trasparente. Nei preparati eseguiti da occhi, di cui solo una parte di cornea era stata asportata, o la metà di essa con parte di sclerotica, fin dai primi due giorni si osserva l' ingrossamento progressivo dei corpuscoli corneali, dalle svariatissime figure dei quali chiaramente si rileva l' attiva semovenza loro. Questo ingrossamento non tarda ad essere seguito da scissione, e i giovani elementi che ne derivano si vedono fra il terzo e il quarto giorno migranti per le lacune corneali notevolmente dilatate.

Per l' aumento di nutrizione, onde ne viene ingrossamento e moltiplicazione degli elementi e dilatazione di lacune, accompagnati da rammollimento delle lamine corneali — specialmente al margine del taglio dove quelle si vedono come fibre disgregate e allontanate fra loro per la più attiva proliferazione locale degli elementi cellulari — il lembo della cornea per una certa estensione, mm. 0,3-0,6, verso la periferia, mostrasi ingrossato, Tav. 1ª, fig. 6, *a*. In questo estremo i corpuscoli corneali non sono tanto ingranditi, ma le lacune sono divenute larghe ed in esse osservansi leucociti migranti, in alcune delle quali trovansene fino a 5 o 6, e potrebbero ritenersi come elementi derivati dal corpuscolo corneale, se questo non si trovasse il più delle volte in posto, e ben distinto pei caratteri proprii dai globuli migranti. Circa al settimo od ottavo giorno i leucociti si osservano accumulati alla superficie del taglio ed anche in prossimità alla faccia interna del lembo della cornea, dove si mischiano ad altri ed assai più numerosi, provenienti dai vasi coroidei ectasici.

Inoltrandosi dal tempo dell' operazione, si vede l' orlo della cornea tagliata molto mutato per la progredita moltiplicazione degli elementi cellulari, che costituiscono ora un giovane tessuto connettivo, il cui sviluppo si avanza verso il margine opposto della ferita della cornea. Così si forma al disotto dell' epitelio uno strato di tessuto fibroso, della grossezza quasi della cornea, i cui elementi fin da ora sono disposti in tante file parallele alle linee di curvature del globo oculare fig. 6. *c*, l' ultima delle quali costituisce il limite interno fra esso ed altro tessuto connettivo che, pur avendo la stessa origine, presenta i caratteri del tessuto mucoso, *d*. Questo tessuto mucoso, che continuando a svilupparsi si estende nella cavità del bulbo, spinge innanzi a sè gli avanzi retinici, eventualmente rimasti ade-

renti all' apertura praticata, o la nuova retina che si sviluppa nel processo di rigenerazione, come dirò più avanti.

Sclerotica. Il processo rigenerativo della sclerotica varia alcun poco da quello della cornea trasparente Tav. 1ª, fig. 5 e 6, e Tav. 2ª, fig. 3; poichè, quantunque gli elementi cellulari del suo tessuto nel margine della ferita s' ingrossino, pure non tanto, nè proliferano così attivamente come i corpuscoli corneali; gli spazi lacunari non si dilatano che poco, e sulla presenza o meno in essi di leucociti non posso emettere un giudizio assoluto, poichè non ne ho veduti, e se pur vi sono non li ho potuto distinguere dai giovani elementi derivati dalla proliferazione delle cellule fibrose scleroticali. Ciò ch' è certo si è che il processo di neoformazione connettivale all' orlo del taglio della sclerotica è poco attivo, e lo strato fibroso, che circa al 25° giorno dall' operazione si trova a sostituire la cornea e la parte mancante della sclerotica, fig. 6, *c*, ha origine in gran parte da elementi migrati dai vasi coroidei e dalla proliferazione del tessuto connettivo sotto-mucoso delle palpebre, donde pure sviluppasi il tessuto mucoso che va a riempire il cavo bulbare, Tav. 1ª, fig. 5, *o*. Il nuovo tessuto così originatosi, e che seguita a svilupparsi finchè l' occhio ha ripreso le sue normali dimensioni, dà luogo alla compiuta e definitiva rigenerazione della cornea trasparente e della parte tagliata della sclerotica. Per la prima, già fin dal 40° giorno, si mostra distinta la disposizione lamellare, e corrisponde appunto al tempo in cui nell' animale vivo aveva essa cornea raggiunto un grado di trasparenza tale da lasciar vedere il pigmento dell' iride ed i limiti del foro pupillare; e per la seconda ancor più presto il tessuto nuovo è pervenuto alla grossezza del vecchio, e solo se ne distingue pel maggior numero di elementi cellulari e alquanto più grandi.

Questi i fatti che più spesso occorre di osservare, nella rigenerazione degli occhi dei *tritoni*, relativi alla cornea e alla sclerotica; ma non mancano eccezioni, specialmente per la cornea, di vedere cioè persistere al posto di essa uno strato di tessuto fibroso per nulla diverso da quello della sclerotica, i cui fasci sono stivati fra loro tanto che, nelle sezioni microscopiche, fra i due margini della cornea si trova a riunirli una sottile membrana cicatrizia. In altri casi la differenziazione laminare del tessuto della cornea, per ampie lacune che si formano, avviene dopo 5-7 mesi, ed in maniera del tutto differente, restandovi fino allora elementi cellulari abbastanza grossi, come fin dal principio di sua formazione.

Coroide. La tunica vascolare del bulbo è stata in vario grado lesa a seconda della grandezza della parte dell' occhio asportata; quindi si è avuto il semplice distacco di essa dalla sclerotica per poca estensione in là dal limite suo dalla cornea, nei casi in cui una sola parte di questa era stata asportata, distacco determinato certamente dalla pressione per lo

svuotamento dell' occhio; venne poi asportata quella parte di essa che dall' iride si estende sulla sclerotica fino al punto dove venne eseguito il taglio per l' operazione, nei casi in cui una maggior parte del bulbo oculare era stata escisa. Per tali lesioni della coroidea è sempre avvenuta diffusione del pigmento per mezzo a tutte le parti rimaste del globo oculare, Tav. 1ª, fig. 5, *g*.

Nel primo caso inoltre avevasi in principio emorragia fra la sclerotica e la coroide, e quando questa, per forte pressione o altro trauma, era stata lacerata, il sangue versavasi anche nella cavità del bulbo. Alla emorragia seguiva, come in generale avviene, il più o meno rapido o tardivo assorbimento del sangue, e quindi l' emigrazione dei leucociti dai vasi corodei più prossimi, i quali per l' ulteriore progressiva organizzazione loro trasformavansi in elementi connettivi e vascolari in rapporto di continuità colle pareti dei vasi coroidei, ed avveniva così la neoformazione vascolare per la riproduzione della coroide asportata. Come vedesi nella fig. 1ª della Tav 2ª, i nuovi vasi, *v* rimanevano addossati alla superficie interna della sclerotica e ripiegandosi sull' orlo tagliato della stessa continuavano a svilupparsi in avanti sullo strato connettivale che rigenerar dovea la sclerotica e la cornea, e si prolungavano anche in addietro anastomizzandosi coi capillari pure dilatati, esistenti all' esterna superficie della sclerotica, *v'*. Sui vasi così applicati alla faccia interna di questa membrana e del nuovo connettivo, veniva gradatamente adagiandosi la parte di coroide distaccata, *f*, spinta dall' avanzarsi in dentro del connettivo mucoso proveniente dal tessuto della nuova cornea, Tav. 1ª, fig. 6. *d*.

Nel secondo caso, Tav. 1ª, fig. 5 e Tav. 2ª fig. 3, la coroidea rimasta aderiva alla sclerotica, perchè nella parte profonda del bulbo la pressione per lo svuotamento non era stata tanto forte da distaccarla, e poscia pel ravvicinamento dei lembi della sclerotica, in conseguenza dello svuotamento del bulbo e in parte della pressione esercitata dalle palpebre, anche i vasi coroidei rispettivi mettevansi in rapporto di continuità per altri vasi che sviluppavansi nel connettivo mucoso, fig. 3, *f'*, lasciando uno spazio centrale nel punto dove formar doveasi la pupilla. Così progredendo il processo neoformativo, collo sviluppo continuo e perfezionamento delle varie parti costitutive dell' occhio, lese od asportate, anche i vasi nuovi coroidei assumevano le normali condizioni loro, e ricostituivasi così la parte della coroidea asportata, nella posizione e dimensione normale e coi primitivi rapporti, riformandosi poscia i processi ciliari e l' iride, e perfezionandosi la pupilla dopo lo sviluppo del cristallino, come dirò appresso.

Retina. Nel processo rigenerativo di questa membrana, la più importante e delicata dell' occhio, non mi è stato facile poterne intendere l' origine sua nè il modo di sviluppo, se non dopo avere fatti ed accuratamente

studiati molti preparati microscopici, per la ragione — prescindendo dalla sua complicata e delicata struttura — che nell' atto di svuotare il globo oculare, alcune volte essa veniva fuori tutta cogli altri umori in essa contenuti, altre volte parzialmente, quando più quando meno. Per questo fatto, benchè avessi avuto cura di esaminare ogni volta col microscopio, appena estratto, il contenuto del globo oculare, pur riscontrandovi gli elementi costitutivi della retina, mi era, come ognun vede, impossibile il poter stabilire se qualche parte di essa fosse rimasta dentro, aderente alla coroide.

Per le ripetute osservazioni dei tagli, disposti a serie e convenientemente tinti, dei molti occhi operati, ho potuto mettere in sodo il fatto, che la retina in tutt' i casi, per la pressione esercitata onde ottenere lo svuotamento del bulbo, si distaccava dalla coroidea, a questa restando aderente il solo strato epiteliale retinico. Però pezzi più o meno grandi di retina — la quale nel momento di sortire dal foro praticato pel taglio della cornea, se questo era alquanto piccolo, si rompeva — restavano impegnati con una certa quantità di umor vitreo all'orlo dell'apertura praticata; ma quando tutta la cornea e parte di sclerotica erano state tagliate, la retina distaccata veniva tutta fuori coll' altro contenuto del globo oculare. Dirò prima di ciò ch' ebbi ad osservare in quei casi in cui parte di retina era rimasta dentro l' occhio operato, e poi di ciò che accadeva quando tutta era venuta fuori.

Nel primo caso, apprezzabili modificazioni istologiche regressive della retina, cagionate dal distacco di essa dalla coroidea e per conseguenza anche dal nervo ottico, rilevavansi per quanto ho potuto vedere nello strato dei bastoncelli, e propriamente nei loro segmenti esterni, i quali perdevano la striatura e degeneravansi in una sostanza dapprima leggermente granulosa che poi diveniva affatto omogenea; ed in tal guisa a poco a poco progrediva la degenerazione di quella parte dei bacilli dall' esterno verso l' interno fino a scomparire affatto.

Poco dopo notavasi il disfacimento granulare degli elementi posti verso il mezzo dell' altezza dello strato granuloso, e l'atrofia, in alcuni luoghi delle parti periferiche della retina, dei segmenti interni dei coni e dei bacilli; mentre avveniva, come dirò or ora, una attiva proliferazione, specialmente in un dato punto della retina rimasta, degli elementi ancora integri. Il disfacimento o l' atrofia degli elementi dello strato granuloso progrediva in maniera che questi divenivano sempre più rari, fino a che della retina scomparivano a poco a poco i diversi strati, e tutta era ridotta ad una massa più o meno alta di nuclei e di elementi cellulari atrofici.

Ma nel mentre ciò accadeva della vecchia retina, dal moncone del nervo ottico lacerato a livello della coroidea, e dall' epitelio retinico ivi attorno

esistente ed in cui era già iniziato il processo proliferativo, Tav. 2ª. fig. 2, sorgeva nell' interno del bulbo un nuovo tessuto di forma cilindrica, quasi come un prolungamento del nervo ottico, i cui elementi in parte provenivano da ingrossamento e proliferazione dei nuclei delle fibre del nervo, e parte dall' epitelio retinico, *e*. I nuovi elementi epiteliali, dal principio, per un certo tratto si disponevano alla periferia del tessuto del nervo a guisa di rivestimento, *a*, ma più in là formavano tutta una massa di cellule, a grosso nucleo ovale e con protoplasma che differenziavasi poi in fibra nervosa, Tav. 1ª, fig. 4, *a*. Mentre questo tessuto si avanzava in lunghezza diretto verso il residuo della retina impegnato nell' apertura della cornea, in varii degli elementi costitutivi della retina — cellule dello strato granuloso, e nuclei o granuli dei coni e dei bacilli — si svolgeva un' attiva proliferazione, il cui prodotto si disponeva a forma di cono, *b* colla base in fuori e l' apice diretto in dentro per incontrare il nuovo tessuto proveniente dal fondo del bulbo e ad esso unirsi, sicchè ne risultava un cordone che ristabiliva il rapporto di continuità del nervo ottico colla parte di retina rimasta.

Ristabilito così il primitivo rapporto fra queste parti divise, succedeva come uno sdoppiamento del cono suddetto fra le pieghe della retina, e per l' avanzarsi dal di fuori del tessuto mucoso, esso cono sdoppiato, si dilatava a guisa d' imbuto, le pareti del quale continue in fuori col residuo della retina — modificata pei processi regressivi suaccennati — distese e spinte in dentro, tutte insieme venivano ad adagiarsi sulla coroide, Tav. 1ª fig. 6, Tav. 2ª fig. 3. Ciò verificavasi in media fra il 20° e il 25° giorno, nel quale tempo, pel processo degenerativo degli elementi vecchi non proliferati e l' atrofia di altri, non era più riconoscibile la retina in quella specie di membrana che ora era costituita da rare e nuove cellule provenienti dall' epitelio retinico Tav. 2ª fig. 4, *e*, e fra esse molte delle vecchie atrofiche *a*. Una volta che questa informe massa cellulare e la coroidea erano venute a contatto, gli elementi proliferanti dell' epitelio retinico, a questa rimasto aderente, ne ristabilivano la continuità, e già la superficie interna del bulbo a questa epoca era rivestita tutta dalle due membrane, Tav. 2ª fig. 3, *l*, *i*, e la sua cavità riempita di tessuto mucoso, fig. 3, *d*. Nella membrana però che sostituiva la retina e che in questa doveasi in seguito trasformare, e compiutamente rigenerarla, non era ancora possibile riconoscere alcuna differenza negli elementi cellulari, tranne che quelli della parte della vecchia retina rimasta, che dapprincipio proliferarono, erano disposti verso la superficie in uno strato più o meno distinto per essere esse cellule più piccole e più numerose, Tav. 2ª fig. 4, *s*, e quelle provenienti dall' epitelio retinico erano più grosse, formanti uno strato compatto in fondo, *e*, e più raro verso il mezzo.

Al 29° giorno, come si vede nella fig. 6 della Tav. 1ª, in cui è ritratta una porzione di occhio in via di rigenerazione, dopo asportatogli metà della cornea e parte di sclerotica, le membrane del bulbo sono in gran parte nei loro normali rapporti, il nervo ottico ridotto alla primitiva lunghezza e posizione, e negli elementi cellulari della nuova retina incomincia il differenziamento con uno strato profondo di cellule ovali, ed anteriormente, sulla interna superficie dei processi ciliari e su parte di quella dell' iride si vede già un epitelio cilindrico bene distinto. Nel nervo ottico, alla sua entrata nel bulbo, si vedono chiaramente le fibre e il modo onde esse si spandono fra gli elementi della nuova retina, e qui si osserva pure il passaggio graduato dei nuclei delle fibre dell' uno negli elementi cellulari dell' altra.

Negli esperimenti in cui tutta la retina venne asportata, il processo di rigenerazione si svolse alquanto diversamente. Dopo rigenerato l' epitelio alla superficie anteriore esterna del bulbo proveniente da quello della congiuntiva palpebrale — essendo del tutto asportata la cornea — e ristabilito il rapporto di continuità fra le opposte parti del margine del lembo della sclerotica, il primo fatto ad osservarsi si era l' ingrossamento dell' epitelio esistente alla interna superficie delle coroide e più specialmente tutt' attorno al margine del taglio che aveva interessato pure questa membrana. Contemporaneamente vedevasi eziandio l' ingrossamento e la scissione dei nuclei fra le fibre del nervo ottico e degli elementi epiteliali retinici posti in fondo alla cavità del bulbo attorno all' apertura pel passaggio del nervo ottico. Gli elementi cellulari moltiplicantisi nel fondo del bulbo formavano un cordone cellulare che stabiliva un rapporto diretto fra l' estremo del nervo ottico e la neoformazione che svolgevasi al di dentro del margine coroideo, restando anteriormente uno spazio pel quale entrava il tessuto mucoso originato dal connettivo che riformar dovea la cornea e la sclerotica.

La fig. 5 della Tav. 1ª, in cui è fedelmente ritratta una sezione di occhio di un tritone ucciso al 14° giorno dopo l' operazione, mostra i fatti or ora accennati ad una fase più avanzata di sviluppo. Vedesi il cordone cellulare *a*, costituito dagli elementi del nervo ottico e rivestito dall' epitelio retinico, che dal fondo del bulbo si eleva e si continua da un lato e dall' altro cogli elementi periferici di due masse cellulari sviluppatesi sul margine interno della coroide, *i i*. Qui però si noti che le cellule delle dette masse — come presentansi in principio del loro sviluppo — sono già discostate dal tessuto mucoso *d*, che insinuatosi per lo spazio rimasto fra i lembi della coroidea, le ha spinto innanzi a sè nel vuoto del bulbo verso la periferia. Parrebbe, dalla maniera come sono disposte queste parti nella figura, potersi dedurre che tutto attorno al margine interno coroidale siasi formato un cercine sporgente all' interno, costituito prima da una massa compatta di cellule, e

poi incavata e distesa da tessuto mucoso. Questo cercine invece, ora occupato nel suo mezzo da tessuto mucoso, non é tutto continuo, giacché le altre sezioni eseguite, come questa, secondo il piano meridiano dell' occhio procedendo dallo avanti all' indietro, e disposte in serie progressiva, mostrano che a breve distanza la massa cellulare alla destra della figura, *i,'* si fonde con quella della cavità sinistra *i,* formando un solo piano concavo al mezzo circa della cavità del bulbo e si perde a poco a poco quell' apparenza dicotomica anteriore del cordone cellulare *a*, il quale in un punto solo trovasi con quello in rapporto di continuità. Il cercine cellulare quindi, pur esistendo in principio di sviluppo su tutto il margine coroideo, perde tale forma e disposizione dopo ch' é porforato dal tessuto mucoso, il quale penetra dal segmento posteriore esterno del bulbo — considerando la posizione orizzontale della testa del tritone — e si estende in avanti, dove appunto questo cercine incavato esiste ancora come un diverticolo della cavità più ampia esistente all' indietro ed occupata dal tessuto mucoso. Questa distinzione peró non é che un fatto temporaneo, perché a misura che la produzione cellulare, sviluppatasi dall' epitelio retinico del margine coroideo, viene distesa e spinta alla periferia della cavità del bulbo, dove perfezionandosi, dovrá divenire la nuova retina, scompare a poco a poco quella specie di diverticolo, per restarvi una cavità senza anfratti di sorta, non esistendo normalmente nel globo oculare del tritone appendice o legamento falciforme come in molti pesci ed uccelli, e nelle lucertole. Peró in un giovane tritone, ucciso il 29° giorno dopo l' operazione, ho trovato la metá superiore della cavità del bulbo oculare rigenerato, divisa obliquamente in due metà da un sepimento formato dai due strati più profondi di cellule ovali delle due vesciche retiniche ravvicinati pei loro estremi posteriori e fra essi eranvi nuclei e fibre del nervo ottico. Sono interessanti molto i preparati eseguiti con quell' occhio, perché mostrano nel modo più palese che l' origine della nuova retina é dall' epitelio rimasto aderente alla coroide, e che il suo sviluppo incomincia contemporamente attorno alle due opposte aperture, a quella anteriore praticata pel taglio dell' operazione, ed all' altra per cui entra il nervo ottico, sui nuovi elementi del quale si ripiega l' epitelio proliferante Tav. 2ª fig. 2, per riunirsi a quello sviluppatosi anteriormente e formare un tutto continuo, base di sviluppo della nuova retina.

La massa cellulare cosi sviluppatasi sul margine interno della coroidea e distesa dal tessuto mucoso, va, come ho detto, spinta da questo e sdoppiandosi ancora la colonna cellulare proveniente dal fondo del bulbo, ad adagiarsi su tutta la superficie coroidea, essendo questa rivestita dall' epitelio, ora ingrossato e visibile al di dentro del pigmento, il quale poscia si unirá alla massa cellulare, partecipando, per la moltiplicazione

dei suoi elementi, al progressivo sviluppo della retina. Questi fatti in media si compiono fra il 20° e il 25° giorno; ma puó tardare o avvenire più presto a seconda di tante circostanze, principali fra esse l' etá dei tritoni, la stagione in cui sono stati operati, e la maggiore o minor parte di occhio asportata.

Dopo un mese circa, in media, il rivestimento cellulare di tutta la interna superficie del bulbo, che dovrá divenire retina, mostrasi diversamente grosso dall' apertura pupillare al fondo. È formato da un solo strato di cellule epiteliali di forma poliedrica sull' iride, e poi cilindrico semplice sui processi ciliari, e stratificato verso la loro base, Tav. 1ª, fig. 6 *l*. A partire da questo punto le cellule superficiali non presentano più il carattere epiteliale, e quelle dello strato più profondo assumono una forma allungata e verticale alla superficie della coroide con cui sono a contatto. Queste cellule allungate formano dapprima un solo strato e poi due, ordinariamente fino in vicinanza al luogo dove dovrá trovarsi, a perfetto sviluppo, la papilla ottica, restandovi peró sempre sovrapposto uno strato più o meno alto di elementi rotondi, *i*. Sono quelle due serie di cellule allungate che dovranno dare origine all' epitelio retinico, ai coni ed ai bacilli; ed ecco come ció avviene.

Le cellule dello strato più profondo o esterno proliferano per le prime, come mostrano le figure cariocinetiche che qua e lá in esso si osservano; e dei due nuovi elementi che successivamente ne risultano, uno rimane al fondo, Tav. 1ª, fig. 9, *a*, assume forma poliedrica e diviene cellula epiteliale, l' altro piglia la forma ovale allungata *b*, e per la compressione patita esternamente dalle cellule epiteliali circostanti ingrossantisi dopo avvenuta la scissione, ed internamente dalle cellule allungate del secondo strato, viene spinto un po' in avanti e passa alla forma di fuso, *c*. Dei due estremi di questo fuso uno diretto in fuori trovasi fra le cellule epiteliali e quindi a contatto della coroide, e l' altro é diretto in dentro fra le cellule della seconda serie *d*, le quali per la mutua compressione, essendo alternativamente disposte, mandano fra le parti ingrossate delle cellule a fuso un prolungamento in guisa da divenire piriformi, rotondeggianti all' interno e contigue agli elementi sovrapposti *e*.

Progredendo nello sviluppo il polo esterno delle cellule fusate, per elaborazione di protoplasma, si fa poco a poco più lungo, ed ingrossandosi diviene eguale in tutta la sua lunghezza in maniera da figurare un cilindro, Tav. 1ª, fig. 10, *a*, coll' esterna estremitá tondeggiante e l' interna terminata con una incavatura, nella quale é ricevuto il nucleo, *b*, a cui segue il polo interno, mutato esso pure d' aspetto, più allungato e sempre posto fra le cellule piriformi. Cosí viene a distinguersi nel bacillo una parte interna ed una esterna. Questa nel suo sviluppo non si presenta della stessa lunghezza,

nè sempre egualmente costituita. In principio, di forma conica, non è più lunga di quanto è alta una cellula dell' epitelio retinico e poi, ingrossandosi, eziandio si allunga, laonde il nucleo viene a poco a poco allontanato dallo strato epiteliale, di cui in principio era a contatto. Nella sua struttura, da leggermente granulosa diviene omogenea e poi apparisce striata per lungo ed alcune volte sfrangiata nella sua estremità libera. Questa apparenza non si ha che quando lo strato dei bacilli per una causa qualunque si distacca dall' epitelio sottostante, per cui credo tale sfrangiamento un fatto artificiale; non così la striatura longitudinale che si vede per tutta la lunghezza di questa parte del bacillo. Più tardi, quando è divenuta cilindrica ed ha compiuto il suo sviluppo, l' estremo di essa rotondeggiante, è adagiato in una lieve concavità formata dalle cellule epiteliali vicine, la qual particolarità molto difficilmente si rileva a causa del pigmento che si è ivi depositato e cuopre pure circa il terzo del bacillo; la striatura longitudinale diviene meno visibile per lo apparire di strie trasverse, interrotte ed incurvate ai loro estremi, così da sembrare che la sostanza omogenea siasi divisa in tanti dischi messi gli uni sopra gli altri e disposti alternativamente in più ordini. Il polo anteriore, divenuto anch' esso omogeneo, non ho potuto per lo più seguirlo al di là della parte più grossa delle cellule piriformi dove queste sono ad immediato contatto fra loro, ed una sola volta ho potuto vederlo, in vari bacilli, continuarsi nelle fibre dello strato corrispondente al molecolare esterno, Tav. 1ª, fig. 10 *d*. Le cellule piriformi, o dei *coni*, non sorpassano coi loro prolungamenti il limite fra le due parti costitutive dei bacilli; e solo più tardi, quando questi sono già formati, appajono fra essi i rigonfiamenti conici e più chiari, onde quelli si prolungano all' esterno della limitante.

Mentre le cellule fusate si modificano così per divenire bacilli, in corrispondenza del limite fra i due segmenti appare la *limitante esterna, e;* e si può non di rado vedere che essa è un derivato delle cellule connettivali esistenti fra le cellule piriformi e nello strato granuloso Tav. 1ª, fig. 9 e 10, *f*, cellule fusate e disposte verticalmente che col loro esterno prolungamento giungono a formare detta membrana, nella quale si perdono. Questa maniera di sviluppo della limitante esterna parmi valga a confermare l' opinione che ho espressa nel principio di questo scritto, secondo la quale essa, nel tritone, più che a limitare serva a mantenere i bacilli nel loro conveniente rapporto coi coni.

Non essendo ancora terminato lo sviluppo dei bacilli, anzi non molto più tardi del loro incominciato differenziamento, dalle più superficiali delle cellule rotonde ho potuto, in alcuni preparati, veder partire dei prolungamenti sottili e di aspetto omogeneo diretti obbliquamente verso la parte dove la nuova retina è continua col nervo ottico. Già fin dal primo svilup-

parsi della nuova retina — originata sia dal residuo della vecchia rimasta nella cavità del bulbo, in cui gli elementi proliferanti del nervo ottico e dell' epitelio, elevandosi dal fondo si mettono in rapporto diretto con quelli non degenerati della retina, sia dall' epitelio retinico rimasto aderente alla coroide, il quale anteriormente proliferando dà origine alla massa cellulare, fra cui e il nervo ottico si stabilisce subito la continuità — si vede, nelle sezioni microscopiche, alla superficie della massa cellulare retinica uno strato, sottile prima e poi un po' più grosso, analogo al molecolare, costituito cioè da sottili granuli in mezzo ai quali, in alcune preparazioni felicemente riuscite per la tintura, è possibile scorgere delle fibrille nervose ora più ora meno lunghe. Quando poi il differenziamento dei bacilli è compiuto, e che il segmento esterno di essi è abbastanza sviluppato, lo strato di fibre nervose superficiale è bene distinto, e dalle cellule gangliari si vedono partire le fibrille nervose che sono in diretta continuazione di quelle del nervo ottico che si espandono alle superficie della retina, Tav. 1ª, fig. 10, *m*.

È in questo medesimo tempo che incominciano pure a manifestarsi i caratteri differenziali fra le cellule che dovranno costituire lo strato gangliare e quello dello strato granuloso, poiché ora appunto le prime divengono più grosse, *l*, e molto distinto e a più larghe maglie è il reticolo cromatico dei loro nuclei, condizioni che concorrono a far meglio discernere i loro prolungamenti fibrillari. La distinzione dei due strati, gangliare e granuloso, si rende poi più chiara, perché, sempre procedendo dal fondo del bulbo verso la parte anteriore, fra le cellule differenziate incomincia a comparire lo strato molecolare, *i*, in cui si possono dapprincipio distinguere le fibrille che lo costituiscono, fig. 8 *g* ciò che più tardi è impossibile, o almeno molto difficile. Quasi contemporaneamente a questo strato molecolare apparisce l' altro di fibrille, posto immediatamente al di dentro dei coni e che ho detto rappresentare lo strato molecolare esterno *d*, e fig. 8 *e* (1).

---

(1) Era già stata presentata questa Memoria alla R. Accademia delle Scienze di Bologna, quando venni a notizia di una Nota di *L. Griffini* e *G. Marchiò* « Sulla rigenerazione totale della retina nei tritoni » *Riforma Medica*. Gennaio 1889.

I fatti osservati dagli A. nel processo rigenerativo della retina, non sono molto dissimili da quelli che io ho rilevati nei casi in cui porzioni di questa rimasero impegnate nell' apertura pel taglio praticato delle membrane esterne dell' occhio.

Per la sezione del nervo ottico, colla quale gli A. hanno eseguito i loro esperimenti, si distruggono quasi tutti gli elementi della retina meno le cellule più esterne dello strato granuloso della parte anteriore, vicino alla *pars ciliaris*, donde proliferando, esse si spingono verso l' equatore e il polo posteriore dell' occhio, e vanno ad occupare il posto delle vecchie cellule distrutte. Tutte le cellule proliferanti si dispongono dipoi in modo da formare due o tre strati anteriormente verso la parte ciliare, e uno dall' equatore al polo posteriore dove per la loro forma poligonale rassomigliano ad un epitelio pavimentoso semplice che tapezza la coroide; però fra la superficie interna di questa e la nuova retina si osservano ora alcune grosse cellule in mitosi, in mezzo alle cellule

Nervo ottico. I nuclei delle fibre nervose che verso l' estremità anteriore del nervo ottico, nello stato normale, si vedono scarsi e molto piccoli; due o tre giorni dopo la parziale asportazione dell' occhio si osservano ingrossati ed in maggior numero, Tav. 1ª fig. 4, *a.* La proliferazione nucleare fra le fibre nervose non è limitata alla estremità del nervo, ma estesa circa ai quattro quinti della sua lunghezza; e notevole è pure la proliferazione degli elementi gangliari che, come ho già notato, formano un cono che dalla origine del nervo si prolunga per un quarto della sua totale lunghezza. Per queste modificazioni il nervo ottico assume l' aspetto embrionale, e per la predominanza degli elementi cellulari le fibre sono poco visibili, e sembra che esse formino la parte corticale del nervo in mezzo a cui vedesi un cilindro fatto tutto di cellule in diretta continuazione con quelle gangliari del cervello. Parmi adunque evidente che tutto il nervo ottico fin dalla sua origine partecipa al processo nutritivo e formativo per la rigenerazione dell' occhio.

Cristallino. La rigenerazione della lente avviene in maniera del tutto simile al suo sviluppo embrionale, e raggiunge nel maggior numero degli esperimenti lo stato perfetto di sua costituzione; differisce solo per l' origine degli elementi onde esso dovrà svilupparsi.

Allorquando la massa cellulare retinica ha raggiunto il fondo della cavità bulbare, si è completamente adagiata alla superficie della coroide e di questa sono sviluppati i processi ciliari da cui a poco a poco si forma l' iride a limitare la pupilla, nel margine, che ora limita questo foro ancora largo ed imperfetto, avviene la proliferazione dell' epitelio pavimentoso che abbiamo veduto, nello sviluppo della retina, essere rimasto a rivestire internamente, in un semplice strato, questa estrema parte della coroidea. La proliferazione epiteliale si fa molto più attivamente dal lato superiore del margine pupillare, e quindi nelle sezioni meridiane dell' occhio, una delle quali è ritratta nella fig. 6 della Tav. 1ª, si vede dal lato superiore dell' iride sospeso verso il cavo bulbare un corpicciuolo *g,* costituito da cellule, di forma ovale e peduncolato, mentre al lato opposto si nota un semplice ingrossamento del margine. Ho detto tale proliferazione farsi più attiva *ordinariamente* al lato

---

in via di distruzione e appartenenti all' epitelio retinico pigmentato. In questo abbozzo di retina le cellule continuano a proliferare, e le cellule nuove tendendo a prendere la forma poligonale comprimono le preesistenti, le allungano e le spingono in dentro verso la superficie libera. Così formato lo strato poligonale, continua la proliferazione delle cellule della nuova retina specialmente nel polo posteriore dell' occhio, dove si trovano fin da ora più strati di cellule allungate, la retina s' ingrossa in tutta la sua estensione per 5 o 6 strati di cellule, ed allora il numero delle cariocinesi diminuisce ed incomincia dalla sua parte posteriore la differenziazione degli elementi costitutivi i diversi strati retinici. In questo processo di differenziazione vi sono alcune diversità, fra quanto risulta dalle mie osservazioni e quello che gli A. hanno rilevato dalle loro, rispetto al tempo e alla maniera con cui si modificano le varie cellule, e il delimitarsi dei varii strati.

superiore, poiché mi é occorso in un occhio in via di rigenerazione riscontrare due di questi focolai proliferi; ma in uno — in quello posto verso il lato esterno — le cellule raggiunsero subito la loro fase adulta epiteliale, mentre nell' altro posto di sopra, conservavano il carattere embrionale e continuavano a proliferare, il che dimostra chiaramente l' arresto di formazione — a cui sarebbe certo succeduta l' atrofia — del primo, e il progressivo sviluppo dell' altro per la formazione completa del cristallino.

Dalla disposizione delle cellule che costituiscono il sudetto corpicciuolo, alla fase di sviluppo in cui é rappresentato nella figura 6, si par chiaro come dal margine pupillare, ingrossato per la moltiplicazione delle cellule epiteliali ivi esistenti, siasi prodotta in principio una gemma formata tutta alla periferia da uno strato continuo di cellule e queste, proliferando verso l' interno, l' abbiano fatta ingrossare nel suo estremo libero e n' é risultato cosi il peduncolo. In un periodo alquanto più avanzato, Tav. 2ª, fig. 5, si vede il progresso formativo non solo nella parte libera *a,* per cui essa é divenuta più grossa e tende alla forma sferica, ma anche verso il peduncolo, e nel suo ingrossamento é a notarsi che persiste sempre lo strato cellulare periferico senza limiti distinti e verso il centro una massa protoplasmica polinucleata, in mezzo a cui, ma più vicino al peduncolo, esiste uno spazio vuoto triangolare, *c.* Tutto il cristallino a questa fase di sviluppo figura come una cellula gigante di mm. 0,12 $\times$ 0,09. Il differenziamento cellulare peró non tarda ad avvenire, come si vede nella fig. 6, in cui il nuovo cristallino essendo giunto alla grandezza di 0,21 mostra ben distinte le sue parti costitutive, la centrale o *lente* propriamente detta *a,* e la periferica o *capsula, b,* separate da uno spazio semicircolare *c,* che é lo stesso che si vede di forma triangolare nella fig. 5. Nella prima vi é il nucleo lenticolare costituito da cellule epiteliali poliedriche e attorno ad esso più strati di cellule allungate, e le più interne già a forma di fibre proprie del cristallino, dalla qual parte, che diró *base* di esso, vi rimane aderente la capsula, perché di là continua, progredendo, la neoformazione cellulare per l' accrescimento della lente. Essa é derivata dal differenziamento della parte della massa protoplasmatica esistente al di dentro dello spazio triangolare vuoto nella fig. 5, mentre dall' altra posta ai lati di questo n' é derivata la capsula, nella quale é attiva la proliferazione delle cellule proprie per l'accrescimento suo in proporzione a quello della lente che dovrà progressivamente contenere. Si vede inoltre bene il limite del ricettacolo *d,* che il tessuto mucoso, il quale ancora occupa tutta la cavità del bulbo fra la cornea e l' interna superficie della retina, forma a tutto il cristallino.

Continuando a crescere la lente viene a contatto intimo colla capsula, la quale la riveste anteriormente per i due terzi circa della sua superficie, il peduncolo si va sempreppiù assottigliando fino a scomparire del tutto,

Tav. 1ª, fig. 7, e non vi resta fra il cristallino e la parte superiore del margine pupillare altro rapporto fuori del semplice contatto di due superficie epiteliali, della capsula da una parte edel margine dell' iride dall' altra. Da questo momento l' accrescersi del cristallino, il cui diametro misura nel senso dell' asse oculare mm. 0,57 e trasversalmente 0,67, avviene come nello sviluppo normale, e pel completarsi dell' iride esso viene a contatto con tutto il margine pupillare e in tal modo é perfettamente rigenerata questa parte dell' occhio.

Formazione della camera anteriore. Quando é avvenuta la differenziazione delle due parti costitutive del cristallino, quale si vede nella Tav. 2ª fig. 6, incomincia la fluidificazione del tessuto mucoso immediatamente al di dentro del mezzo della superficie della cornea, e di là procede verso la sua periferia e verso il cristallino, di guisa tale che, quando questo occupa tutto lo spazio pupillare, trovasi già formata la camera anteriore. Del tessuto mucoso peró vi rimane un anello, Tav. 1ª, fig. 7, *c*, occupante uno spazio triangolare fra la base dei processi ciliari e la periferia della cornea. Da questo anello si partono due velamenti, uno dei quali, il posteriore, *e*, riveste l' iride e il cristallino, *e*, rappresenta la membrana pupillare, e l' altro, l' anteriore, *d*, la superficie interna della cornea formando la *membrana di Descemet*.

A questo punto di rigenerazione dell' occhio le sue parti sono abbozzate, e in seguito non avviene altro di nuovo tranne la scomparsa della membrana pupillare e il differenziamento del tessuto mucoso, occupante la cavità del bulbo, in connettivo reticolare del vitreo, colla graduale atrofia de' suoi nuclei. Intanto si nota il progressivo perfezionamento dei diversi strati retinici, e l' accrescimento continuo delle altre parti, fino al completo sviluppo dell' occhio, in cui esso raggiunge le dimensioni dell' altro rimasto, ció che avviene dopo un anno circa.

V.

I fatti anatomo-istologici che son venuto man mano esponendo, sono il risultato di non pochi esperimenti e di moltissime osservazioni che ho dovuto ripetere, e in varie guise, specialmente quante volte mi é occorso di rilevare alcuna cosa che fosse in contraddizione con ció che si é osservato nello sviluppo normale di qualche parte costitutiva dell' occhio. Lo stesso io credo sia accaduto a tutti coloro che occuparonsi dello studio dei processi rigenerativi di diverse parti dell' organismo animale.

Il ripetere osservazioni ed esperimenti, variando i metodi di esecuzione di questi, come pure dei preparati microscopici, mi é sembrato assai utile, essendo questo, secondo io credo, il migliore e più opportuno mezzo per

impegnare la riflessione sui fatti, i quali nel loro modo diverso di presentarsi nelle varie circostanze offrono il più delle volte ed in maniera quasi inaspettata, il mezzo di giungere alla esatta interpretazione loro, e così si apre la via ad intendere il processo per cui una parte d'un organo o questo tutto intero si riproduce. Nel lavoro e nello studio occorsomi per poter risolvere la questione della rigenerazione dell'occhio, ho dovuto precisamente seguire siffatto metodo; e così appunto mi è avvenuto di verificare che l'origine e lo sviluppo della retina e del cristallino, per quanto in principio mi sembravano avvenire in modo assai diverso che nello sviluppo embrionale, ho potuto infine convincermi che non ne differivano, ed ho trovato in vece molta analogia fra i processi che si compiono nello sviluppo embrionale e quello rigenerativo dell'occhio.

Accennerò brevemente a tali analogie e differenze, che ho potuto stabilire circa la riproduzione della retina, dell'umor vitreo e del cristallino, negli esperimenti in cui essi vennero totalmente asportati; chè per la cornea, la sclerotica e la coroide non si può far questione di origine, essendo state asportate parzialmente. Vi sarebbe qualche eccezione per la cornea, ma tutte le volte che venne asportata per intero, la sua riproduzione è avvenuta dal tessuto stesso che doveva rigenerare la sclerotica.

L'origine dell'umor vitreo che nello sviluppo embrionale, secondo alcuni, sarebbe dal mesoblasto, penetrato per la fessura coroidea, e secondo altri da quello che trascinato dalla porzione introflessa dell'epiblasto, vi rimane incluso dopo lo strozzamento di essa; nel processo rigenerativo dell'occhio esso deriva indubitatamente dal tessuto che riunisce in primo tempo i margini della cornea o della sclerotica tagliati, e di là si affonda, seguendo lo sviluppo della retina, nella cavità del bulbo. Se ci atteniamo a quanto afferma il *Lieberkühn,* sostenitore della seconda opinione, non vi sarebbe che poca o quasi nessuna differenza fra lo sviluppo normale e il rigenerativo del vitreo, il che sono indotto a credere da alcune osservazioni fatte in occhi di giovanissimi embrioni di tritoni, nei quali mi parve essere avvenuta la inclusione di tessuto mucoso fra il cristallino e la vescicola oculare.

Per la retina, le difficoltà per ammettere analogia fra lo sviluppo embrionale e il rigenerativo sono maggiori in quei casi in cui essa venne completamente asportata; ma, da quanto ho veduto e riferito, parmi non resti dubbio sulla origine sua dall'epitelio rimasto aderente alla coroide. Vero è che, come a me dapprima è avvenuto, ad altri potrà sembrare strano che da uno strato epiteliale destinato a porre un limite fra un organo tanto delicato e la coroide, possa pigliare origine la nuova retina, e così dev'essere allorchè non si tenga presente la comune origine dell'uno e dell'altra. Quando però si rifletta che nel processo rigenerativo, dai margini tagliati della coroide, per la proliferazione dell'epitelio ivi rimasto, si rista-

bilisce la continuità dello strato epiteliale in avanti, si vede chiaro che in tal guisa si rigenera la vescicola oculare primitiva formata da semplice epitelio, e che questo poscia introflettendosi per la pressione esercitata dal di fuori dal tessuto mucoso che progressivamente sviluppasi, viene a formarsi la vescicola oculare secondaria, quella precisamente da cui, per moltiplicazione e successive modificazioni delle sue cellule, trae origine la nuova retina. Posto ciò — poiché non parmi debba più rimaner dubbio sull'esattezza dei fatti osservati durante il processo rigenerativo dell' occhio — é chiaro non esservi alcuna sostanziale differenza, anzi la più grande analogia fra lo sviluppo embrionale ed il rigenerativo della retina.

Riguardo all' origine del cristallino rigenerato, infine, vi ha molta differenza da quello che osservasi nello sviluppo embrionale; imperocché fra l' epitelio retinico, o se anche si volesse dire di rivestimento dell' iride, da cui quello ha origine, e l' epiblasto dal quale embriologicamente nasce, non é cosí facile trovare analogia diretta, ma una sola remota nella provenienza del primo dal secondo. Questa, apparentemente strana, origine del cristallino, veduta fin delle prime osservazioni microscopiche in questo studio sperimentale, fu causa per cui dovetti ripetere altri esperimenti, e moltiplicare le preparazioni, colla speranza di potere nell' una o nell' altra trovare qualche traccia di cellule per la quale mi fosse stato possibile di collegare il primo abbozzo del cristallino allo sviluppo dell' epitelio corneale. Ció non mi é mai riescito di vedere, ed invece sempre più mi andai confermando che l' origine sua é dall' epitelio che riveste la faccia interna dell' iride rigenerato, e ch' é in diretta continuazione con quello della retina; ed ho potuto stabilire — mercé gli esperimenti nei quali avevo asportato gran parte del globo oculare — che la prima apparizione della massa cellulare, da cui sviluppare doveasi il cristallino, non avveniva se prima non si fosse rigenerata quella parte anteriore della coroide, formati pure i processi ciliari e l' iride, e tracciato cosí nella massa di tessuto mucoso il limite fra la camera anteriore e posteriore dell' occhio. Di questo fatto non so trovare la ragione in altro — come ho detto — che nella identità primitiva embrionale dell' epitelio corneale e del retinico, per la quale trovisi possibile in quest' ultimo l' origine del cristallino rigenerato.

Da quanto ho sopra riferito d' avere osservato, circa la partecipazione del nervo ottico al processo rigenerativo dell' occhio, mi par bene fare alcuna riflessione circa la rigenerazione di esso nervo.

Dopo che il *Waller* stabiliva un centro trofico per tutt' i nervi, distrutto il quale osservasi la degenerazione delle fibre nervose che li costituiscono, venne ammesso che tal centro pel nervo ottico risiede nella retina. Per queste esperienze fatte nel tritone, parevami dovesse verificarsi tal cosa nella parziale asportazione dell' occhio, perché in essa pel completo

distacco della retina, che è la parte terminale periferica del nervo ottico, di questo non rimane che il moncone centrale, il quale dovrebbe patire l' atrofia degenerativa, e con tanto maggiore probabilità in quanto che nell' estremità sua compresa nel canale sclerotico-coroideo, nello stato normale sono poco visibili i nuclei delle sue fibre nervose.

Ho detto fin dal principio di questo scritto che nei tritoni in seguito ad asportazioni parziali degli arti non ebbi ad osservare processi degenerativi negli elementi istologici vicini alla ferita delle parti rimaste, ma sempre e per prima l' attività dei nuclei del connettivo conducente alla divisione e moltiplicazione loro, per la quale, col concorso dei leucociti immigrati, s' iniziava e svolgevasi il processo riproduttivo. Per nulla diversi sono stati i fatti osservati nel moncone del nervo ottico, in cui nessun processo degenerativo ho riscontrato, ma sempre moltiplicazione nucleare fra le fibre ed avanzamento del tessuto embrionale nel cavo del bulbo fino alla parte anteriore di esso, dove quello mettevasi in rapporto di continuità o cogli elementi superficiali e profondi proliferanti, della vecchia retina nei casi in cui una parte di questa era rimasta impegnata nell' apertura oculare, o con quelli derivati dall' epitelio retinico quando la retina tutta era stata tolta dall' occhio. In entrambi i casi non mi pare che si possa in maniera alcuna considerare la retina come centro trofico del nervo ottico; poichè nel secondo essa non esisteva più, e quindi nel nervo ottico non avrebbe dovuto manifestarsi neoformazione alcuna; e nel primo, ben esistendo fatti di moltiplicazione cellulare nella parte di retina rimasta, questa non ha potuto spiegare influenza alcuna su quella dei nuclei del nervo ottico dai quali s' iniziò contemporaneamente la neoformazione rigenerativa.

Che la retina non sia un centro trofico è provato pure dal fatto della degenerazione e dell' atrofia degli elementi del suo strato granuloso, conseguente al suo distacco dalla coroide, e per conseguenza che nei casi di recisione del nervo ottico tocca ad essa la stessa sorte degli apparecchi nervosi terminali dopo il taglio delle rispettive fibre. Invece, che il centro trofico del nervo ottico — nei tritoni — trovasi nel cervello vien dimostrato dal fatto della proliferazione, che ho costantemente osservata negli elementi gangliari del prolungamento nel nervo della sostanza grigia del cervello e che si estendeva fino all' origine del canale intranervoso dalla cavità ventricolare. Non dissimili sono stati i fatti proliferativi osservati nel moncone del nervo ottico in seguito alla totale asportazione dell' occhio, per cui la parte rigenerata di quello si prolungava nel nuovo tessuto occupante la cavità orbitaria. Parmi quindi potersi ritenere come assodato che gli elementi cellulari del nervo ottico, nel processo rigenerativo dell' occhio nei tritoni, spieghino la loro attività prolifera per influenza ricevuta dal centro trofico che risiede nella sostanza grigia della parte inferiore del cervello medio, là fin dove precisamente si osserva il processo di moltiplicazione cellulare.

Ed ora restringendo in poco tutto quanto ho scritto intorno alle osservazioni fatte in questo studio sperimentale, concluderò:

1° Che l'occhio dei tritoni totalmente asportato non si riproduce.

2° Che nelle parziali asportazioni di esso, siano queste poco o molto estese, purché vi rimanga un quarto almeno delle due membrane più esterne proprie del globo oculare, vicino all'inserzione del nervo ottico, le parti tolte si riproducono costantemente.

3° Che le diverse parti rigenerantisi non traggono la loro origine da un unico tessuto embrionale che si differenzi in ciascuna di esse; ma quelle, di cui è rimasta una porzione, vengono rigenerate in gran parte per proliferazione degli elementi cellulari di questa, e quelle asportate totalmente rinascono e si sviluppano come nello stato embrionale, eccettuato apparentemente il cristallino, e così:

a) La *cornea* parzialmente asportata si rigenera da nuovo tessuto, il quale ha origine dagli elementi cellulari della parte di essa lasciata; e se la cornea è stata tutta asportata con parte di sclerotica, il tessuto che le riproduce nasce dai lembi di questa solo in piccola parte, e pel resto dal connettivo peri-scleroticale e dai leucociti emigrati specialmente dai vasi coroidei. L'epitelio che riveste la nuova cornea proviene dal vecchio rimasto o da quello della congiuntiva palpebrale.

b) La *coroide* si riproduce per neoformazione vascolare dai margini della parte lasciata, alla quale neoformazione partecipano i vasi periscleroticali. Col progredire di questa e depositandosi gradatamente il pigmento, si rigenerano i processi ciliari, il canale di *Schlemm* e l'iride.

c) Alla rigenerazione della *retina* concorrono l'epitelio retinico rimasto aderente alla coroide e il moncone del nervo ottico. Gli elementi del primo proliferano anteriormente sul margine della coroide tagliata, formando un cercine cellulare che successivamente viene disteso e spinto alla periferia interna del bulbo, e posteriormente sul fondo di questo donde i nuovi elementi entrano a far parte di un tessuto neoformato proveniente dal nervo ottico, il quale, elevandosi in forma di colonna, va ad unirsi al cercine cellulare suddetto. La vescica, risultante dal distendersi che fa la massa cellulare del cercine per la penetrazione in esso di tessuto mucoso proveniente da quello della nuova cornea, si adagia gradatamente sulla interna superficie della coroide, dove i suoi elementi confondendosi con quelli derivati dall'epitelio delle parti laterali di questa, formano ivi uno strato cellulare tutto continuo. Da esso vien rigenerata la retina, di cui si differenziano a poco a poco i vari strati per le seguenti modificazioni: 1° le cellule più profonde divengono allungate, poscia si scindono ciascuna in due, delle quali una diviene cellula epiteliale e l'altra si trasforma in *bacillo*; 2° le cellule piriformi divengono *coni*; appare poscia la *limitante*

esterna formata dai prolungamenti fibrillari degli elementi connettivi esistenti nella massa cellulare; 4° in un periodo avanzato dello sviluppo dei bacilli, in cui i loro segmenti esterni sono ben differenziati, si mostra il limite fra i coni e lo strato granuloso, formato da un piano di fibrille nervee, corrispondente al molecolare esterno ed è in diretto rapporto col segmento interno dei bacilli; 5° in questa fase di sviluppo si forma pure lo strato molecolare interno, per cui resta distinto l' unico strato granuloso da quello delle cellule superficiali, e 6° finalmente, questi ultimi elementi ingrossandosi divengono cellule nervose da cui partono le fibre dirette verso il fondo dell' occhio, dove si continuano con quelle del nervo ottico, e formano lo strato più superficiale della retina, al quale in ultimo si sovrappone la limitante interna derivata anch' essa dagli elementi connettivi.

d) Il *cristallino* trae la sua origine dall'epitelio che riveste la faccia interna del margine pupillare rigenerato, dalla parte superiore del quale si sviluppa un corpicciuolo che presto diviene peduncolato e rivolgesi verso la cavità dell' occhio. Dapprima esso è costituito da una massa di cellule a limiti indistinti, da figurare come una cellula gigante; poi vi si distingue un nucleo di cellule poliedriche chiuso da fibre stratificate alle quali è addossata la capsula. Continuando l' accrescimento, il cristallino rigenerato chiude perfettamente il foro pupillare, restando unito al margine dell' iride per semplice adesione epiteliale, e tenuto in posto dall' umor vitreo.

e) Appena stabilito il normale rapporto fra iride e cristallino, per la fusione del tessuto mucoso esistente fra la cornea e l' iride si forma la camera anteriore, restandovi la membrana di *Descemet* e la membrana pupillare.

4° Che reali e notevoli differenze fra lo sviluppo normale ed il processo rigenerativo delle parti dell'occhio totalmente asportate non esistono; e per quello che può sembrare strano circa l' origine e lo sviluppo della nuova retina, è a tenersi in considerazione che l' epitelio retinico proliferando, col completarsi della coroide, rigenera una vescica perfettamente analoga alla vescica oculare primitiva, la quale introflettendosi forma la cupola, o vescica oculare secondaria, onde viene rigenerata la retina. Per l' origine poi del cristallino riprodotto, dall' epitelio retinico, puossi trovare l' analogia collo sviluppo normale, nella comune provenienza embrionica, di questo epitelio e del cristallino, dall' epiblasto.

ERRATA-CORRIGE

pagina	595	*riga*	33	più di reticolo,	*leggi*	più di fino reticolo,
»	606	»	37	alle linee di curvature	»	alla linea di curvatura
»	618	»	18	cristallino, *e*, rappresenta	»	cristallino, e rappresenta
»	622	»	16	il tessuto che le	»	il tessuto che la
»	id.	»	41	*coni;* appare	»	*coni;* 3° appare

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

TAVOLA I.

Fig. 1.ª — Mostra una sezione intera di occhio di tritone, eseguita nel piano meridiano e diretta dall'alto al basso. Ingrand. 27 v.

c Cornea trasparente.
d Epitelio della cornea.
e Membrana di *Descemet.*
s Sclerotica.
f Coroide.
g Retina. Strato dei bastoncelli e dei coni.
h » » fibrillare o molecolare esterno.
i » » granuloso.
l » » molecolare interno.
m » » delle cellule nervose.
n » Papilla del nervo ottico.
o Nervo ottico.
p Canale di *Fontana* o di *Schlemm.*
q Anello connettivale occupante la periferia della camera anteriore.
r Epitelio della congiuntiva.
s' Palpebra inferiore.
t » superiore.
u Processi ciliari.
g' Rigonfiamento del margine pupillare dell' iride.
p' Cristallino.

Fig. 2.ª — Sezione perpendicolare della retina in vicinanza della papilla ottica. Ingrand. 300 v.

a Membrana limitante esterna.
b Bastoncelli. Segmento esterno.
c » » interno.

c' Nuclei o granuli dei bastoncelli.
d Coni.
d' Nuclei o granuli dei coni.
e Strato fibrillare o molecolare esterno.
f » granuloso.
g Elementi di tessuto connettivo.
h Strato molecolare interno.
i » delle cellule nervose.
l » delle fibre nervose.
m Limitante interna.

Fig. 2.ª bis — Mostra una parte della figura precedente ingrandita 600 v. Le lettere si corrispondono.

Fig. 3.ª — Mostra una sezione perpendicolare trasversa della parte inferiore del cervello medio, compresovi il nervo ottico in sezione longitudinale, e del foro orbitario. Ingrand. 52 v.

a Fibre della radice inferiore del nervo ottico.
b » » superiore o laterale »
c Canale che parte dalla cavità ventricolare del cervello medio e si prolunga nell' interno del nervo ottico.
d Strato di cellule gangliari che circonda il suddetto canale, e si prolunga più avanti nel nervo.
e Porzione di nervo ottico in cui sono poco discernibili le fibre ed ha una apparenza molto simile a quella della sostanza bianca del cervello.
ff Sezioni dell' osso che limita il foro orbitario.
g Meningi.
i Sostanza grigia del cervello.

Fig. 4.ª — Parte di sezione di occhio operato di parziale asportazione da 5 giorni. Ingrand. 100 v.

c Porzione di vecchia retina rimasta impegnata fra i margini della ferita della cornea.
b Cono cellulare sviluppatosi per proliferazione degli elementi superficiali e profondi della retina, e che prolungandosi in dentro, va ad incontrare il
a Cilindro cellulare derivato dal moncone del nervo ottico.
d Vasi ectasici della coroide.
e Sclerotica.

Fig. 5.ª — È ritratta in questa figura una sezione meridiana dell' occhio di un giovane tritone, operato di parziale asportazione da 14 giorni. Ingrand. 62 v.

e Sclerotica.
b Margine ingrossato della ferita in essa praticata per l'asportazione.
ii' Sezioni trasverse del cercine cellulare sviluppatosi su tutto il margine interno del lembo della coroide.
d Tessuto mucoso, che, insinuatosi dentro il cercine, ha disteso la massa cellulare in modo che, in sezione trasversa, si ha l'apparenza di due vesciche.
h Nervo ottico.
a Cilindro cellulare neoformato che stabilisce il rapporto di continuità fra il moncone del nervo ottico e il cercine *ii'*. Deriva dalla proliferazione degli elementi cellulari del nervo ottico e di quelli dell'epitelio retinico del fondo del bulbo.
n Epitelio della congiuntiva palpebrale.
o Tessuto connettivo sotto-congiuntivale, i cui elementi proliferanti penetrano nel bulbo oculare per l'apertura rimasta fra i lembi della coroide.
f Vasi sanguigni ectasici della coroide.
g Masse pigmentarie staccatesi dalla coroide.

Fig. 6.ª — Sezione meridiana di occhio operato da 29 giorni. Ingrand. 62 v.

e Sclerotica.
b Margine della ferita in essa praticata.
a » » della cornea ingrossato.
c Tessuto connettivo neoformato che riunisce i lembi della ferita corneo-scleroticale.
n Epitelio rigenerato della congiuntiva palpebrale e della cornea.
i Rivestimento cellulare derivato da proliferazione dell' epitelio retinico del lembo coroideo. Gli elementi profondi hanno assunta la forma cilindrica.
t Epitelio cilindrico che forma lo strato superficiale della parte anteriore del rivestimento cellulare.
h Nervo ottico.
d Tessuto mucoso proveniente dal connettivo che riunisce i margini della ferita corneo-scleroticale.
g Massa cellulare derivata dall' epitelio retinico per la rigenerazione del cristallino.
f Vasi coroidei ectasici.
m Masse pigmentarie sparse per la lacerazione ivi avvenuta della coroide.

Fig. 7.ª — Parte anteriore di una sezione meridiana di occhio, col cristallino compiutamente formato. Ingrand. 62 v.

a Epitelio della cornea.
b Cornea trasparente.
c Zona di connettivo alla periferia della camera anteriore.
d Membrana di *Descemet.*
e » pupillare.
f Tessuto del vitreo.
g Cristallino.
i Limite della capsula.
l Coroide.
l' Parte ciliare della retina
m Canale di *Schlemm.*
n Epitelio congiuntivale della palpebra superiore.

Fig. 8.ª — Parte di sezione di occhio operato da 63 giorni, per mostrare il progressivo sviluppo della retina nel fondo del bulbo, e il differenziamento dei suoi diversi strati. Ingrand. 130 v.

a Epitelio retinico neoformato.
c Strato dei bastoncelli.
d » dei coni.
e » fibrillare o molecolare esterno.
f » granuloso.
g » molecolare interno.
i » delle cellule gangliari.
i' Massa di cellule in cui non è ancora apparso lo strato molecolare per distinguere lo strato granuloso da quello delle cellule nervose.
v Vasi ectasici della coroide.

Fig. 9.ª — Sezione perpendicolare di nuova retina che mostra il differenziarsi dei suoi elementi. Ingrand. 330 v.

a Strato del nuovo epitelio retinico.
b, c Cellule fusate che diverranno bastoncelli.
d Cellule da cui deriveranno i coni.
e Elementi dello strato granuloso.
f Elementi connettivi.
g Lamina connettivale della coroide.

Fig. 10.ª — Mostra una fase avanzata dello sviluppo della retina rigenerata di cui manca lo strato epiteliale. Ingrand. 420 v.

a Segmento esterno dei bastoncelli.
b » interno »
c Strato dei coni.

d Strato fibrillare o molecolare esterno in diretto rapporto col segmento interno dei bastoncelli.

e Limitante esterna, derivata dagli

f Elementi connettivi.

g Strato granuloso.

i » molecolare interno.

l » delle cellule nervose.

m » delle fibre nervose.

TAVOLA II.

Fig. 1.ª — Mostra lo sviluppo dei nuovi vasi coroidei. Cinque giorni dopo l' operazione. Ingrand. 175 v.

e Lembo della sclerotica tagliata.

v Vaso nuovo proveniente dal

ve Vaso ectasico della coroide.

v' Vaso neoformato, esteso nel tessuto perisclerotícale *o*.

a Tessuto cellulare giovane, sul quale poscia si adatta la

f Parte anteriore della coroide distaccata.

c Nuovo tessuto connettivo che ristabilisce la continuità fra i lembi della sclerotica.

n Epitelio della congiuntiva palpebrale, dal quale nasce quello che ripiegasi sulla nuova sclerotica.

Fig. 2.ª — Mostra ad un forte ingrandimento la neoformazione proveniente dal nervo ottico e dall' epitelio del fondo del bulbo. Ingrand. 250 v.

a Cilindro cellulare dagli elementi proliferanti del nervo ottico.

e Epitelio retinico i cui elementi concorrono alla formazione del cilindro.

n Nervo ottico.

Fig. 3.ª — Sezione meridiana di occhio operato di parziale asportazione da 26 giorni. Ingrand. 62 v.

e Sclerotica.

bb Margini della ferita praticata.

c Tessuto connettivo-fibroso neoformato che ristabilisce la continuità fra i lembi della sclerotica, e da cui dovrassi rigenerare la parte di questa mancante e tutta la cornea.

o Tessuto connettivo delle palpebre.

f' Parte di coroide in via di rigenerazione.

l Piega della sclerotica e coroide formatasi per l'afflosciamento del bulbo dopo essere stato svuotato del suo contenuto.

f Vasi ectasici della coroide.

i Alto rivestimento cellulare della interna superficie del bulbo, costituito dagli avanzi della vecchia retina, e dai nuovi elementi derivati dall' epitelio retinico.

h Nervo ottico ricco di elementi cellulari che si confondono con quelli nell' interno del bulbo.

d Tessuto mucoso.

g Masse pigmentarie sparse.

Fig. 4.ª — Sezione perpendicolare della porzione di vecchia retina che ha patito la degenerazione ed atrofia dei suoi elementi, ed è progredito lo sviluppo dei nuovi. Ingrand. 350 v.

a Elementi cellulari atrofici della vecchia retina.

s Elementi cellulari nuovi provenienti dalla proliferazione delle cellule gangliari.

r Avanzi dello stroma fibrillare della vecchia retina.

e Cellule neoformate dall' epitelio retinico.

c Coroide.

Fig. 5.ª — Destinata a mostrare una fase più avanzata nello sviluppo del cristallino di quella rappresentata nella fig. 6 della Tavola I.ª

a Massa cellulare senza limiti distinti, dalla quale si svilupperà la lente propriamente detta.

b Idem per lo sviluppo della capsula.

c Spazio vuoto che distingue l'una dall'altra.

d Tessuto mucoso occupante la cavità bulbare.

e Epitelio proliferante del margine dell' iride.

f Epitelio cilindrico neoformato.

Fig. 6.ª — Mostra lo sviluppo ancor più avanzato del cristallino. Ingr. 220 v.

a La lente, costituita da un nucleo di cellule epiteliali poliedriche coperto da altre in via di trasformarsi in fibre proprie.

b Capsula della lente.

c Spazio che divide la lente dalla capsula.

d Ricettacolo che il tessuto mucoso ha formato al cristallino (Jaloidea).

e Peduncolo pel quale la lente è ancora attaccata all' iride.

f Margine opposto dell' iride.

Fig. 4
b
c
a
d
e
c
b
e c d
s'
r
b
c
d
a
c'
d'
e
f
c
n
l
g
Fig. 8.
i
g
f
e
i'
d
c
a
c
l
b
g
f
i
d
e
f
V. Colucci dis.
Lit. G. Wenk e Figli Bologna

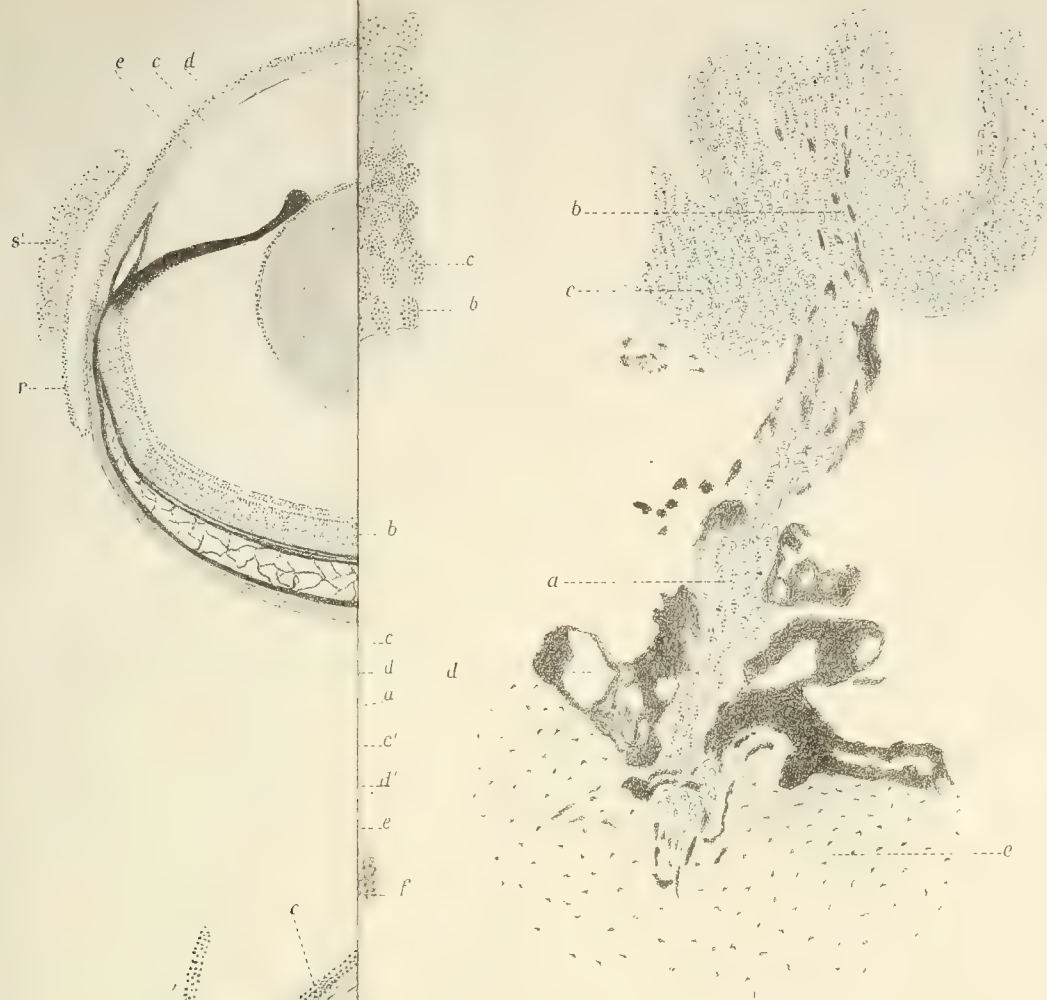
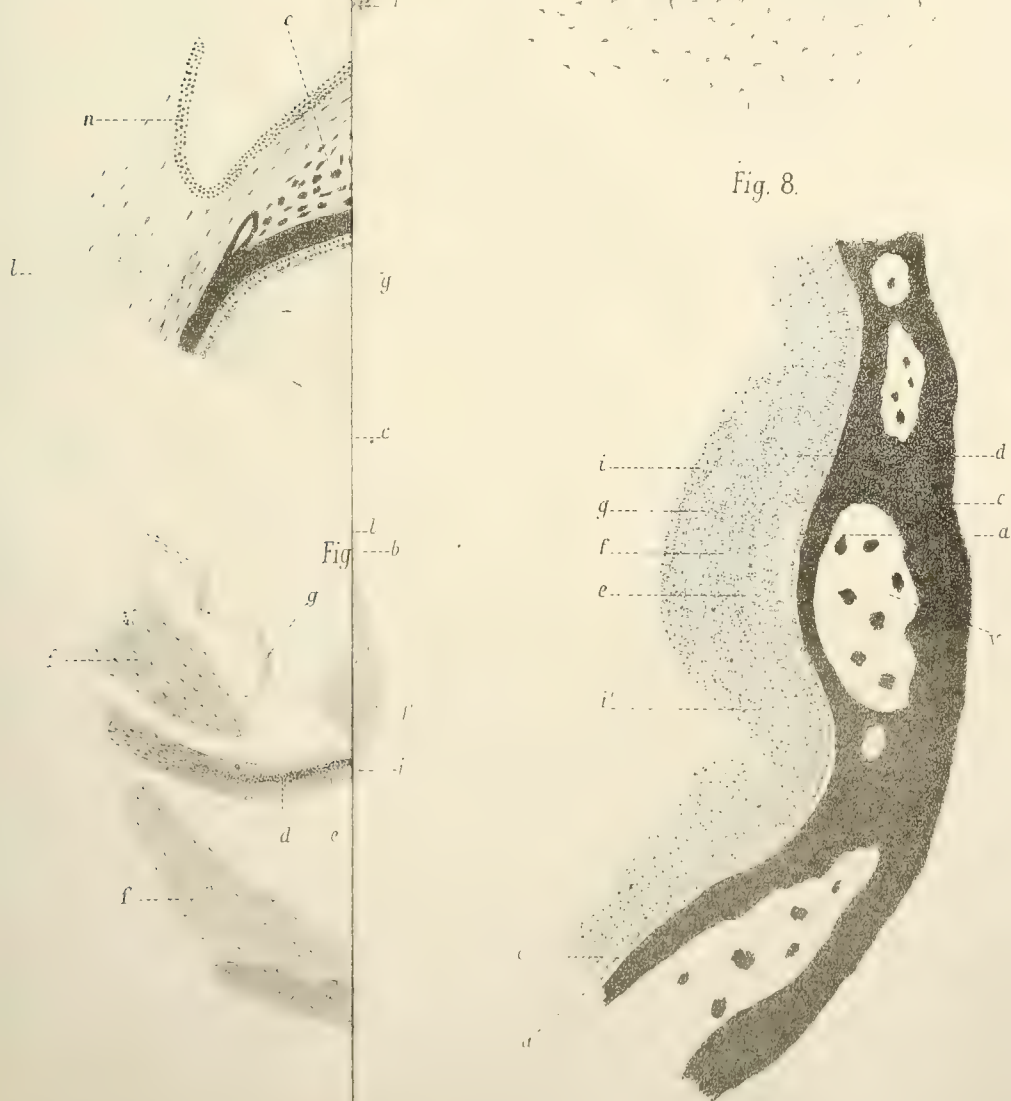
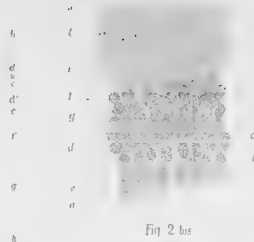
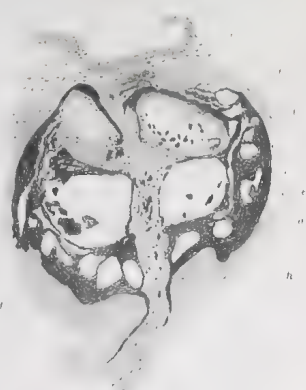



Fig 1
Fig 5
Fig 2
Fig 4
Fig 2 bis
Fig 7
Fig 6
Fig 8
Fig 3
Fig 9

Fig. 3.

n
o
b
f'
g
d
i
e
f
h

Fig. 5.

b
c
a
e
f
f

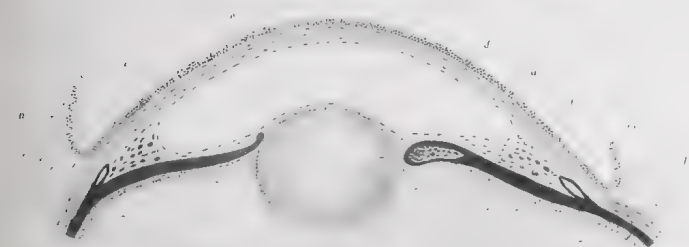
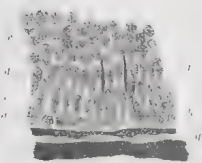
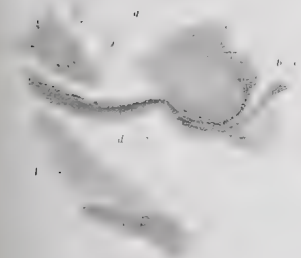
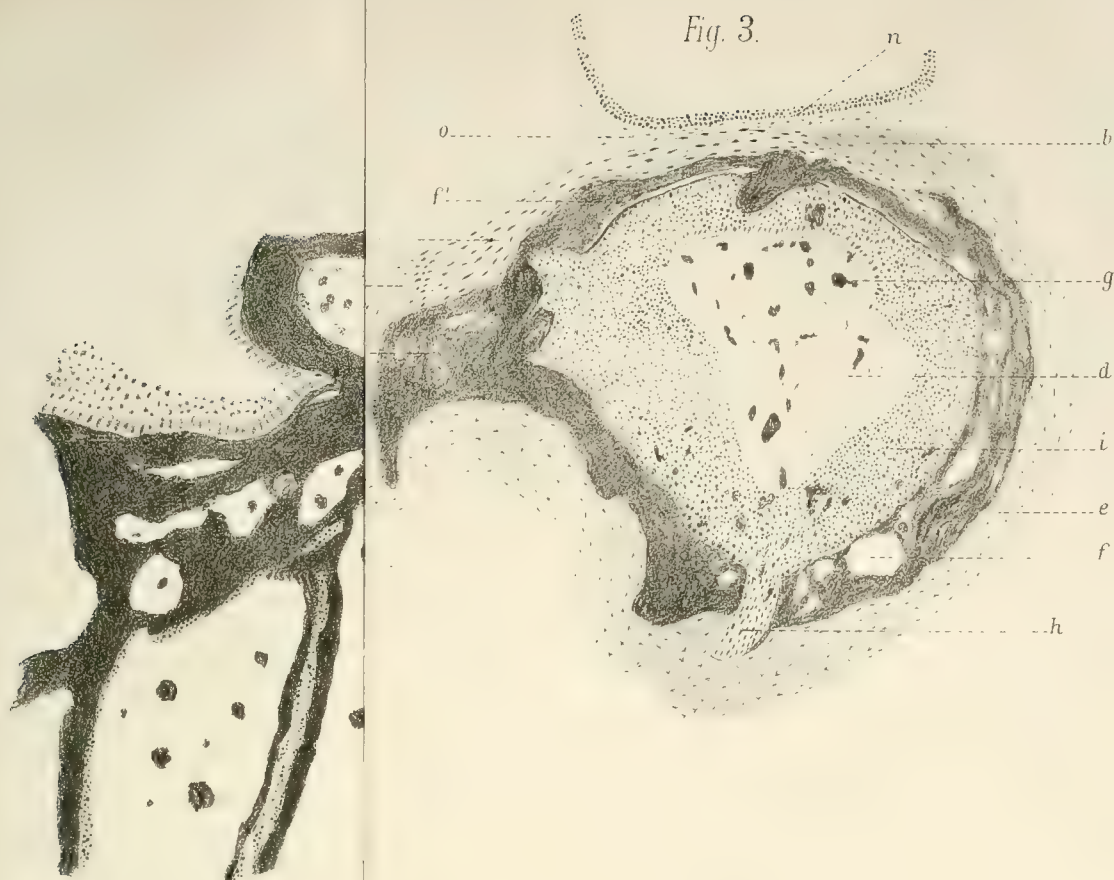
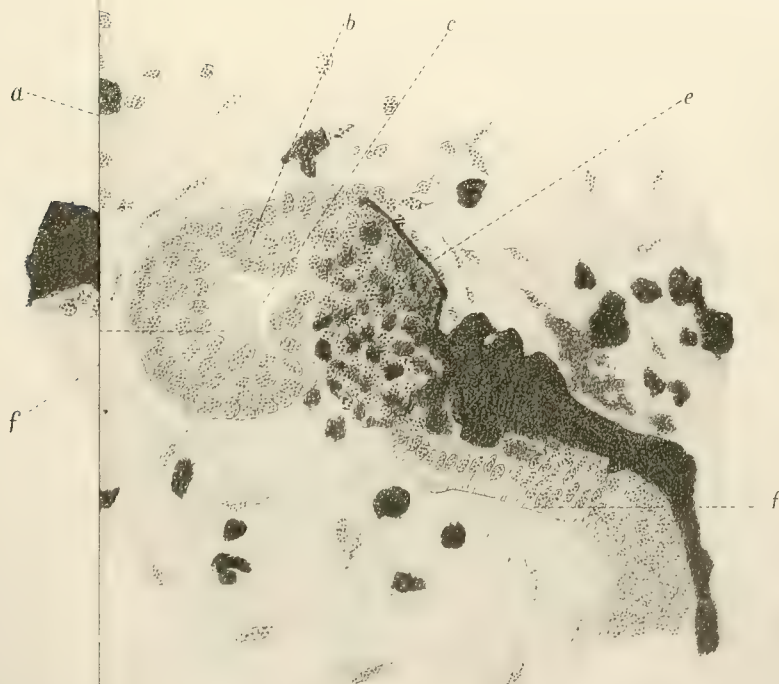
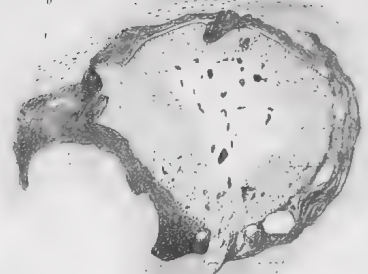
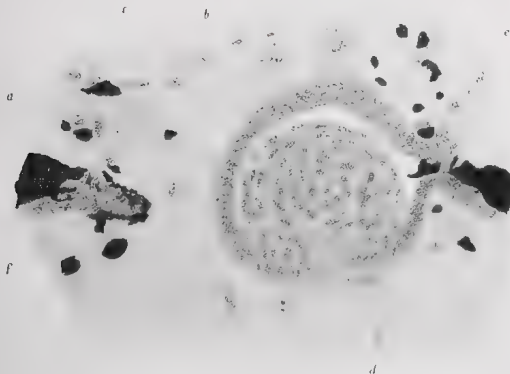
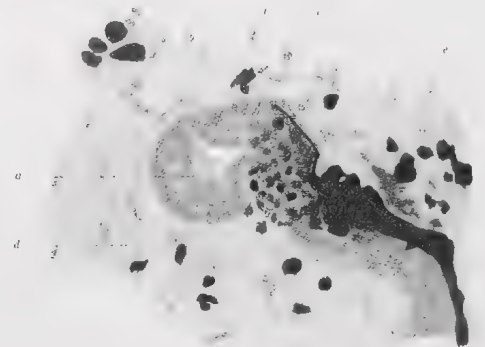



Fig 1
Fig 4
Fig 3
Fig 2
Fig 6
Fig 5

SULLE LINEE DI STRINGIMENTO E DI ALLARGAMENTO

DI UN SISTEMA DI CURVE QUALUNQUE

MEMORIA

DEL

PROF. GEMINIANO PIRONDINI

(Letta nella Sessione del 22 Febbraio 1891).

Il presente lavoro mi è stato suggerito dallo studio di una brevissima Nota dell'illustre Prof. Brioschi, intitolata: *sulla linea di stringimento di un sistema di linee a doppia curvatura* pubblicata l'anno 1857 nel tomo IX° del *Giornale dell'I. R. Istituto lombardo di scienze e lettere.*

In essa l'illustre Autore si occupa non tanto delle proprietà della linea in discorso quanto più specialmente *di alcune rimarchevoli trasformazioni che ammette la sua equazione caratteristica, le quali possono tornare di vantaggio tanto nella ricerca delle proprietà generali di essa linea, quanto per individuarla nei casi particolari.* Uno studio alquanto particolareggiato di tale argomento mi ha condotto a un'esposizione abbastanza completa delle numerose proprietà delle linee notevoli in discorso e di altre che io chiamo *di allargamento*, proprietà che io ritengo in massima parte nuove; stimo quindi non del tutto inutile il riunirle nella presente memoria, che ho l'onore di sottoporre all'esame di codesta illustre Accademia.

I.

Il quadrato dell'elemento lineare di una superficie, riferita a due sistemi di linee coordinate $u =$ cost., $v =$ cost. si può mettere sotto la forma: $dS^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, in cui:

$$E = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \quad F = \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad G = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,$$

essendo x, y, z le coordinate di un suo punto qualunque. Siano A, B due punti consecutivi di una linea $u = \text{cost.}$ e AC la porzione della trajettoria ortogonale alle $v = \text{cost.}$ passante per A, compresa fra le due linee consecutive del sistema $v = \text{cost.}$ che passano per A e B; avremo:

$$AB = ds_u = \sqrt{G} \cdot dv, \quad \text{sen}(\widehat{ABC}) = \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}}$$

e quindi

$$AC = \sqrt{\frac{EG - F^2}{E}} \cdot dv.$$

Se la quantità AC non è costante lungo ciascuna linea $v = \text{cost.}$, ammette ordinariamente dei punti di minimo $m, n \ldots.$ ed altri di massimo $M, N, \ldots.$, in numero finito o infinito, sopra ciascuna delle linee v; e ciascuno di questi punti $m, n, \ldots., M, N, \ldots.$, nel passaggio da una all'altra delle linee $v = \text{cost.}$, si muove ordinariamente con continuità e genera quindi una linea tracciata sopra la superficie.

Le linee descritte dai punti $m, n, \ldots.$ e quelle descritte dai punti $M, N, \ldots.$ si chiameranno rispettivamente *curve di stringimento* e *curve di allargamento* del sistema di linee $v = \text{cost.}$

Se ds_v è l'arco elementare delle linee $v = \text{cost.}$, nei punti in cui AC è massima o minima si deve avere:

$$\frac{d}{ds_v}\left(\sqrt{\frac{EG - F^2}{E}} \cdot dv\right) = 0;$$

e poichè $ds_v = \sqrt{E} \cdot du$ e la quantità dv è indipendente da u, la condizione precedente equivale all'altra:

$$\frac{d}{du}\left(\frac{EG - F^2}{E}\right) = 0$$

la quale, sviluppati i calcoli, diviene:

$$E^2 \frac{\partial G}{\partial u} - 2EF \frac{\partial F}{\partial u} + F^2 \frac{\partial E}{\partial u} = 0. \tag{1}$$

Se poi AC è costante lungo ciascuna delle linee v, si ha:

$$\frac{EG - F^2}{E} = \text{funzione di } v$$

e la condizione (1) è allora identicamente soddisfatta; in questo caso le linee $v=$ cost. sono geodeticamente parallele. Abbiamo dunque il teorema *se sopra una superficie* S *qualunque,* u $=$ *cost.*, v $=$ *cost. sono due sistemi di linee soggetti alla sola condizione che per essi la* (1) *non si riduca a una identità, le linee di stringimento e di allargamento del sistema di curve* v $=$ *cost. non possono essere che fra quelle lungo le quali è soddisfatta l'equazione* (1).

Fra le linee però lungo le quali è verificata la (1) si può asserire *con certezza* che sono di stringimento o di allargamento pel sistema v solamente quelle lungo le quali la quantità:

$$\frac{d^2}{du^2}\left(\frac{EG-F^2}{E}\right)$$

o l'altra:

$$E^2\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}-2EF\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+F^2\frac{\partial^2 E}{\partial u^2}+2E\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u}-2E\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2 \tag{2}$$

(che si ottiene moltiplicando la prima pel fattore positivo E^2) è rispettivamente positiva o negativa; per le linee (1) lungo le quali la quantità precedente è nulla si ha dunque incertezza e questa non si può togliere che esaminando come si comportano lungo quelle linee le derivate rapporto a u d'ordine superiore della quantità $\frac{EG-F^2}{E}$. In generale, se lungo una linea L sono zero le derivate successive:

$$\frac{d}{du}\left(\frac{EG-F^2}{E}\right),\quad \frac{d^2}{du^2}\left(\frac{EG-F^2}{E}\right),\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}}\left(\frac{EG-F^2}{E}\right)$$

e si trova che la prima derivata che lungo L non è zero è:

$$\frac{d^n}{du^n}\left(\frac{EG-F^2}{E}\right),$$

si ha che la linea L non è di stringimento nè di allargamento quando n è dispari; è una linea di stringimento o di allargamento quando, essendo n pari, la predetta derivata n^{ma} è, lungo la linea L, rispettivamente positiva o negativa.

Se poi si osserva che il raggio di curvatura geodetica R_t delle trajettorie ortogonali delle linee $v=$ cost. è dato dall'equazione:

$$\frac{1}{R_t}=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{EG-F^2}{E}}\right),$$

si può dire: *le linee di stringimento o di allargamento di un sistema di curve qualunque* v *tracciate sopra una superficie non possono trovarsi che fra i luoghi dei punti nei quali le trajettorie ortogonali di quelle linee hanno curvatura geodetica nulla.*

II.

Applicazione — Consideriamo la superficie luogo delle circonferenze descritte con raggio arbitrario R attorno ai punti di una linea qualunque L e nei piani normali di essa.

In un punto qualunque Ω di L si prenda per assi di riferimento $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$, la tangente, la normale principale e la binormale di L; le coordinate di un punto qualunque della circonferenza generatrice saranno:

$$\xi = 0\,, \quad \eta = R \cos u\,, \quad \zeta = R \operatorname{sen} u\,,$$

essendo u l'angolo variabile che un raggio qualunque del cerchio forma colla normale principale di L.

Indicando quindi con x, y, z le coordinate di Ω rispetto agli assi fissi; con $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $(\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$, $(\cos l, \cos m, \cos n)$ i coseni direttivi della tangente, della normale principale e della binormale di L; con ρ, r, v il raggio di curvatura, quello di torsione e l'arco di detta linea e con X, Y, Z le coordinate di un punto qualunque della superficie generata, si avrà:

$$X = x + R(\cos\lambda \cos u + \cos l \operatorname{sen} u)\,, \quad \text{ecc.}$$

Derivando queste equazioni rapporto ad u e v, ed osservando che R è funzione solamente di v, si ottiene:

$$E = R^2, \quad F = -\frac{R^2}{r}, \quad G = \frac{R^2}{r^2} + \left(\frac{dR}{dv}\right)^2 + \left(1 - \frac{R}{\rho} \cos u\right)^2$$

e la (1) diviene:

$$2\frac{R^5}{\rho}\left(1 - \frac{R}{\rho} \cos u\right) \cdot \operatorname{sen} u = 0\,.$$

Escludendo i casi $R = 0$, $\frac{1}{\rho} = 0$, nei quali la superficie si riduce rispettivamente a una linea e a una superficie di rivoluzione, l'equazione

scritta ammette le tre seguenti soluzioni:

$$1-\frac{R}{\rho}\cos u=0\,; \quad u=0\,; \quad u=\pi$$

1ª). Dalla prima delle precedenti equazioni ricavandosi:

$$\cos u=\frac{\rho}{R}\,,$$

si deduce che la linea in discorso, che chiameremo M, è reale solamente quando:

$$R\geq\rho\,.$$

Ciò posto, osservando che in questo caso:

$$\frac{\partial E}{\partial u}=\frac{\partial F}{\partial u}=\frac{\partial^2 E}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}=0\,,$$

la quantità (2) diviene:

$$\frac{2R^3}{\rho}\left\{\frac{R}{\rho}\operatorname{sen}^2 u+\left(1-\frac{R}{\rho}\cos u\right)\cos u\right\};$$

e poichè il fattore $\frac{2R^3}{\rho}$ è essenzialmente positivo, la quantità scritta e il fattore:

$$(3)\qquad \frac{R}{\rho}\operatorname{sen}^2 u+\left(1-\frac{R}{\rho}\cos u\right)\cos u$$

hanno il medesimo segno. E poichè in questo caso:

$$\cos u=\frac{\rho}{R}\,, \quad \operatorname{sen} u=\frac{\sqrt{R^2-\rho^2}}{R}\,,$$

l'espressione (3) si riduce all'altra:

$$\frac{R^2-\rho^2}{R\rho}$$

la quale, stante la condizione già ammessa $R\geq\rho$, non può essere che positiva o nulla, nel primo caso M è una linea di stringimento e nel secondo vi e incertezza.

Esaminate allora le quantità:

$$\frac{4R}{\rho}\operatorname{sen} u \cos u - \operatorname{sen} u\ ; \quad \frac{4R}{\rho}\cos^2 u - 4\frac{R}{\rho}\operatorname{sen}^2 u - \cos u$$

le quali si ottengono rispettivamente dalla derivata terza e quarta rapporto a u delle quantità $\frac{EG - F^2}{E}$ moltiplicandole per un fattore essenzialmente positivo, si riscontra che, per essere ora $R = \rho$, lungo la linea M esse divengono rispettivamente 0 e 3. Quindi, anche nel caso di $R = \rho$, la linea M è di stringimento.

2ª) Sia N la linea corrispondente alla soluzione $u = 0$; siccome in questo caso la (3) diviene:

$$1 - \frac{R}{\rho},$$

si deduce che la linea N è di stringimento quando $R < \rho$ e di allargamento quando $R > \rho$.

Vi è incertezza quando $R = \rho$; ma in questo caso la derivata terza della quantità $\frac{EG - F^2}{E}$ annullandosi lungo N e la derivata quarta assumendo (ora che $R = \rho$), un valore positivo, si conclude che anche nel caso $R = \rho$ la linea N è di stringimento.

3) Chiamando P la linea rappresentata dall'equazione $u = \pi$, l'espressione (3) diviene:

$$-\left(1 + \frac{R}{\rho}\right)$$

la quale, essendo R e ρ essenzialmente positivi, è sempre negativa; dunque la P è sempre una linea di allargamento.

Dunque *sulla superficie luogo delle circonferenze descritte con raggio variabile* R *attorno ai vari punti di una linea qualunque* L *e nei piani normali di essa, vi sono al massimo quattro linee le quali possono essere di stringimento o di allargamento rispetto al sistema dei cerchi. Esse sono: le due linee* M *luoghi dei punti dove le circonferenze incontrano le rette polari di* L, *la linea* N *luogo dei punti dove le circonferenze incontrano i raggi di curvatura di* L *e la linea* P *luogo dei punti dove le circonferenze incontrano i prolungamenti dei raggi di curvutura di* L.

Quando $R > \rho$, *le due linee* M *sono di stringimento e le due* N, P *sono di allargamento; quando* $R = \rho$ *le due linee* M *e la* N *conincidono in una sola linea di stringimento e* P *è una linea di allargamento, quando* $R < \rho$

le due linee M *sono immaginarie, la* N *è una linea di stringimento e la* P *di allargamento.*

Da questo teorema si rileva che, rispetto a un determinato sistema di linee, una data curva puó essere per un certo tratto linea di stringimento e per un altro tratto linea di allargamento; ció accade ad es. per la linea N la quale, rispetto al sistema di cerchi, é di allargamento quando $R > \rho$ ed é di stringimento quando $R \leq \rho$.

III.

Essendo dato sopra una superficie qualunque S un sistema di linee v arbitrarie, vogliamo determinare sopra S le linee L tali, che le tangenti alle v nei punti dove esse sono incontrate da ciascuna delle L formino delle superficie rigate Σ aventi le L per linee di stringimento.

Se x, y, z sono le coordinate di un punto qualunque di S ed X, Y, Z quelle di un punto qualunque di Σ, si ha:

$$X = x + t \cdot \cos \alpha_v, \quad \text{ecc.}$$

essendo $\cos \alpha_v$, $\cos \beta_v$, $\cos \gamma_v$ i coseni direttivi delle tangenti alle $v = \text{cost.}$ e t le porzioni delle generatrici di Σ contate da L.

La condizione esprimente che Σ ha per linea di stringimento L é:

$$\Sigma d \cos \alpha_v \cdot dx = 0$$

cioé:

$$du^2 \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial \cos \alpha_v}{\partial u} + du dv \left(\Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial \cos \alpha_v}{\partial v} + \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial \cos \alpha_v}{\partial u} \right) + dv^2 \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial \cos \alpha_v}{\partial v} = 0 ;$$

applicando quindi note formole della geometria delle superficie, si puó asserire che: *l'equazione differenziale in coordinate* u, v *delle linee* L *domandate é la seguente*

$$(4) \qquad \left(2E \frac{\partial F}{\partial u} - E \frac{\partial E}{\partial v} - F \frac{\partial E}{\partial u} \right) du + \left(E \frac{\partial G}{\partial u} - F \frac{\partial E}{\partial v} \right) dv = 0 .$$

Per l'argomento che ci occupa é di molta utilitá l'equazione (4), nonché quella che ci dá una notevole espressione della curvatura geodetica $\frac{1}{R}$ di una linea qualunque L tracciata sopra una superficie.

Tale equazione, che prendiamo dalla teoria generale delle superficie, è la seguente:

$$(5)\qquad \frac{1}{R}=-\frac{di}{ds}+\frac{\sqrt{E}}{2(EG-F^2)}\left(\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{\partial G}{\partial u}\right)\operatorname{sen} i+$$
$$+\frac{\sqrt{G}}{2(EG-F^2)}\left(\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u}-2\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial E}{\partial v}\right)\operatorname{sen}(\omega-i)$$

nelle quale i è l'angolo che L forme colle linee coordinate $v=\text{cost.}$ e ω l'inclinazione delle linee coordinate.

Se si osserva che nell'equazione (5) le linee coordinate $v=\text{cost.}$ corrispondono al valore $i=0$, si ha che la condizione che le linee coordinate $v=\text{cost.}$ siano geodetiche è equivalente all'altra che risulti $\frac{1}{R}=0$ quando $i=0$; ciò ha luogo sempre e soltanto quando:

$$(6)\qquad F\frac{\partial E}{\partial u}-2E\frac{\partial F}{\partial u}+E\frac{\partial E}{\partial v}=0$$

con che la (1) diviene:

$$(7)\qquad E\frac{\partial G}{\partial u}-F\frac{\partial E}{\partial v}=0\,.$$

Dunque *se lungo una linea tracciata sopra una superficie qualunque sono verificate due delle tre equazioni* (1), (6), (7), *è necessariamente verificata anche la rimanente.*

Se la condizione (6) è soddisfatta identicamente, su tutta la superficie, le $v=\text{cost.}$ sono geodetiche; se invece la (6) non è un identità, rappresenta una linea, e se applichiamo in questo caso quanto si è dimostrato al n.° 1, si ha: *quando le linee coordinate* v $=$ *cost. non sono geodetiche, il verificarsi dell'equazione* (6) *lungo una particolare linea* L *della superficie indica ordinariamente che essa è una curva di stringimento o di allargamento del sistema di linee* t $=$ *cost. traiettorie ortogonali delle linee* v $=$ *cost.*

Quando la (7) è soddisfatta identicamente su tutta la superficie, la (4) si riduce a:

$$\left(2E\frac{\partial F}{\partial u}-E\frac{\partial E}{\partial v}-F\frac{\partial E}{\partial u}\right)du=0\,;$$

ma se escludiamo dalle nostre considerazioni le superficie sviluppabili, il

moltiplicatore di du non può essere zero identicamente, poichè allora (per la nota formula di Liouville che dà la curvatura totale di una superficie) la superficie avrebbe curvatura totale nulla e quindi sarebbe sviluppabile.

Deve dunque essere $du = 0$, cioè $u =$ costante: perciò *il verificarsi identicamente su tutta una superficie non sviluppabile dell'equazione* (7) *indica che le linee coordinate* u = *cost. sono di stringimento per le superficie rigate luoghi delle rette che toccano le* v *lungo le* u.

IV.

Quando una linea L descritta sopra una superficie S è una curva di stringimento o di allargamento di un sistema di linee v e contemporaneamente è la linea di stringimento ordinaria della superficie rigata Σ luogo delle tangenti alle v lungo L, diremo che L è una linea di stringimento o di allargamento *principale* rispetto al sistema di linee v.

La linea L sia una linea di stringimento o di allargamento principale rispetto al sistema di linee t, trajettorie ortogonali delle v; lungo la L deve intanto essere soddisfatta l'equazione (6). Siccome poi L è la linea di stringimento della superficie rigata luogo delle tangenti alle t lungo L, è pure la linea di stringimento della superficie rigata luogo delle tangenti alle linee v trajettorie ortogonali delle t (poichè queste due superficie rigate sono fra loro coniugate); quindi lungo la L è pure soddisfatta la (4), la quale, in causa della (6), si riduce alla (7).

Essendo allora soddisfatta la (6) e la (7), è pure soddisfatta la (1).

Dunque *se una linea* L *sopra una superficie è una curva di stringimento o di allargamento principale rispetto a un sistema di linee non geodetiche,* in generale *è pure una linea di stringimento o di allargamento principale rispetto al sistema formato dalle trajettorie ortogonali delle linee del primo.*

Il teorema enunciato non è applicabile al caso in cui le linee del dato sistema fossero geodetiche, perchè le loro trajettorie ortogonali, essendo geodeticamente parallele, non ammettono alcuna linea di stringimento nè di allargamento.

Si supponga reciprocamente che la L sia una curva di stringimento o di allargamento tanto del sistema di linee $v =$ cost. quanto dell' altro $t =$ cost. di linee ortogonali alle prime; allora lungo la L risulta verificata tanto l'equazione (1) quanto la (6) e conseguentemente anche la (7). — L'equazione (4) è dunque verificata anch'essa lungo la L, il che prova *se una linea* L *è, sopra una superficie qualunque, linea di stringimento o di allargamento di un sistema di linee* v *e del sistema di linee* t, *trajettorie*

ortogonali delle prime, è, rispetto a questi due sistemi di linee, una curva di stringimento o di allargamento principale.

Se le linee $v =$ cost. sono geodetiche della superficie, la condizione (6) è identicamente soddisfatta in tutta la superficie, e quindi anche lungo la linea L di stringimento o di allargamento del dato sistema di linee. Ma lungo tale linea è pure soddisfatta la (1), quindi (per quanto si è dimostrato al n.° 4) sarà pure soddisfatta la (7); ne viene di conseguenza che lungo la linea L è verificata l'equazione (4), il che dimostra che la L è la linea di stringimento ordinaria della superficie rigata luogo delle tangenti alle v lungo L.

Dunque *se un sistema qualunque di geodetiche di una superficie ammette delle linee di stringimento o di allargamento, queste sono, rispetto al sistema stesso, linee di stringimento o di allargamento principali.*

Reciprocamente la superficie rigata Σ, luogo delle rette che toccano una superficie S lungo una curva L, abbia L per la linea di stringimento; si considerino come linee v le geodetiche di S tangenti lungo L alle generatrici rettilinee di Σ.

Lungo la linea L è soddisfatta la (4); d'altronde, essendo in tutta la superficie verificata la (6), quest'equazione è pure verificata lungo L, e perciò, lungo tale linea, la (4) si riduce alla (8); essendo allora lungo L verificate le (6), (7), è pure soddisfatta l'equazione (1).

Dunque *se la linea* L, *tracciata sopra una superficie* S, *è la curva di stringimento della superficie rigata* Σ *luogo di un sistema di tangenti alla* S *lungo* L, in generale *è una linea di stringimento o di allargamento (necessariamente principale) del sistema di geodetiche di* S *che, lungo* L, *sono tangenti alle generatrici rettilinee di* Σ.

Rispetto a un sistema di linee v una linea L sia una curva di stringimento o di allargamento principale; allora L è la linea di stringimento della superficie rigata Σ luogo delle tangenti alle v lungo L.

Applicando quindi il teorema precedente abbiamo *se una linea* L *descritta sopra una superficie qualunque* S *è, rispetto a un sistema di linee arbitrarie* v, *una linea di stringimento o di allargamento principale,* in generale *è pure una linea di stringimento o di allargamento (necessariamente principale) rispetto al sistema delle geodetiche di* S *che toccano le linee* v *lungo* L.

Si possono generalizzare i teoremi che precedono nella maniera seguente.

Combinando fra loro le equazioni (1), (6), si deduce l'altra:

$$E\frac{\partial G}{\partial u} = F\frac{\partial E}{\partial v} \tag{8}$$

di modo che si può dire che quando, lungo una data linea L, sono soddisfatte due delle tre relazioni (1), (6), (8), è necessariamente soddisfatta la rimanente.

Si supponga ora che una stessa linea L sopra una superficie sia una curva di stringimento o di allargamento di due sistemi di linee isogonali u, v; assumendo queste come linee coordinate e chiamando i il loro angolo costante, si ha:

$$\frac{EG-F^2}{E}=G\cdot \operatorname{sen}^2 i\,, \quad \frac{EG-F^2}{G}=E\cdot \operatorname{sen}^2 i$$

in forza delle quali eguaglianze le equazioni differenziali delle linee di stringimento o di allargamento dei due sistemi di linee $v=\text{cost.}$, $u=\text{cost.}$ divengono:

$$\frac{\partial G}{\partial u}=0\,, \quad \frac{\partial E}{\partial v}=0\,.$$

Essendo allora, lungo la linea L, soddisfatte queste due equazioni, è pure soddisfatta la (8); ma lungo la L è soddisfatta anche l'equazione (1), dunque lo sarà pure la (6) la quale, per un teorema precedente, esprime che la L è una linea di stringimento o di allargamento del sistema di trajettorie ortogonali delle v. La L è dunque, rispetto al sistema di linee v, una linea di stringimento o di allargamento principale.

Lo stesso ragionamento potendosi fare rispetto alle linee u, si ha il teorema *se sopra una superficie una linea* L *è una curva di stringimento o di allargamento di due sistemi di linee isogonali, rispetto a ciascuno di tali sistemi è una linea di stringimento o di allargamento principale (e quindi, nel caso che nessuno dei predetti sistemi sia formato da geodetiche, è pure una linea di stringimento o di allargamento delle loro trajettorie ortogonali).*

Se nell'equazione (5) si suppongono le linee coordinate ortogonali, risulta $F=0$ e quindi, indicando con R_u, R_v i raggi di curvatura geodetica delle dette linee coordinate $u=\text{cost.}$, $v=\text{cost.}$, si ha:

$$\frac{1}{R}=-\frac{di}{ds}+\frac{\operatorname{sen} i}{R_u}+\frac{\cos i}{R_v}\,. \tag{9}$$

Si supponga ora che la L sia, rispetto a un sistema di linee $v=\text{cost.}$ non geodetiche, una linea di stringimento o di allargamento principale; allora è pure una linea di stringimento o di allargamento rispetto al sistema delle linee $t=\text{cost.}$ traiettorie ortogonali delle v. Lungo tale linea

si deve quindi avere:

$$\frac{1}{R_u} = \frac{1}{R_v} = 0$$

e l'equazione precedente si riduce a:

$$\frac{1}{R} = - \frac{di}{ds}.$$

Se dunque consideriamo sulla superficie un sistema di linee $t_1 =$ cost. trajettorie isogonali delle v, queste linee, lungo L, avranno nulla la curvatura geodetica; perciò la linea L sarà, *in generale*, (n.° 1) una linea di stringimento o di allargamento del sistema di linee t, trajettorie ortogonali delle t_1.

Se poi le v sono geodetiche, le conclusioni rimangono le stesse; poichè, è bensì vero che la L non è più una linea di stringimento o di allargamento delle trajettorie ortogonali, ma la condizione $\frac{1}{R_v} = 0$ è soddisfatta medesimamente per la natura delle linee v.

Se si osserva che le t sono, come le t_1, delle trajettorie isogonali delle v e che, dal fatto che L è la linea di stringimento della superficie rigata luogo delle tangenti alle v lungo L, risulta che è pure la linea di stringimento della superficie rigata Σ luogo delle tangenti alle t lungo L, si ha *Quando la linea* L, *rispetto a un sistema di linee qualunque* v, *è una linea di stringimento o di allargamento principale,* in generale *è pure una linea di stringimento o di allargamento principale rispetto a qualsivoglia altro sistema formato da trajettorie isogonali alle linee del primo (Se però le linee* v *sono geodetiche, si deve dai sistemi di cui è parola nel teorema precedente escludere quello delle trajettorie ortogonali delle* v*).*

Combinando quest'ultimo teorema col precedente, si può dire *quando una linea* L *è la curva di stringimento o di allargamento di due sistemi di linee isogonali, è pure una linea di stringimento o di allargamento di qualsivoglia altro sistema isogonale; e rispetto a tutti questi sistemi è una linea di stringimento o di allargamento principale.*

Sia L una linea di stringimento o di allargamento di un sistema di geodetiche v; dovendo L, rispetto a questo sistema, essere una linea di stringimento o di allargamento principale, la L è pure la linea di stringimento della superficie rigata Σ luogo delle tangenti alle v lungo L e quindi sarà pure linea di stringimento della superficie rigata Σ_1 che si ottiene facendo ruotare le generatrici di Σ attorno ai punti di L e nei piani tan-

genti della superficie di un angolo costante (*). Allora, per quanto si è visto in questo stesso numero, dovendo la L essere una linea di stringimento o di allargamento del sistema di geodetiche tangenti lungo L alle generatrici di Σ_1, si avrà *se una linea* L *è una curva di stringimento o di allargamento di un sistema di geodetiche,* in generale *è pure una linea di stringimento o di allargamento di qualsivoglia altro sistema formato da geodetiche che lungo la* L *taglino le prime sotto un angolo costante.*

Se per es. consideriamo la linea di stringimento ordinaria di una superficie rigata, si ha *la linea di stringimento ordinaria di una superficie rigata è* in generale *una linea di stringimento o di allargamento (principale) tanto di qualsivoglia sistema di geodetiche seganti le generatrici lungo tale linea sotto un angolo costante diverso da* $\frac{\pi}{2}$*, quanto di qualsivoglia sistema di trajettorie seganti le generatrici sotto un angolo costante diverso da* $\frac{\pi}{2}$.

V.

Sia L una linea di stringimento o di allargamento del sistema di linee $v=$ cost.; assunte le linee v come le linee coordinate di un sistema e le $u=$ cost. trajettorie ortogonali delle prime come quelle del secondo sistema, lungo la L deve essere nulla la curvatura geodetica $\frac{1}{R_u}$ delle u. Conseguentemente la (9) si riduce all'altra

$$\frac{1}{R}=-\frac{di}{ds}+\frac{1}{R_v}\cos i\,. \tag{10}$$

Viceversa la curvatura geodetica $\frac{1}{R}$ di una linea L descritta sopra una superficie sia legata alla curvatura geodetica $\frac{1}{R_v}$ delle linee $v=$ cost. di un sistema arbitrario e all'angolo i sotto il quale tali linee segano L per mezzo della relazione (10).

Prendendo per linee coordinate le v e le trajettorie ortogonali u, lungo la L è soddisfatta l'equazione (9), la quale in forza della (10), dà $\frac{1}{R_u}=0$; questa condizione è noto che *in generale* esprime che le linee del sistema

(*) Studi geometrici relativi specialmente alle superficie gobbe. *Giornale di Matematiche*, 1885.

$v =$ cost. ammettono la curva L per linea di stringimento o di allargamento (n.° 1).

Dunque *in tutti i punti di una linea di stringimento o di allargamento di un sistema di linee* v = *cost. descritte sopra una superficie qualunque, e* in generale *nei soli punti di una tale linea, ha luogo la relazione caratteristica* (10).

La linea L sia una curva di stringimento o di allargamento (principale) di due sistemi di linee isogonali v e v_1; lungo tale linea L, oltre la (10), deve essere soddisfatta l'altra relazione:

$$\frac{1}{R} = -\frac{di_1}{ds} + \frac{1}{R_{1v}} \cos i_1 ,$$

in cui i_1 é l'inclinazione delle v_1 sulla L e R_{1v} il raggio di curvatura geotica delle v_1.

Essendo $di = di_1$ le precedenti danno:

$$\frac{\cos i}{R_v} = \frac{\cos i_1}{R_{1v}} .$$

Dunque *se lungo una linea di stringimento o di allargamento principale di un sistema di linee* v *queste hanno curvatura geodetica nulla, le linee* v_1 *di qualsivoglia altro sistema isògonale hanno pure, lungo la medesima linea, curvatura geodetica nulla.*

Se quindi consideriamo un sistema di geodetiche v e una loro linea di stringimento o di allargamento (necessariamente principale) potremo applicare il teorema precedente e dire *sopra una superficie qualunque le trajettorie isogonali di un sistema di geodetiche hanno comuni con queste le linee di stringimento e di allargamento; e lungo tali linee esse pure hanno curvatura geodetica nulla.*

Se supponiamo che le v siano geodetiche, $\frac{1}{R_v} = 0$ e quindi la (1) diviene:

$$\frac{1}{R} = -\frac{di}{ds}, \quad \text{d'onde:} \quad di = -\frac{ds}{R} .$$

Perciò *i sistemi di geodetiche che sopra una superficie qualunque* S *ammettono una determinata curva* L *per linea di stringimento o di allargamento sono formati dalle geodetiche della superficie che segano* L *sotto un angolo il cui differenziale é eguale all'angolo di contingenza geodetica di* L.

Questo teorema fa vedere che *una linea qualunque di una superficie*

può sempre considerarsi come una linea di stringimento o di allargamento di un' infinità di sistemi di geodetiche della superficie; e considerando due qualunque di questi sistemi di curve, si trova che lungo quella linea le curve dell' uno segano sotto angolo costante le curve dell' altro.

Questo teorema dà quindi il mezzo di costruire uno qualunque degli infiniti sistemi di geodetiche che ammettono per linea di stringimento o di allargamento una determinata curva.

Sia L una linea di stringimento o di allargamento principale di un sistema di linee qualunque v tracciate sopra una superficie qualunque S; come è noto, la L sarà pure una linea di stringimento o di allargamento del sistema di geodetiche di S che toccano le v lungo L. Applicando quindi uno dei teoremi di questo numero, si ha *quando una linea* L *è una curva di stringimento o di allargamento principale rispetto a un sistema di linee* v, *queste segano la* L *sotto un angolo il cui differenziale è eguale all' angolo di contingenza geodetica di* L *sulla superficie.*

Se nella (10) supponiame i costante $\left(\gtrless \frac{\pi}{2}\right)$, si ha:

$$\frac{1}{R} = \cos i \cdot \frac{1}{R_v},$$

e se $i = \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{1}{R} = 0.$$

Queste due eguaglianze costituiscono due teoremi noti (*).

Se la L è una geodetica della superficie, la (10) diviene:

$$\frac{di}{\cos i} = \frac{ds}{R_v},$$

dalla quale:

$$\cot i = \frac{1}{2a}\left(e^{-\int \frac{ds}{R_v}} - a^2 e^{\int \frac{ds}{R_v}}\right), \quad \text{con } a \text{ costante arbitraria.}$$

Questa equazione ci fornisce il modo di tracciare sopra una superficie qualunque S un sistema di linee v, aventi per linea di stringimento o di allargamento una geodetica L di S e delle quali si conosca la curvatura geodetica $\frac{1}{R_v}$ lungo L.

(*) Brioschi — Nota citata.

VI.

Per un teorema di Bonnet è noto che se sopra una superficie rigata una linea possiede due delle tre seguenti proprietà: 1.° di essere geodetica; 2.° di segare le generatrici sotto un angolo costante; 3.° di essere la linea di stringimento, possiede pure la rimanente.

Ora dimostreremo altri due teoremi analoghi pel caso che la linea considerata sulla superficie rigata sia un'assintotica, ovvero una linea di curvatura, dopo di che estenderemo questi tre teoremi alle superficie qualunque. Siano A, B, C gli angoli che le generatrici rettilinee di una superficie rigata Σ formano colla tangente, colla normale principale e colla binormale di una linea L descritta sopra Σ; la condizione necessaria e sufficiente perchè L sia la linea di stringimento è: (*)

$$\frac{d\cos A}{ds} - \frac{\cos B}{\rho} = 0\,, \tag{11}$$

essendo s l'arco e ρ il raggio di curvatura di L.

Se poi indichiamo con θ l'angolo sotto il quale i piani osculatori di L segano la superficie Σ, si ha: (*)

$$\cos\theta = \frac{\cos B}{\operatorname{sen} A}\,;$$

ne viene di conseguenza che la condizione necessaria e sufficiente perchè la linea L sia un'assintotica della superficie è:

$$\operatorname{sen} A = \cos B\,. \tag{12}$$

Siccome, combinando fra loro le (11), (12, si ottiene:

$$dA = -\frac{ds}{\rho}\,, \tag{13}$$

si può dire che quando per una data linea L descritta sopra una superficie rigata Σ sono verificate due delle tre relazioni (11), (12), (13), è pure soddisfatta la rimanente.

(*) V. § IV della mia memoria « Sulle superficie rigate » — *Giornale di Matematiche,* 1887.

Dunque *se una linea descritta sopra una superficie rigata possiede due delle tre seguenti proprietà:* 1.° *di essere assintotica;* 2.° *di segare le generatrici sotto un angolo il cui differenziale è uguale all'angolo di contingenza della linea;* 3° *di essere linea di stringimento, possiede pure la rimanente.*

La condizione necessaria e sufficiente perchè una linea L descritta sopra una superficie rigata Σ sia una linea di curvatura è: (*)

$$\cos B = \operatorname{sen} A \cdot \cos\left(a + \int \frac{ds}{r}\right) \tag{14}$$

la quale, combinata colla (11), dà:

$$dA = -\frac{ds}{\rho} \cdot \cos\left(a + \int \frac{ds}{r}\right), \tag{15}$$

essendo r il raggio di torsione di L ed a una costante arbitraria.

Siccome quando delle tre relazioni (11), (14), (15) due sono soddisfatte è pure soddisfatta la rimanente, potremo dire *se una linea descritta sopra una superficie rigata possiede due delle tre seguenti proprietà:* 1.° *di essere una linea di curvatura;* 2.° *di segare le generatrici sotto un angolo* A *il cui differenziale è dato da* (15)*;* 3.° *di essere linea di stringimento, possiede pure la rimanente.*

Sia ora S una superficie qualunque, Σ la superficie rigata luogo di un sistema di tangenti alla S e L la linea di contatto delle due superficie. Si osservi che quando L è una geodetica, o un'assintotica o una linea di curvatura di una delle due superficie S, Σ è pure geodetica o assintotica o una linea di curvatura dell'altra; d'altronde se sulla superficie S si prende per linee coordinate v il sistema di geodetiche tangenti alle generatrici di Σ lungo L, per teoremi precedenti (n.° 5) si ha che quando L è linea di stringimento di Σ è *in generale* linea di stringimento o di allargamento del sistema di linee v; e reciprocamente. Il teorema di Bonnet e i due teoremi precedenti da noi dimostrati si possono quindi estendere alle superficie qualunque nel modo seguente:

Se una linea L *tracciata sopra una superficie qualunque* S *possiede due delle tre seguenti proprietà:*

1° *di essere una geodetica; ovvero un'assintotica; ovvero una linea di curvatura.*

2° *di segare un sistema di geodetiche della superficie sotto un angolo costante; ovvero sotto un angolo il cui differenziale è eguale all'angolo di*

(*) Sulle superficie rigate — § IV.°

contingenza della linea; ovvero sotto un angolo A *il cui differenziale è espresso nel modo seguente:*

$$dA = -\frac{ds}{\rho}\cos\left(a + \int\frac{ds}{r}\right).$$

3° *di essere una linea di stringimento e di allargamento del sistema di quelle geodetiche, possiede pure la rimanente.*

Un caso particolare notevole si ha quando la linea di curvatura L è piana; allora:

$$dA = -\cos a \cdot \frac{ds}{\rho},$$

dove a è l'angolo costante sotto il quale il piano della linea sega la superficie.

Potremo quindi dire *se una linea* L *tracciata sopra una superficie qualunque possiede due delle tre seguenti proprietà:* 1ª *di essere una linea di curvatura piana;* 2ª *di segare un sistema di geodetiche della superficie sotto un angolo* A *tale che:*

$$dA = -\cos a \cdot \frac{ds}{\rho},$$

dove a *è l'angolo costante sotto il quale il piano della linea* L *sega la superficie;* 3ª *di essere una linea di stringimento o di allargamento del sistema di quelle geodetiche, possiede pure la rimanente.*

Si supponga che le linee v abbiano curvatura geodetica nulla lungo la linea di stringimento o di allargamento L; allora lungo questa linea è soddisfatta l'equazione (10), la quale nel nostro caso diviene:

$$\frac{1}{R} = -\frac{di}{ds}. \tag{16}$$

Ora se poniamo la condizione $\frac{1}{R} = 0$, la (16) dà $i =$ costante e le tre condizioni:

$$\frac{1}{R} = -\frac{di}{ds}, \quad \frac{1}{R} = 0, \quad i = \text{costante}$$

sono tali, che quando ne sono verificate due, è pure verificata la rimanente. Potremo dunque enunciare il teorema: *se una linea* L *tracciata sopra una superficie possiede due delle tre seguenti proprietà:* 1ª *di essere geodetica;* 2ª *di segare un sistema di curve* v *aventi curvatura geodetica nulla lungo*

la L *sotto un angolo costante; 3ª di essere una linea di stringimento o di allargamento del sistema di tali linee* v, *possiede pure la rimanente.*

Supponendo in questo teorema che le linee v siano a dirittura geodetiche, si ottiene il teorema, generalizzazione di quello di BONNET, dimostrato precedentemente.

Se poi consideriamo la condizione (10) e le altre:

$$\frac{1}{R}=0\,,\quad \frac{1}{R_v}=0\,,\quad i=\text{costante}\left(\gtrless\frac{\pi}{2}\right),$$

si trova che quando, lungo la linea L, ne sono soddisfatte tre, è pure soddisfatta la rimanente.

Dunque *se sopra una superficie qualunque si considera una linea* L *segata da un sistema di linee* v *e si suppone che siano soddisfatte tre qualunque delle seguenti quattro condizioni: 1ª che* L *sia geodetica; 2ª che le linee* v *abbiano curvatura geodetica nulla lungo* L*; 3ª che la* L *seghi le* v *sotto un angolo costante diverso da* $\frac{\pi}{2}$*; 4ª che la* L *sia una curva di stringimento o di allargamento del sistema di linee* v, *è pure soddisfatta la rimanente.*

Consideriamo particolarmente il caso in cui la linea di stringimento o di allargamento di un sistema di linee v è trajettoria isogonale di queste e geodetica della superficie; allora, per il teorema precedente, le linee v hanno curvatura geodetica nulla lungo L. Ma lungo la L hanno curvatura geodetica nulla le trajettorie ortogonali delle v (n.° 1), quindi la L è, rispetto al sistema di curve v, una linea di stringimento o di allargamento principale. Dunque *quando una geodetica di una superficie è linea di stringimento o di allargamento di un sistema di linee* v *di cui essa è trajettoria isogonale, rispetto a questo sistema essa è una linea di stringimento o di allargamento principale.*

Parma, novembre 1890.

AZIONE DELL' IDROGENO FOSFORATO

SUL

TRIBROMURO DI BISMUTO SCIOLTO NELL' ETERE

NOTA

DEI PROFESSORI

ALFREDO CAVAZZI e DEODATO TIVOLI

(Letta nella Sessione del 26 Aprile 1891).

Allorché si agita una soluzione di tricloruro di bismuto fortemente acida, in presenza di idrogeno fosforato gassoso, si genera un precipitato nero fioccoso che è senza alcun dubbio una combinazione di fosfuro di bismuto coll' acido cloridrico (Memorie dell' Accademia. Serie IV, Vol. V, pag. 531). I corpi fosforati che si ottengono con questo procedimento si decompongono più o men presto al contatto dell' acqua, ed anche nei fosfuri più stabili si riscontrano sempre a mezzo dell' analisi i segni delle alterazioni che su di essi producono tanto l' acqua, quanto altri liquidi contenenti l' idrossile, quale, ad esempio, lo spirito di vino. Adoperando come solvente di un sale di bismuto un liquido non idrossilato, si poteva sperare di ottenere il fosfuro BiP, nel modo stesso che si produce con tanta facilità il fosfuro d' oro AuP, facendo agire l' idrogeno fosforato sul tricloruro anidro sciolto nell' etere ben secco (Memorie dell' Accademia. Serie IV, Vol. VI, pag. 176).

Fra i sali di bismuto alquanto solubili nell' etere si giudicò come più acconcio al nostro intento il tribromuro $BiBr_3$; che fu preparato facendo passare dei vapori di bromo su polvere di bismuto riscaldata entro tubo di vetro alla temperatura del rosso incipiente, ricevendo e condensando il composto volatile entro matraccino di vetro. Questo processo di preparazione, quantunque presenti difficoltà e inconvenienti non lievi, fu preferito per non aver trovato buono e confacente il metodo di sciogliere il bismuto con soluzione formata di uguali volumi di bromo e di etere.

Dieci grammi circa di tribromuro, che era stato mantenuto a lungo nel vuoto in presenza di soda caustica, furono sciolti in 400^{cc} di etere distil-

lato sul sodio. La soluzione si fece entrare a poco a poco entro matraccio di vetro contenente gas idrogeno fosforato, condotto pur esso a perfetta secchezza. L' azione chimica avviene con rapidità, e dà nascimento ad una sostanza nerissima, che, forse per presenza d'acqua nel tribromuro, non assume forma di fiocchi, ma di una poltiglia lucente che s' attacca e aderisce con forza alle pareti del recipiente, tanto che per poterla raccogliere bisogna rompere il matraccio, staccarla e riunirla mediante spatola. Dopo prolungati lavacri con etere si tenne la sostanza nel vuoto per parecchi giorni in presenza di soda caustica e di acido solforico, a fine di privarla dell' umidità e dell' acido bromidrico che si genera insieme al precipitato nero. Man mano che la sostanza si dissecca, perde la sua lucentezza e indurisce. Ridotta in questo stato fu sottoposta all' analisi, onde scoprire le proporzioni relative degli elementi componenti.

Il rapporto quantitativo fra bismuto e fosforo si è trovato con facilità trattando parte della sostanza con acido nitrico concentrato, svaporando a secco, calcinando moderatamente, sciogliendo il residuo in acido cloridrico caldo convenientemente allungato con acqua, e precipitando il bismuto in forma di solfuro mediante l' acido solfidrico. Nel liquido separato per filtrazione dal solfuro insolubile, si è determinato il fosforo precipitandolo in istato di fosfato ammonico magnesiaco.

Il rapporto in peso fra bismuto e bromo si è trovato trattando un dato peso della sostanza con soluzione bollente di idrossido di potassio: si è separato il bismuto messo così in libertà, e nel liquido filtrato, reso prima fortemente acido con acido nitrico, si è fatto deporre il bromo in forma di bromuro di argento.

1.° Esperimento	Bismuto	gr. 0,8678	207 (Bi)
	Fosforo	gr. 0,0420	10,1 molto prossimo a $\frac{P}{3} = 10{,}32$
2.° Esperimento	Bismuto	gr. 1,0156	207
	Fosforo	gr. 0,0490	10
3.° Esperimento	Bismuto	gr. 0,6350	621 (Bi_3)
	Bromo	gr. 0,5746	561,9 molto prossimo a $Br_7 = 558{,}32$
4.° Esperimento	Bismuto	gr. 0,6308	
	Bromo	gr. 0,5672	

Da questi numeri si rileva che fosforo, bismuto e bromo sono nei rapporti di peso corrispondenti ad 1 atomo del primo elemento, 3 del secondo e 7 del terzo.

L' elemento che di certo esiste nella sostanza, ma che non si potè determinare quantitativamente in causa della straordinaria igroscopicità del composto e della difficoltà, per uguale cagione, di aver del bromuro di bi-

smuto secco, è l' idrogeno. Però i dati precedenti e il prodursi di acido bromidrico libero insieme alla combinazione fosforata nera, offrono buon argomento per ammettere che il fenomeno avvenga secondo la equazione seguente:

$$3BiBr_3 + PH_3 = 2HBr + BrP^vH(BiBr_2)'_3$$

Composto paragonabile ad $HCl.NH_2(HgCl)$ ed a $HCl.NH(HgCl)_2$, e che si potrebbe perciò denominare *bromuro di dibromotribismutfosfonio*. In istato di completa secchezza esso è nero, amorfo dotato di grande igroscopicità, e per poco che stia esposto all' aria diviene pastoso, ma ritorna allo stato primitivo lasciandolo per molti giorni nel vuoto in presenza di sostanze avide di vapor d' acqua. Al contatto dell' acqua fredda a poco a poco si decompone esalando un lieve odore di idrogeno fosforato, perde del bromo in forma di acido bromidrico, e la maggior parte del fosforo produce segnatamente dell'acido fosforico. Cotesta trasformazione avviene molto più rapida nell'acqua bollente, e rimane infine del bismuto libero. Cimentato a caldo con soluzione di idrossido di potassio da prima rigonfia e, più presto che nell' acqua bollente, perde il bromo e il fosforo, generandosi bromuro e fosfato di potassio con svolgimento di idrogeno e di idrogeno fosforato. A temperatura ordinaria non agisce coll' acido solforico concentrato in modo palese: col medesimo acido bollente fornisce solfato di bismuto, vapori di bromo, acido bromidrico, anidride solforosa, e il fosforo si cambia in acido fosforico. Coll' acido nitrico concentrato opera con grande energia. Rimescolato entro mortaio con pezzetti di amalgama ricca di sodio, s' infiamma e scoppietta con molta violenza, sviluppando in gran copia dell' idrogeno fosforato. Il fenomeno avviene in modo simile anche quando si aggiungono alla miscela alcune gocce d' acqua. È notabile però che in questo caso nel liquido si trova in abbondanza del bromuro di sodio, ma non si riscontrano acidi del fosforo. Con amalgama povera di sodio la reazione è molto meno energica, e il gas che si svolge non s' infiamma. Scaldato in corrente di anidride carbonica pura e secca, non si altera a 100°: a 120° rigonfia e sobbolle, perdendo alquanto di vapor d' acqua: a 190° dà segni di fusione, tramanda lievissimo odore di idrogeno fosforato, ma non perde acido bromidrico. Scaldato sino a 220°, dopo raffreddamento, offre l' aspetto e conserva le proprietà della sostanza che si ottiene col semplice disseccamento nel vuoto. Scaldato all' aria diviene semifluido, e quindi si decompone con certa violenza esalando vapori di bromo, di bromuro di bismuto e di anidride fosforica.

DELLO STATO IN CUI SI TROVA
L' ACIDO SOLFORICO NEI VINI GESSATI NATURALI
E
DELLA RICERCA TOSSICOLOGICA DI ESSO
E DEGLI ACIDI NITRICO E CLORIDRICO

NOTA

del Professor DIOSCORIDE VITALI

(Letta nella Sessione delli 12 Aprile 1891).

L' uso d' ingessare i vini é antico, poi che di esso é fatto cenno da Plinio. Dalla Francia meridionale questa pratica si diffuse alla Spagna, al Portogallo, poi alla Sicilia e Sardegna: da prima, ristretta fra pochi produttori, ha finito per essere seguita da molti. — L' aggiunta si fa per lo più ai mosti, e, meno frequentemente, ai vini. La quantità di solfato di calcio che comunemente s' impiega, varia dal 1 al 3 per % dell' uva pigiata: ma questa proporzione da alcuni é talvolta superata. Le ragioni di tale pratica sarebbero, che i vini che si ottengono sono meno colorati, ed il colore che presentano é il rosso rubino o granata: sono inoltre perfettamente limpidi e meno alterabili, ed hanno il sapore dei vini già maturi. E per verità questi effetti vantaggiosi si ottengono, per modo che i vini gessati diventano più facilmente commerciabili.

Ma se le ragioni economiche consigliano questa pratica, le ragioni igieniche possono fare altrettanto? Per dare risposta adeguata a questa domanda, fa duopo avere la conoscenza di fatti numerosi e costanti, dai quali risulti provato che i vini gessati siano innocui, od influiscano sinistramente sulla salute di chi ne fa uso più o meno prolungato, e la conoscenza dei cambiamenti, che il solfato di calcio induce nei mosti e nei vini, e dei nuovi prodotti che, fra quel sale e i principali componenti tanto del mosto che dei vini, prendono origine, per vedere se fra questi ve ne abbia qualcuno che possa riescire di danno alla salute. — Queste due conoscenze sono fra loro in qualche rapporto. — In fatti, finché la scienza non lasció intravedere che coll' ingessamento si può formare nei vini

qualche composto che non poteva ritenersi indifferente verso l' umano organismo, la questione igienica tacque, per sorgere tosto che la Chimica dimostrò che realmente nell' ingessamento si forma tale quantità di una nuova sostanza, da poter recare pregiudizio alla salute.

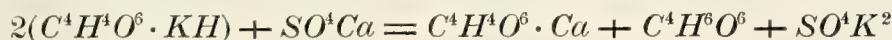
Non sono ancora con certezza note le modificazioni, che il solfato di calcio arreca alla composizione chimica dei mosti e dei vini. — Ciò che però è fuori di dubbio si è che fra il bitartrato di potassio, sale organico acidulo il più abbondante del vino e che contribuisce al buon gusto, non che alle qualità igieniche di questa bevanda, ed il solfato di calcio, avviene doppia decomposizione, per cui formasi del tartrato di calcio, sale poco solubile, e che quindi si depone per la massima parte, e del solfato di potassio in proporzione più o meno notevole a seconda della quantità del gesso impiegato e a seconda che l' ingessamento viene eseguito, come di solito, nel mosto o pure nel vino: si forma inoltre una piccola quantità di solfato di magnesio, sale amaro e purgativo fra il gesso e le piccole proporzioni di fosfato e tartrato di magnesio esistenti nei mosti e nei vini. Il POGGIALE, (1) in un vino gessato dei Pirenei orientali, trovò niente meno che grammi 7,388 per litro di solfato di potassio, mentre lo stesso vino, non sottoposto all' ingessamento, non ne conteneva che grammi 0,367: i fosfati di potassio e di magnesio, che nel vino normale raggiungevano la cifra non indifferente di grammi 1,420 per ogni litro, si trovarono ridotti nel vino gessato a grammi 0,395: il che non è cosa certamente indifferente, conoscendosi l' azione ricostituente dei fosfati. — Conosciutosi questo fatto della trasformazione del cremor tartaro in solfato potassico, subito si domandò: se la sostituzione nel vino di proporzioni non piccole di questo sale amaro e purgativo al bitartrato di potassio, sale acidulo, lievemente lassativo e non irritante, fosse cosa affatto indifferente per la salute di chi beve quotidianamente vino e non potesse invece riescire di qualche pregiudizio. — Il POGGIALE, che fu uno dei primi ad occuparsi di questa importante questione, fu anche il primo a dare il grido d' allarme. Al POGGIALE tennero dietro altri chimici ed igienisti, come il PAYEN, il CHEVALLIER, il BARRAL, il MICHEL LEVY, che proclamarono dannosi alla salute umana i vini gessati: in conseguenza di che, e sulla proposta del POGGIALE, l' Amministrazione militare francese pose un freno alla smodata pratica, stabilendo un limite all' ingessamento dei vini che dovevano servir per l' Esercito. Questi vini non dovevano contenere per litro più di grammi 4,00 di solfato potassico, o tant' acido solforico che, calcolato come solfato potassico, non oltrepassasse quella cifra; la quale poi nel 1876, sempre pei vini ad uso dell' Esercito, dal Consiglio di Sanità militare di Francia,

(1) A. WURTZ. Dictionnaire de Chimie pure et appliquée; tome III, pag. 699.

venne ridotto a grammi 2,00 per litro. — In questo paese s' andò più oltre: il 1° gennaio 1888, si emise un' ordinanza, per la quale fu dichiarata una frode, e come tale punita l' aggiunta ai vini di tale quantità di solfati, considerati come solfato potassico, superiore al due per 1000. — Questo limite fu pure stabilito in Italia, dopo che, in mezzo alla generale disapprovazione di Municipii e di Commissioni sanitarie, si era proclamata la più ampia libertà anche in questa pratica. Dalla generalità degli Igienisti si ritiene che l' ingessamento, entro questi limiti, non possa recare pregiudizio alla salute: di questo parere furono pure il CHANCEL, il BERARD, il CAUVY, il BUIGNET, il BUSSY, il BECHAMP. — Ma non è a dubitarsi del contrario, quando l' ingessamento fosse fatto senza limiti.

Numerosi sono i fatti, che citansi per dimostrare che i vini molto gessati possono recare disturbo alla salute. — Molti di questi fatti trovansi esposti in una relazione che il RICHARD ha pubblicato nel 1885 in un volume, reso di pubblica ragione dal Comitato d' Igiene di Parigi. — Sono a questo riguardo importanti ed interessanti le osservazioni ed esperienze che il MARTY, professore di Chimica applicata alle perizie igieniche alla Scuola di *Val de Grace* e Membro dell' Accademia di Parigi, fece su di sè medesimo (1). Egli fece uso per qualche tempo di vini gessati: n' ebbe gastralgie gravi e disturbi intestinali, che scomparvero colla sostituzione per qualche giorno dell' acqua a quei vini, e ricomparvero dopo quindici giorni in seguito all' uso ripreso dei medesimi. — Ogni disturbo cessò dopo che egli ebbe sostituito i vini gessati con una bevanda, la quale conteneva l' 11 per $\%_0$ di alcol e grammi 2,5 di bitartrato di potassio per 1000. — Ma coll' uso di altra bevanda, la quale, per la stessa quantità di alcool, conteneva invece del cremor tartaro, grammi 2,82 di solfato di potassio per litro, gli inconvenienti stessi e colla medesima intensità si rinnovarono: e questa alternativa di disturbi e di ritorno alla salute si ripetè con costanza, coll' alternare i vini gessati con acqua e con bevande idralcooliche, che, invece di solfato potassico, contenevano bitartrato di potassio.

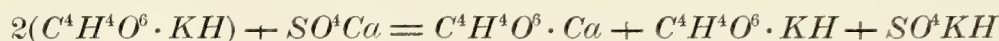
L' insalubrità dei vini gessati, fin dal principio e per molto tempo di poi, si attribuì alla presenza nei medesimi di forte proporzione di *solfato neutro di potassio*, perchè, secondo l' opinione del CHANCEL (2), ritenevasi che fra il bitartrato di potassio e il solfato di calce, avvenisse doppia decomposizione nel senso dimostrato dall' equazione chimica:

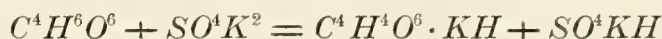
$$2(C^4H^4O^6 \cdot KH) + SO^4Ca = C^4H^4O^6 \cdot Ca + C^4H^6O^6 + SO^4K^2$$

Ma non tardò molto a sorgere un' altra interpretazione della reazione fra

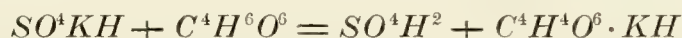
(1) Revue Scient. 1887, 2° sem., pag. 319. — Revue d' Hygiéne.

(2) Etudes sur la composition des vins. Montpellier, 1866. — Comp. Rend. Seance du 20 Fevrier 1863.

quei due composti salini. Si ammise dal BUSSY e dal BUIGNET che tra il bitartrato di potassio e il solfato di calcio si formasse bensì del tartrato di calcio e solfato di potassio, ma che questo invece di essere il neutro, fosse il bisolfato in conformità di quest' altra equazione chimica:

$$2(C^4H^4O^6 \cdot KH) + SO^4Ca = C^4H^4O^6 \cdot Ca + C^4H^4O^6 \cdot KH + SO^4KH$$

Ed a questa interpretazione furono certamente indotti dalla considerazione che l' acido tartarico, che secondo il modo di vedere di CHANCEL e secondo la prima delle equazioni chimiche si rende libero, non potesse rimanere indifferente verso il solfato neutro di potassio, e perciò dovesse decomporlo trasformando questo sale neutro in sale acido, e sè stesso in bitartrato di potassio:

$$C^4H^6O^6 + SO^4K^2 = C^4H^4O^6 \cdot KH + SO^4KH$$

Ed infatti è notorio che, aggiungendo ad una soluzione anche abbastanza diluta di solfato bipotassico dell' acido tartarico, si ottiene, specialmente agitando il liquido, intorbidamento, dovuto a cremor tartaro che si produce: il che non potrebbe accadere senza la formazione per lo meno di solfato acido di potassio. — Dissi *per lo meno*, perchè non venne finora escluso, che in questa reazione non si possa anche render libero dell' acido solforico per successiva azione dell' acido tartarico sul bisolfato formatosi:

$$SO^4KH + C^4H^6O^6 = SO^4H^2 + C^4H^4O^6 \cdot KH$$

A favore di questa possibilità, anzi a favore di questa produzione di acido solforico, starebbe il fatto da me osservato, che aggiungendo ad una soluzione di solfato acido di potassio purissimo altra d' acido tartarico, e dibattendo, si ottiene precipitato di cremor tartaro, il che non potrebbe avvenire senza che, come lo dimostra l' ultima equazione, si renda libero dell' acido solforico. — L' HENNINGER (1), agitando con etere del vino gessato, ha osservato che questo solvente esporta traccie di acido solforico, che, evaporato il liquido, rimane come residuo: il che sta a favore dell' opinione di coloro che ammettono che nell' ingessamento dei vini si formi solfato acido di potassio; poichè non si potrebbe rendere libero dell' acido solforico, se prima non si fosse formato solfato acido. — Nuova conferma della formazione di acido solforico libero si ha in una osservazione del Prof. POLLACCI (2), il quale, trattando con etere l' estratto otte-

---

(1) WURTZ. Dictionnaire de Chimie pure et appliquée; tomo III, pag. 698. Note.

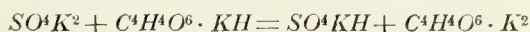
(2) « Nuovi fenomeni osservati nell' ingessamento dei vini e dei mosti ». Nota letta nel R. Istituto lombardo nell' adunanza del 4 Luglio 1878. Milano 1879. Tipi Bernardi. Parte prima pag. 9. —

nuto per evaporazione d' un vino gessato, insieme ad acido tartarico riuscì ad isolare dell' acido solforico libero.

Fino a circa venticique anni or sono dalla generalità dei Chimici si è ritenuto, non ostante l' opposizione fatta da Bussy e da Buignet, d' accordo col Chancel, che il solfato di potassio, che si forma nell' ingessamento dei vini e di mosti, sia il neutro. E questa opinione fu accettata quasi senza discussione. Ma da quel tempo in poi non mancò chi, manifestando dubbi sulla attendibilità della medesima, fece rivivere l' opinione contraria del Bussy e dal Buignet, cercando di dimostrarne la verità con opportuni esperimenti. — Tra questi vanno ricordati in Italia in modo particolare il Prof. Prospero Ferrari (1), il quale, se non si è occupato direttamente dei vini gessati, ha con un buon metodo dimostrato che nei vini normali i solfati sono gli acidi e non i neutri, ed ha indirettamente contribuito alla soluzione della questione, che ci occupa; ed il Prof. Pollacci (2), il quale instituì esperienze, per dimostrare che nell' ingessamento dei vini, oltre al formarsi bisolfato di potassio, si formano altresì dei prodotti solforati, fra

---

In una nota di questo interessante lavoro, l' Egregio Autore afferma, che, aggiungendo ad una soluzione di cremor tartaro altra di solfato neutro di potassio, si precipita del bitartrato di questo metallo, mentre il solfato neutro passa a bisolfato. — Produzione pure di cremor di tartaro egli ha osservato, mescolando soluzione di solfato neutro di potassio con vino, con contemporanea formazione di solfato acido di potassio. — Che realmente dibattendo una soluzione di solfato neutro di potassio con altra di cremore, si produca forte intorbidamento, è un fatto certo. — Ma che questo precipitato sia dovuto a cremor tartaro, formatosi di nuovo insieme a bisolfato di potassio, ciò io non arriverei a comprendere: poichè a me sembra che l' unica reazione possibile fra il cremor tartaro e il solfato neutro di potassio, sia quella espressa dalla seguente equazione:

$$SO^4K^2 + C^4H^4O^6 \cdot KH = SO^4KH + C^4H^4O^6 \cdot K^2$$

Ora tanto il solfato acido di potassio, come il tartrato neutro di potassio sono sali solubilissimi: d' altra parte non mi sembra ammissibile che tra il cremor tartaro e il solfato neutro di potassio, possa avvenire decomposizione nel senso che si produca bitartrato di potassio, che è già formato e che anzi è una delle sostanze reagenti, a meno che, si ammetta anche che il cremor tartaro, dopo essersi trasformato in tartrato neutro di potassio, per opera del bisolfato, ritorni bitartrato, mentre il bisolfato passerebbe di nuovo a solfato neutro. Quest' ultima supposizione non sarebbe ammissibile, sebbene possa essere suffragata dal fatto da me osservato, che una soluzione di tartrato neutro di potassio, però non diluita, con altra di cremore precipita una polvere cristallina; questa supposizione, ripeto, non può ammettersi, perchè non vi ha ragione, per cui non mutandosi le condizioni, si debba avere ad un tempo decomposizione e ricomposizione dello stesso composto.

Ciò però non esclude l' altro fatto affermato dall' Egregio Prof. Pollacci, quello cioè della precipitazione di cremor tartaro e formazione di bisolfato per aggiunta al vino di solfato neutro di potassio: poichè è noto che i vini contengono acido tartarico libero, che, reagendo sul solfato neutro, lo trasforma in bisolfato.

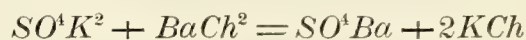
Il precipitato che si forma fra una soluzione di bitartrato e di solfato neutro di potassio, può forse ripetere la sua origine o da un fenomeno di soprasaturazione o dalla poca solubilità di uno dei due composti nella soluzione dell' altro.

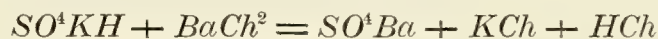
(1) Delle adulterazioni dei vini con acido solforico. Lavoro pubblicato nella raccolta degli « Studî e delle Ricerche instituite nel Laboratorio di Chimica Agraria nella R. Università di Pisa ». Fascicolo 4°, Anno 1882.

(2) Luogo citato, parte 1ª e parte 2ª.

i quali egli riconobbe il mercaptano etilico. L' opinione che il solfato potassico nei vini gessati sia l' acido e non il neutro, o che almeno il primo sia uno dei prodotti che si formano nell' ingessamento, si fece a poco a poco strada, sí che puó dirsi che essa sia la meglio accetta. Naturalmente anche l' opinione sull' azione igienica dei vini gessati dovette modificarsi, perché, se il solfato neutro di potassio é un sale *lassativo*, il bisolfato é inoltre un sale acido, che, come dice il Prof. CANTANI (1), agisce in dosi minori ed irrita troppo vivamente la mucosa gastro-enterica, e produce, per lo meno, forti coliche.

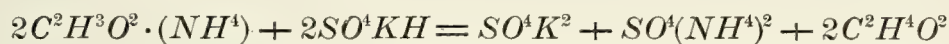
Se non che sul finire dello scorso anno i signori ROOS ed E. THOMAS, riprendendo la questione (2), fecero esperienze, dalle quali si credono autorizzati a dichiarare che nei vini sottoposti all'ingessamento i solfati in essi contenuti sono neutri. — Ecco l' esperienza fondamentale, su cui essi appoggiarono la loro conclusione. — Se ad un liquido contenente del solfato neutro di potassio si aggiunga un poco di acetato d' ammonio e cloruro di bario nella quantità strettamente necessaria per precipitare tutto l' acido solforico, si formerá cloruro di potassio e solfato di bario:

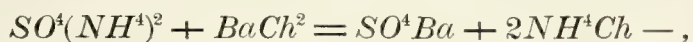
$$SO^4K^2 + BaCh^2 = SO^4Ba + 2KCh$$

Come si vede da questa equazione, tutto il cloro del cloruro di bario si trova, terminata la reazione, combinato al potassio; ragione per cui, filtrando il liquido, evaporandolo a secchezza e calcinando al rosso incipiente il residuo, in questo si dovrá trovare una quantita di cloro precisamente uguale a quella contenuta nel cloruro di bario, impiegato per l' esatta e completá precipitazione dei solfati. Ma la cosa corre diversamente, se il liquido contiene non piú il solfato bipotassico, ma invece il monopotassico, poiché in tal caso si forma bensí solfato baritico e cloruro potassico, ma non tutto il cloro del cloruro baritico impiegato per l' esatta precipitazione del solfato si trova trasformato in cloruro potassico, sale fisso, ma metá di esso si muta in acido cloridrico:

$$SO^4KH + BaCh^2 = SO^4Ba + KCh + HCh$$

Essendo quest' acido volatile, si comprende come nel residuo della calcinazione non si possa piú trovare tutto il cloro del cloruro baritico impiegato. — Ma siccome nei vini gessati, oltre ai solfati si trova tartrato, di calce ed anche di potassio, se l' ingessamento non venne spinto troppo oltre, i quali, per l' azione dell' acido cloridrico formatosi per la doppia de-

(1) CANTANI, Manuale di Materia Medica e Terapeutica.
(2) Bericht der Chem. Gesellschaft. Referate p. 754. Compt. Rend. III°, 575-578.

composizione fra il bisolfato ed il cloruro di bario, durante l'evaporazione a secchezza del vino potrebbero mutarsi nei rispettivi cloruri, sali fissi, così per impedire che questi si formino e per evitare ogni equivoco, quei due chimici consigliano, prima di precipitare i solfati col cloruro di bario, d'aggiungere un po' di acetato d'ammonio, poichè, secondo i medesimi, fra il bisolfato di potassio e questo sale avverrebbe doppia decomposizione, prodotti della quale sarebbero solfato d'ammonio, solfato bipotassico e acido acetico:

$$2C^2H^3O^2\cdot(NH^4)+2SO^4KH=SO^4K^2+SO^4(NH^4)^2+2C^2H^4O^2$$

Aggiungendo poi il cloruro di bario, si formerebbe, non più acido cloridrico, causa dell' accennato inconveniente, bensì cloruro d'ammonio, il quale è pur esso volatile al calore, senza possedere l'azione decomponente di quell' acido;

$$SO^4(NH^4)^2+BaCh^2=SO^4Ba+2NH^4Ch\text{ —},$$

per modo che anche in questo caso, la metà del cloro del cloruro di bario impiegata non potrebbe più trovarsi nel residuo della calcinazione. — Or bene, avendo i signori ROOS ed E. THOMAS nel residuo della calcinazione dei vini gessati, trattati prima con acetato d'ammonio e colla quantità di cloruro di bario strettamente necessaria per precipitare i solfati, trovato quantità di cloro eguale a quella contenuta nel cloruro di bario, ne conchiusero che nei gessati anzi che il bisolfato si rinviene il solfato neutro di potassio. — Questa conclusione sarebbe giustissima, se il cloruro d'ammonio rimanesse inerte durante l'evaporazione a secco dei vini gessati, trattati col cloruro di bario, i quali oltre ad acido tartarico, contengono anche, come già dissi, dei tartrati. — Ma le seguenti esperienze mi hanno convinto del contrario. — Ad una soluzione di cloruro d'ammonio ho aggiunto acido tartarico e un po' di bitartrato di potassio, ho evaporato a secco il miscuglio e calcinato il residuo fino a perfetta carbonizzazione e fino a che i sali ammonici fossero eliminati: ho trattato questo con acqua bollente e filtrato: — il liquido, reso acido con acido nitrico, m'ha dato abbondante precipitato col nitrato d'argento. Risultato eguale ho ottenuto, sostituendo il cremor tartaro col tartrato calcico; assai minore, ma pur sensibile, fu la quantità di cloruro argentico, ottenuta dalla soluzione del residuo della calcinazione, quando avevo rimpiazzato il cremor tartaro con un fosfato alcalino. — Le esperienze adunque dei predetti Chimici, che sarebbero concludentissime quando si trattasse di una semplice soluzione di bisolfato di potassio, nol sono punto, trattandosi dei vini.

Per risolvere la questione, ancora sollevata, se i vini gessati anzi che

il bipotassico, contengono il solfato monopotassico, occorre un metodo di ricerca di quest' ultimo sale, con cui, per così dire, lo si possa sorprendere, mentre sta disciolto nel vino, senza bisogno di evaporare e concentrare a consistenza estrattiva, poichè con queste operazioni, e durante le medesime, vanno di continuo mutandosi le condizioni d' equilibrio chimico fra i diversi componenti del vino. — Supposto che nei vini gessati, invece del bisolfato, si trovi il solfato neutro, è evidente che l' acido tartarico dei medesimi, il quale allo stato d' estrema diluzione potrebbe rimanere inerte verso quest' ultimo sale, spiegherà invece azione decomponente, trasformandolo in bisolfato che forse non vi preesisteva, quando i medesimi vanno mano mano concentrandosi. — Viceversa i bisolfati, che in soluzioni diluitissime non potrebbero reagire sugli acetati, malati, fosfati, e sui tartrati di calcio e di magnesio dei vini, potrebbero invece decomporsi, mutandosi in solfati neutri delle basi di quei sali, concentrando ad estratto i vini. — Ad evitare queste possibili trasformazioni e per dimostrare che nei vini gessati, ai quali per altro non sia stato aggiunto acido solforico, si contengono solfati acidi, io pensai sarebbe stato conveniente il trattare questi vini con qualche base organica, verso la quale il solfato neutro di potassio fosse inerte, mentre il bisolfato dovrebbe in parte trasformarsi in solfato di essa. — Posto ciò, se io fossi riuscito a separare dal vino questo solfato alcaloideo e riconoscerlo senza bisogno di scaldarlo, evaporarlo e concentrarlo, è chiaro che io avrei risolta la questione dello stato dell' acido solforico nei vini gessati. — Anche impiegando una base organica deve evitarsi la concentrazione dei vini, perchè questa base cogli acidi liberi di questi forma sali, acetati, tartrati, malati, i quali nell' ipotesi che in questi vini esistesse solamente solfato neutro di potassio, potrebbero, come ho potuto convincermene coll' esperienza, trasformare per doppia decomposizione parte di questo in solfato dell' alcaloide impiegato e ingenerare equivoco. Per eseguire la separazione del solfato della base organica, senza bisogno di evaporazione e concentrazione, pensai prima di ricorrere all' uso di solventi non miscibili all' acqua, nei quali il solfato dell' alcaloide fosse solubile, pensai cioè di dibattere i vini, dai quali vuolsi estrarre detto solfato, con alcol amilico, con etere, cloroforme, etere acetico: ma non ottenni risultati soddisfacenti, perchè, sebbene il solfato della base impiegata fosse alquanto solubile in ciascuno di questi solventi, pure col mezzo di essi non sono riescito che ad estrarne delle traccie. — Dopo diverse prove mi fermai all' uso successivo del cloroformio, dell' alcol assoluto e dell' acqua. — Tra le diverse basi diedi la preferenza alla chinidina, siccome quella, il cui solfato trovai abbastanza solubile nel cloroforme. — Il principio, su cui è basato il metodo che io propongo per risolvere la questione se i vini gessati contengono solfati acidi, è adunque il seguente: — Se a

questi vini o ad un liquido qualunque, nel quale si trovino disciolti dei bisolfati, si aggiunga della chinidina, finchè rifiuti di sciogliersi, indi del cloroforme, poi dell' alcol assoluto, quanto ne occorre perchè questo venga sciolto, ed infine dell' acqua, avverrà la separazione del cloroforme e con esso del solfato di chinidina, tolto, insieme ad una certa quantità di alcol, alla soluzione, mentre nel liquido rimarranno i solfati neutri inorganici, i quali sono insolubili nel miscuglio di cloroforme ed alcol: per cui, separando quest' ultimo, filtrandolo, evaporandolo a secco e riprendendo il residuo con acido cloridrico, si avrà un liquido, nel quale sarà facile dimostrare la presenza dell' acido solforico appartenente già ai bisolfati mediante un sale solubile di bario.

Le condizioni più opportune per mettere in pratica questo metodo sono le seguenti. — A tre volumi del vino o del liquido, in cui vuolsi far la ricerca dei bisolfati si aggiunga chinidina di recente precipitata, ed ancor umida, o chinidina secca finissimamente polverizzata, si agiti fortemente e riscaldi a 50°-60°. — Quando il liquido rifiuta di scioglierne, si filtri, e nel filtrato si versino due volumi di cloroforme e alcol assoluto fino a perfetta soluzione di questo; per il quale scopo ne bastano circa cinque volumi: ed infine, senza agitare, tant' acqua, che equivalga circa alla metà del volume complessivo. — Per l' aggiunta dell' acqua, il liquido intorbida, e ben presto lascia deporre il cloroforme, il cui volume trovasi aumentato da quello dell' alcol, che trascina in soluzione, e la cui presenza contribuisce ad aumentare la solubilità del solfato di chinidina nel cloroforme. — È bene eseguire la precipitazione di questo entro imbuto a chiave. Quando lo strato cloroformico è divenuto limpido, lo si separa dallo strato acquoso, lo si filtra più volte per carta, onde privarlo di piccole quantità d'acqua interposta, e a bagno maria lo si evapora a secchezza: si tratta il residuo con alcol anidro, o meglio con un miscuglio a volumi eguali di alcol assoluto e di cloroforme: si scalda lievemente per facilitare la soluzione, si filtra per filtro fittissimo, si evapora a secchezza a bagno maria, si riprende il residuo con poco acido cloridrico diluito, si scalda lievemente fino a perfetta soluzione, si filtra di nuovo, se questa non è limpidissima, e si aggiunge soluzione di cloruro di bario. Un intorbidamento più o meno forte ed istantaneo sarà prova certa che nel liquido sottoposto alla ricerca si contenevano solfati acidi. — Ripetute prove mi hanno convinto, che quando si operi con esattezza, e il cloroforme, e specialmente l' alcol, siano veramente anidri, al miscuglio di questi due solventi, con cui si riprende infine il residuo dell' evaporazione, non passa la più piccola traccia di solfati neutri inorganici, che avessero potuto coesistere coi bisolfati nel liquido primitivo.

Or bene, applicando questo metodo ad un vino genuino da me prepa-

rato per uso di famiglia con uva non solforata e conservato in botti, pure non solforate, e nel qual vino il cloruro di bario produceva non forte intorbidamento, ho potuto, nella soluzione cloridrica finale, ottenere col cloruro di bario intorbidamento abbastanza sensibile, e col riposo un tenue sedimento di solfato baritico. Questo risultato fu costante, per quanto abbia moltiplicato le prove. Ho ripetuto la prova collo stesso vino, che per tre giorni avevo lasciato a contatto, agitando di frequente, col 3 $^0/_0$ di solfato di calcio purissimo. — La quantità di solfato di bario, ottenuto dal liquido finale, fu di gran lunga maggiore di quella ottenuta nelle medesime condizioni dallo stesso vino, al quale però non era stato aggiunto gesso. Mentre da C^3 100 di questo, sottoposto al mio metodo, aveva ottenuto grammi 0,03 di solfato baritico, da C^3 100 dello stesso vino, dopo esser stato sottoposto all' azione del gesso, ne ottenni grammi 0,246, cioè una quantità otto volte maggiore. — Da questi esperimenti, ripetuti più volte, si può adunque conchiudere: 1° Che nei vini naturali si trovano solfati acidi. — 2° Che solfati acidi si formano nell' ingessamento dei vini. — Che nei vini naturali contenenti solfati si debbano formare solfati acidi, è pur dimostrato dal fatto, constatato anche da me nel vino naturale che ha servito per queste ricerche, che cioè, aggiungendo al vino una soluzione di solfato neutro di potassio, si ottiene intorbidamento dovuto a produzione di bitartrato di potassio, che si forma per opera dell' acido tartarico sul solfato bipotassico aggiunto, il quale alla sua volta trovasi trasformato in solfato monopotassico. — Infatti, separato il vino dal deposito e sottoposto al metodo descritto per la ricerca dei bisolfati, ha dato una quantità di solfato di bario, incomparabilmente maggiore di quella ottenuta dalla stessa quantità del medesimo vino, a cui non era stato aggiunto solfato neutro di potassio.

La quantità di chinidina, che deve essere aggiunta al vino, in cui vuolsi fare la ricerca dei solfati acidi, deve esser tale da saturare tutti gli acidi e sali acidi esistenti nel medesimo. — Della saturazione si ha indizic sicuro, allor che il colore rosso granato o rubino del vino mutasi in colorazione azzurro-violacea, colorazione dovuta all' azione dell' eccesso della chinidina sulla materia colorante dei vini (1).

---

(1) Aggiungendo e mescolando intimamente a piccola quantità di vino naturale forte proporzione di chinidina, o meglio di chinina, si ottiene una colorazione azzurra decisa: allungando con acqua e filtrando, il filtrato è colorato lievemente in azzurro. Volli vedere, come la chinina si comportasse con alcune materie coloranti, colle quali soglionsi sofisticare i vini, onde accertarmi se fosse possibile trarne qualche criterio, utile per la scoperta di tale sofisticazione. Ecco i risultati finora ottenuti da questa ricerca, che spero di poter completare in seguito. Poche goccie di uno sciolto di cocciniglia aggiunte a chinina hanno dato un miscuglio violetto, che allungato con acqua, e filtrato, lasciò passare un liquido pure violetto: di color violaceo è pure la parte insolubile rimasta sul filtro (chinina): questa si scioglie nell' alcol assoluto inpartendogli il proprio

Col descritto metodo si può in un liquido dimostrare la presenza di quantità abbastanza piccola di bisolfati. — Infatti il cloruro di bario produsse sensibile intorbidamento nella soluzione ultima da C^3 30 di un liquido il quale conteneva per % grammi 0,45 di bisolfato di potassio, ossia grammi

---

colore, il quale si conserva malgrado l'aggiunta di ammoniaca, ma passa al rosso per aggiunta di acidi. Il modo di comportarsi della materia colorante della cocciniglia colla chinina è affatto differente da quello della materia colorante del vino. Queste differenze si manifestano anche in miscugli di vino e di soluzione di cocciniglia.

Una soluzione di campeggio, resa violetta con piccola quantità di solfato d'alluminio e di potassio, e trattata con chinina, ha dato un miscuglio violaceo. — Il filtrato è incoloro; la parte insolubile, rimasta sul filtro, di color violetto. — Questa, trattata con alcol assoluto, si scioglie in parte (la chinina): ma rimane indisciolta una materia di color violetto (lacca alluminica), che è solubile negli acidi con colorazione gialla: in questa soluzione gialla l'ammoniaca produce precipitato azzurro violaceo. Mescolando soluzione di campeggio con vino, ed al miscuglio aggiungendo chinina, questa ritiene ambedue le materie coloranti. — Il filtrato è incoloro, la parte insolubile, azzurra. — Questa è parzialmente solubile nell'alcol assoluto con colorazione azzurrognola da prima, poi violetta: la parte insolubile nell'alcol assoluto è di colore azzurro intenso, che passa al rosso-violetto, cogli acidi.

Le soluzioni di fitolacca danno colla chinina un miscuglio di color violetto-intenso: il filtrato è pure violetto. — La chinina adunque non trattiene la materia colorante della fitolacca; per cui, mescolando vino con soluzioni di questa e con quella base e filtrando, la parte insolubile (chinina) è azzurra, il filtrato è violetto. — Nella chinina si ha adunque un mezzo per riconoscere, se ai vini fu aggiunta fitolacca.

Aggiungendo a *soluzioni diluite di fucsina* o di *surrogato di carminio* chinina, si ottiene un miscuglio violetto, ed un filtrato pure violetto. La fucsina, il vino e la chinina danno un miscuglio di color violetto, mai azzurro, come quando la chinina è mescolata al solo vino; il filtrato, anche in questo caso, è sempre violetto: la parte insolubile si scioglie nell'alcol assoluto in azzurro violaceo: colla chinina adunque si può in un vino dimostrare la presenza della fucsina o del surrogato di carminio.

La *materia colorante dei fiori di malva,* estratta dai fiori secchi con alcol diluito e poco acido tartarico, dà, colla chinina, colorazione violetta; il filtrato è incoloro, ma assume color rosso cogli acidi. — La parte insolubile, di colore violaceo, passa al verde coll'ammoniaca. — Da miscugli di questa materia colorante col vino non ottiensi colorazione così netta da poter distinguere fra loro queste due materie coloranti.

Le *vinoline,* e quindi anche i *Rossi Ponceau* colla chinina producono un miscuglio violetto. — Questa base non fissa questi coloranti: ragione per cui, mescolando con esse del vino e della chinina, non si ha, come nel caso del vino solo, colore azzurro, ma violetto: — filtrando e lavando, la parte insolubile è azzurra, il filtrato è violetto. — Anche queste materie coloranti si potranno, col mezzo della chinina, scoprire nei vini.

Il violetto di metile è trattenuto dalla chinina, almeno in buona parte. — Quindi mescolando una debole soluzione di essa con vino e chinina e filtrando, il filtrato è azzurro come nel caso del miscuglio solo di chinina e vino. — La parte insolubile è di colore violetto o azzurro violaceo e si scioglie con eguale colorazione nell'alcol assoluto, per passare all'azzurro-violetto coll'ammoniaca, ed al rosso cogli acidi.

Coll'orsellina R e chinina si ha un miscuglio violetto; il filtrato è pur violetto. La chinina adunque trattiene in parte questo colorante: motivo, per cui mescolandolo con vino e chinina, si ha una miscela violetta; il filtrato è violetto; e la parte insolubile, parimente violetta, si scioglie nell'alcol formando soluzione dello stesso colore, che coll'ammoniaca passa al verde.

Con soluzione di Dahlia 4 B e chinina si ha un miscuglio violetto ed un filtrato del medesimo colore. — Lo stesso accade mescolando questa materia colorante con chinina e vino. — La parte insolubile coll'alcol dà un liquido violetto, che tale si mantiene anche per aggiunta di ammoniaca.

Un miscuglio di vino, di safranina e chinina è violetto; il filtrato, pure violetto, assume una

0,163 d' acido solforico trasformabili in solfato di chinidina. — Se questo metodo è sensibile, esso però non può servire per una determinazione quantitativa, perchè il liquido idralcolico, da cui si separa il miscuglio di cloroformio e di alcol, contiene sempre quantità più o meno apprezzabili di solfato di chinidina, che sfugge a questi due solventi, mentre, sciolti l' uno nell' altro, precipitano.

Essendo l' urina un liquido acido e contenendo proporzione non indifferente di solfati, nacquemi il dubbio che, malgrado che in questo liquido non si verifichi, come nel vino, la circostanza della presenza di un acido il quale, come il tartarico, reagendo sul solfato potassico, si muti in sale insolubile, trasformando il solfato neutro medesimo in bisolfato, pure, per l' azione degli acidi in esso contenuti, piccola porzione di essi potesse mutarsi in bisolfati. Nè male m' apposi perchè, sottoposta una piccola porzione di urina (Cmc. 60) al trattamento su descritto per la ricerca dei solfati acidi, nella soluzione finale ottenni intorbidamento sensibile col cloruro di bario: mentre nulla ottenni, rinnovando l' esperimento sopra la stessa quantità della medesima urina normale e sulla stessa prima neu-

---

bella fluorescenza verde per aggiunta di molto alcol. — La parte insolubile violetta dà coll' alcol soluzione violetta con fluorescenza verde.

Mescolando vino con *soluzione di Eosina* e chinina, si ottiene un liquido violaceo; violetto è pure il filtrato. La parte insolubile si scioglie nell' alcol con fluorescenza verde, la quale persiste malgrado l' aggiunta di ammoniaca, ma scompare per successiva aggiunta di acidi, che fanno inoltre assumere al liquido colore violetto.

Dei limiti di sensibilità di queste diverse colorazioni e delle condizioni, in cui bisogna operare per trarne criterî utili onde riconoscere le sofisticazioni dei vini, mi occuperò in altra nota.

La colorazione azzurra che la chinina e la chinidina producono col vino è dovuta a una combinazione insolubile che quelle basi formano colla materia colorante del vino che ha funzione acida. — Una prova di ciò l' abbiamo nel fatto da me accertato che molte altri basi organiche danno la stessa colorazione; tali sono l' atropina, la codeina, la cinconidina, la brucina, la morfina, la tebaina, ecc. Solo si osserva che fra queste, quelle che hanno potere basico più pronunciato e sono alquanto solubili nell' acqua danno colorazione azzurra, che, con eccesso di base, passa col tempo al verde-azzurro scuro; così ad esempio si comportano, l' atropina, la codeina, la brucina, la daturina, l' emetina: altre, meno energiche, da prima danno tinta violetta che passa all' azzurro; così fanno la tebaina, la morfina, la cocaina, la papaverina, la delfina, la delfinina, la solanina, la licococtina, la cinconidina, la cinconina, l' anilina e la stricnina; altre infine svolgono solo color violetto, come la narcotina, la toluidina, la difenilamina, l' ecgonina, l' aconitina, la caffeina, e la digitalina; di guisa che in queste diverse tinte si ha un criterio per indurne la maggiore o minore energia di queste basi. — Ma non sono le sole basi organiche, che danno queste colorazioni; bensì anco le minerali: così, tra le insolubili, l' ossido di magnesio: da quelle che sono alquanto solubili, come la barite, la stronziana e la calce, se la quantità di queste è minima, può ottenersi colorazione prima violetta, poi azzurra, infine verde bottiglia. Così fanno pure gli alcali caustici, soda e potassa, colle soluzioni diluitissime delle quali si possono ottenere, a seconda della quantità che si impiega, colore violetto, azzurro o verde scuro. — Ma per riconoscere la materia colorante del vino, e differenziarla da altre, con cui si sofisticano i vini, servono meglio le basi organiche che insolubili, si limitano a colorare i vini in azzurro. Quando, ad esempio, si aggiunga ad una soluzione alcolica concentrata di chinina del vino, non si ha più colorazione azzurra, ma verde azzurra, ed anche verde, come quando s' impiegano basi minerali solubili (barite, soda, potassa).

tralizzata con soda caustica. — Più forte ottenni l'intorbidamento da urina precedentemente concentrata. Non credo priva di qualche interesse questa osservazione. — È chiaro il vedere, come il metodo da me proposto per la ricerca dei bisolfati possa servire anche per quella dell' acido solforico libero: — poiché anche in questo caso, anzi meglio, si ha formazione di solfato di chinidina di guisa che non si può avere nel medesimo un mezzo distintivo fra quest' acido ed i suoi sali acidi, e quindi come detto metodo non possa servire alla scoperta della sofisticazione dei vini a mezzo dell' olio di vetriolo. — La ricerca dell' acido solforico, aggiunto ai vini, diventa oggi delle più difficili, dopo che ora non è più lecito dubitare che, nei vini naturali, e ancor più nei vini gessati, esistono proporzioni più o meno notevoli di solfati acidi. — Se la quantità d' acido solforico aggiunto è piccola, non è per anco dimostrato che esso rimanga libero nei vini, e resta il dubbio ragionevole che esso, agendo sul bitartrato di potassio, non si trasformi in bisolfato. — In quest' ultimo caso riescirebbe impossibile il decidere, se il bisolfato che si trova nei vini sia quello proveniente dall' azione dell' acido solforico aggiunto, o quello che esiste naturalmente nei vini o che si forma in seguito all' ingessamento.

Fu da taluno proposto per la ricerca dell' acido solforico libero nei vini il seguente metodo. — Si aggiunge al vino sospetto dell' ossido di magnesio, e, filtrato il miscuglio, si fa evaporare a secchezza e calcinasi; trattato il residuo con acqua, nel liquido nuovamente filtrato si fa ricerca della magnesia col cloruro di ammonio, coll' ammoniaca e col fosfato sodico: un precipitato più o meno abbondante di fosfato ammonico-magnesiaco sarebbe prova che il vino fu sofisticato con acido solforico. — In questo metodo l' ossido di magnesio satura tutti gli acidi liberi e sali acidi del vino, e quindi anche l' acido solforico aggiunto: — fra i sali di magnesio formatisi solo il solfato di magnesio è indecomponibile alla temperatura, a cui si opera, mentre gli acetati e tartrati trasformansi in carbonato insolubile; ragione per cui, riprendendo con acqua, dei detti sali magnesiaci solo il solfato passa in soluzione: dal trovarsi in questa quantità più o meno grande di magnesia, si deduce che al vino fu aggiunto una proporzione più o meno grande di acido solforico. — Ma, contenendo i vini naturali o gessati del bisolfato potassico, l' ossido di magnesio non può non formare colla metà dell' acido solforico di questo sale solfato di magnesio: oltre di che, come ho potuto convincermene con dirette esperienze, durante l' evaporazione dei vini trattati colla magnesia e la calcinazione del residuo, fra l' acetato, malato, tannato, succinato e tartrato di magnesio ed il solfato neutro di potassio o contenuto naturalmente nel vino, o che si forma in seguito al trattamento con quell' ossido, se il vino contiene bisolfato di potassio, fra quei sali di magnesio, ripeto, e il solfato bipotassico, avviene

parziale doppia decomposizione, uno dei prodotti della quale è il solfato di magnesio. — Questo sale adunque può formarsi anche nei vini naturali, e meglio nei gessati, trattati con magnesia, senza che per questo sia loro stato aggiunto acido solforico.

Nè meglio raggiungono lo scopo certe reazioni proposte per iscoprire l'acido solforico libero, come quello di aggiungere a una soluzione di acetato ferrico molto diluita qualche goccia di uno sciolto di solfocianato di potassio, il quale non colora in rosso sanguigno questa soluzione, purchè molto diluita e non contenga cloro e acetati alcalini: le fa invece assumere questa colorazione l'aggiunta di poche goccie di un vino contenente acido solforico libero: ma a parte la considerazione che questa reazione non sarebbe esclusiva dell' acido solforico libero, ma propria anche degli altri acidi minerali, come il cloridrico ed il nitrico, essa è poi comune anche ai solfati acidi, come ebbi a constatare io stesso.

Nè più attendibile è il metodo che il Ministro di Grazia e Giustizia di Francia ha recentemente raccomandato ai procuratori generali della Repubblica per scoprire l' acido solforico nei vini (1). Esso consiste nel far evaporare il vino a piccolo volume, circa al $^{1}/_{20}$, nel riprendere il residuo con tant' alcol a 95° C, quanto è necessario per ricondurre il vino stesso al volume primitivo, e, scacciato l' alcol, nell' aggiungere al filtrato acido nitrico e cloruro di bario: un intorbidamento o precipitato sarebbe indizio d' acido solforico libero. — Ma, come ho dimostrato, i vini contengono bisolfato potassico. — Ora a questo sale l' alcol toglie acido solforico. — Ma supposto anche che nei vini naturali e gessati i solfati fossero i neutri, è evidente che l'acido tartarico, durante la concentrazione, non potrebbe rimanere indifferente verso il solfato neutro di potassio, che sarà ridotto a bisolfato, al quale l' alcol poi toglierebbe acido solforico.

Non parlo di altri metodi, come quelli fondati o sul modo di colorazione delle carte reattive, che presentano le ceneri o il carbone dei vini, o sulle reazioni col mezzo dell' acetato di piombo, o mediante il joduro di potassio, salda d' amido e acetato ferrico, o mediante il violetto di metile: taccio del metodo del Nessler, fondato sull'annerimento o incarbonimento della carta, e di quello del Lassaigne, basato sulla diversa colorazione che sulla carta da scrivere produce un vino genuino e un vino addizionato di acido solforico: taccio, ripeto, di questi metodi, perchè l' esperienza ha dimostrato che essi o non sono applicabili che ai vini, ai quali fu aggiunto acido solforico in quantità grande, e quale non suole adoprarsi, oppure possono dare gli stessi risultati anche coi vini gessati e con vini, ai quali furono aggiunti altri acidi minerali diversi dal solforico.

---

(1) Journal de Pharmacie et Chimie, 1891. Fevrier, N° 4, pag. 182.

L' unico metodo, che a parer mio dà qualche risultato attendibile, è quello proposto dal su ricordato Professor PROSPERO FERRARI (1). Questo metodo è una felice applicazione di quello del BERTHELOT e del FLEURIER per la determinazione quantitativa del bitartrato di potassio nei vini. — Per questo dosamento, secondo detto metodo, non si concentrano i vini, nei quali quindi i rapporti fra i diversi componenti non si alterano, come accade allor quando si fanno evaporare. — Si dibatte un determinato volume di vino col doppio volume di un miscuglio di alcol assoluto e di etere: col bitartrato di potassio precipita il solfato neutro di potassio, mentre al liquido alcolico-etereo passa l' acido solforico tolto ai bisolfati, e anche quello che vi si trovasse fuori di combinazione, ossia l' aggiunto: evaporato il liquido, si può determinare la quantità dell'acido solforico, trasformandolo in solfato baritico, come nello stesso modo si può stabilire la quantità dell' acido solforico combinato al potassio, che si trova nel precipitato, prodotto nel vino dal miscuglio di alcol e di etere.

Anche il Professor FERRARI, applicando tale metodo, ha dimostrato come nei vini naturali i solfati siano gli acidi: poichè ha trovato che al miscuglio alcolico-etereo passa acido solforico, la cui quantità è con grande approssimazione eguale a quella esistente nel solfato neutro di potassio, separato dalla miscela di alcol e di etere. — Egli poi, praticando lo stesso metodo sui vini, ai quali aveva aggiunto quantità anche non grande di acido solforico, ha potuto accertare, che al miscuglio alcolico-etereo passa una quantità di acido solforico superiore a quella necessaria per trasformare il solfato neutro di potassio, precipitato da detto miscuglio, in bisolfato. — Con questo metodo, che necessariamente deve essere quantitativo, si conchiuderà che ad un vino fu aggiunto acido solforico, allorchè nel liquido alcolico-etereo si troverà non solo acido solforico, poichè ciò si osserva anche nei vini naturali e gessati, i quali contengono bisolfati, facili a cedere acido solforico a detto miscuglio, ma quest'acido dovrà trovarsi in quantità superiore a quella che si richiede per formare coi solfati neutri, precipitati dal medesimo, solfati acidi. — Però anche col metodo del FERRARI, che certamente è il miglior dei proposti, non è escluso che si possano aver risultati incerti in quei casi, in cui l' acido solforico, aggiunto in piccola proporzione, decomponesse il bitartrato di potassio, mettendo in libertà acido tartarico e trasformandosi esso tutto in bisolfato: in questo caso il rapporto quantitativo fra il solfato neutro di potassio e l' acido solforico, sarebbe come nei vini genuini e gessati, e non si potrebbe quindi conchiudere per l'aggiunta dell'acido solforico. — La constatazione adunque

(1) Luogo citato, pag. 70.

nei vini dell'acido solforico aggiunto ad essi è delle più difficili e delicate, e non sempre può farsi con certezza sì da escludere ogni dubbio.

Se col mezzo della chinidina non è possibile dimostrare che ad un vino naturale e gessato venne aggiunto acido solforico, contenendo esso in ambo i casi bisolfati, capaci come questo acido di formare solfato di chinidina, con quella base però si potrà con certezza scoprire nei vini l'acido nitrico (1), poichè quest'acido, sia libero che combinato, non esiste nei vini normali (2), e d'altra parte il nitrato di chinidina, che si forma trattando il vino contenente acido nitrico, passa al miscuglio di alcol e cloroforme: nel residuo dell'evaporazione della soluzione si riscontra l'acido nitrico, sciogliendolo a freddo nell'acido solforico concentrato, e la soluzione solforica dividendo in tre parti; in una delle quali si pone qualche cristallino di brucina, che si colorirà in rosso: ad un'altra si aggiunge un po' di polvere di solfato ferroso che assumerà colorazione rosso-violacea; e nell'ultima si mette qualche cristallino d'acido fenico, il quale, per continuata agitazione e, più presto, per l'aggiunta di una goccia d'acqua produrrà colorazione verde-azzurra, che passa al rosso per aggiunta di altra acqua. — Ma la soluzione solforica del residuo dell'evaporazione del miscuglio di alcol e di cloroforme, oltre al nitrato di chinidina, avendo sciolto qualche principio estrattivo ed un po' di materia colorante del vino, suol essere colorata in bruno; ragione per cui delle tre reazioni cromatiche dei nitrati solo quella, che si ottiene col fenolo, riesce evidente.

Per evitare questo inconveniente si tratta il residuo, prima di scioglierlo nell'acido solforico, con soluzione di carbonato di potassio puro e si fa bollire. — Con ciò, mentre precipita la chinidina, il suo nitrato è mutato in nitrato potassico; si filtra, e alla soluzione filtrata si aggiunge acido acetico fino a totale decomposizione dell'eccesso del carbonato alcalino: si evapora a secco, si tratta il residuo con alcol assoluto o con un miscuglio a parti eguali di alcol assoluto e di cloroforme, che sciolgono la materia colorante del vino insieme all'acetato alcalino, ma non il nitrato: finalmente si scioglie il nuovo residuo nell'acido solforico per ottenere da questa soluzione le sù accennate reazioni dell'acido nitrico.

Non si può applicare il metodo fondato sull'uso della chinidina alla ricerca dell'acido cloridrico nei vini, perchè nel miscuglio alcolico-etereo,

---

(1) Di recente è stato proposto l'acido nitrico (acqua forte del commercio) in sostituzione del gesso, per rendere i vini di color più vivo, limpidi e facilmente conservabili. « Rivista di Merciologia » Anno 1°, 1891, fascicolo 1°, pag. 13.

(2) Piccolissime quantità di nitrati si potranno rinvenire nei vini allungati con acqua di pozzi che, specialmente nelle città, sogliono contenerne quantità più o meno sensibili. — Altrettanto dicasi dei vinelli. — Il nitrato di potassio però non passa al miscuglio di alcol e di cloroforme: vi passano per altro traccie di nitrato di calcio e di magnesio.

oltre al cloridrato di quella base, sono pur alquanto solubili i cloruri inorganici, i quali non sogliono mancare nei vini. — Se il metodo da me proposto non può servire alla ricerca dell' acido solforico libero nei vini, perchè contengono bisolfati capaci anch' essi, come quello, di formare solfato di chinidina, esso può però essere applicato alla ricerca del medesimo nei visceri cadaverici in casi di veneficio, perchè, astrazione fatta di traccie, che come abbiamo visto, esistono nelle urine, nel resto dell' organismo, non rinvengonsi normalmente, come nei vini, dei bisolfati: e se vi si rinvenissero questi non potrebbero provenire che da acido solforico introdotto nel medesimo. — La ricerca dovrebbe adunque essere fatta in tutti i visceri e liquidi dell' animale economia, tranne che nell' urina, nella seguente maniera. Si separano i visceri dai liquidi, coi quali sono mescolati e si tagliuzzano. Se non sono accompagnati dalla parte liquida, si fanno digerire con poca acqua, si fa bollire per un istante, si cola, spremendo: poscia si trattano a caldo con alcol assoluto: si cola di nuovo, spremendo, ed il liquido alcolico filtrato si fa evaporare per eliminare l' alcol ed al liquido acquoso residuo, unito all' altro, che trovavasi mescolato ai visceri, o che fu ottenuto. facendoli digerire con acqua, si applica il metodo gia descritto. — Con questo ho potuto scoprire l' acido solforico in grammi 200 di carne equina, alla quale avevo aggiunto tre centimetri cubici di acido solforico normale, corrispondenti a grammi 0,147 di acido solforico: SO^4H^2. — Il medesimo metodo può essere seguito anche nei casi di venificio mediante l' acido nitrico. Io potei dimostrare in gr. 200 di carne equina la presenza di grammi 0,063 di quest' acido, quantità di esso contenuto in un centimetro cubo di acido nitrico normale. — Se non che in questo caso non bisogna dimenticare che anche nelle urine sono contenute traccie di nitrati, provenienti dall' uso delle acque potabili o di cibi vegetali che ne contengono piccole quantità, e che fra i nitrati quello di potassio non è trasportato dalle sue soluzioni dal miscuglio di cloroforme e di alcol assoluto, mentre i nitrati di calcio e di magnesio vi sono solubili (1).

Ma collo stesso metodo non si può con buon risultato precedere alla ricerca dell' acido cloridrico in caso di veneficio, perchè i cloruri dell' organismo sono anch' essi alquanto solubili nel miscuglio di alcol e di cloroforme, come il cloridrato di chinidina.

---

(1) La reazione dell' acido nitrico col fenolo in soluzione solforica, alla quale ho accennato più sopra, riesce più bella e policromatica, quando si operi nel modo seguente. Aggiungendo al miscuglio solforico, il fenolo, si ha subito colorazione bruna; se si aggiunge una goccia o due di acqua, il colore passa al verde e poi all' azzurro; con qualche altra goccia di acqua si ha il color violetto che volge al rosso con ancora qualche goccia di acqua: con molta acqua si ha completa decolorazione; ma se, quando il liquido ha assunto color rosso, si aggiunga molto acido solforico concentrato, esso ritorna violaceo, e poi azzurro.

INTORNO
AD
ALCUNE ESPERIENZE DI ACUSTICA

NOTA

DEL PROF. EMILIO VILLARI

(Letta nella Sessione del 26 Aprile 1891).

(CON UNA TAVOLA)

Per mostrare i differenti stadî delle vibrazioni dei varî segmenti di una lastra vibrante e le interferenze da esse prodotte, si esegue nelle scuole l'antica esperienza del Hopkins col tubo di legno biforcato e provvisto di una membrana tesa. Con essa si mostra che la sabbia, cospersa sulla membrana, saltella quando nel tubo entrano onde concorde, e rimane immobile quando vi penetrano onde di segni contrari. Ma i movimenti della sabbia sono sempre così ristretti e limitati, che poco o punto riescono visibili ad uno numeroso uditorio.

Per eseguire, in proposito, delle esperienze più appariscenti, ed anche più chiare e dimostrative, mi sono giovato delle note capsule del König. L'apparecchio da me adoperato è disegnato nella fig. 1. Esso consta di una delle solite lastre circolari di ottone *ab*, fissata per il suo centro ad un sostegno in ferro *s*. Una colonna laterale *cc* porta un corsoio di ottone, che può fissarsi a varie altezze mercè la vite *d*, e sorregge all'estremità *e* un tubo biforcato terminato in due coni od imbuti *t*, *t*, ed una capsula manometrica *m*. Il tubo biforcato *tt* è doppio ed è, come quello dei canocchiali, scorrevole così che i due coni possono più o meno avvicinarsi fra loro, nonchè girare intorno agli assi *tt*, ed *me*. In tal guisa si può avvicinare alla lastra un solo dei coni, od entrambi; possono, altresì, disporsi a piacimento di contro ad ognuno dei suoi diversi segmenti vibranti.

Per sperimentare con questo apparecchio si cosperge la lastra di sabbia, e quindi fatta vibrare con l'archetto se ne osservano le linee nodali. Si dispone poscia uno od entrambi i coni sul prolungamento di una stessa linea

nodale, ed in modo che essa vadi secondo il diametro dei coni, e fatta di nuovo vibrare la lastra, in modo che rimangano inalterate le sue linee nodali, si vedrà, per via dello specchio ruotante, che la fiammella della capsula rimane affatto tranquilla, anche quando la lastra vibri vigorosamente.

Quando i coni sono simmetricamente disposti sulle linee nodali, in essi o non penetrano vibrazioni di sorte, essendo i nodi in equilibrio, ovvero le lievi vibrazioni prodotte dalle parti delle lastre laterali alle dette linee si annullano, perché opposte, e la fiammella della capsula rimane tranquilla.

Un simile fenomeno si osserva disponendo i due coni in corrispondenza di due segmenti vibranti contigui, e perciò in opposizione di fasi. Affinché tale esperienza riesca é necessario, che i coni sieno ad eguali distanze dalla lastra e simmetricamente disposti rispetto alle regioni ventrali vibranti. In tale esperimento, le vibrazioni aeree contrarie, prodotte dalla lastra nei coni incontrandosi si annullano, essendo esse eguali ed opposte; e perciò la capsula manometrica rimane affatto tranquilla. Ma se si rivolge in alto uno dei coni, come é indicato con la punteggiatura nella figura, così che esso non possa più raccogliere le ondulazioni sonore, allora la fiammella oscillerà subito vigorosamente, a cagione delle sole vibrazioni raccolte dall'unico cono rimasto in prossimità della lastra. Questa doppia esperienza riesce assai evidente e manifesta, per la grande differenza mostrata nei due casi dalla fiamma, osservata nello specchio ruotante; ed è molto istruttiva ed appropriata per un numeroso uditorio.

Se si dispongono i coni di contro a due segmenti della lastra che vibrano in concordanza di fasi fra loro, si vedrà oscillare fortemente la fiammella, ed il fenomeno non varierà sensibilmente se uno dei coni si pieghi in alto, come si praticava nel caso precedente.

Analoghe esperienze possono eseguirsi operando su ambedue le facce di una stessa lastra; e perciò ai coni dell'apparecchio precedente si sostituiscono, allora, due tubi di gomma di eguale lunghezza e di circa 1 cm. di diametro. Con essi, quasi tubi di prova o di assaggio, si possono raccogliere le vibrazioni prodotte nell'aria dai vari punti della lastra, approssimandone alle due facce le loro aperture. Così possono ripetersi ancora le varie esperienze descritte più sopra, operando su una sola faccia della lastra. Si determinerà e stabilirà, inoltre, dal vedere tranquilla o dall'oscillare della fiammella, l'accordo od il disaccordo fra le vibrazioni dei vari segmenti della lastra vibrante, e si troveranno i risultati dell'esperienza concordi con le previsioni.

Inoltre i fenomeni d'interferenze, prodotti dalle vibrazioni delle lastre, si possono mostrare in un altro modo ancora molto istruttivo.

Si dispone sopra una lastra circolare vibrante, ed a piccola distanza da essa, un largo imbuto di vetro *Iq*. fig. 1, in modo da coprirla quasi per intiero.

Si fa poi seco vibrare la lastra così da dividerla, per due linee nodali, in quattro segmenti vibranti. Le oscillazioni eguali ed opposte, prodotte in tal caso dai vari settori vibranti, debbono nell'imbuto elidersi scambievolmente. Difatti, unendo al collo di esso un lungo tubo di gomma ed ascoltandone le vibrazioni in un'altra stanza, per non essere perturbato dal suono diretto, ci si convincerà che le vibrazioni raccolte dall'imbuto reciprocamente si sono distrutte. Se invece s'attacca alla base dell'imbuto una lastra di ottone tagliata nella forma *pq*, e tale da raffigurare due segmenti della lastra vibrante, opposti al vertice, e quindi la si dispone in maniera da coprire i due segmenti corrispondenti di essa, allora entreranno nell'imbuto solo le vibrazioni concordanti dei due segmenti rimasti liberi, ed il suono si sentirà col tubo di gomma assai rinvigorito.

Se al collo dell'imbuto s'innesti la solita capsula manometrica, l'esperienza può rendersi palese ad un esteso uditorio. Quando si farà suonare la lastra libera, così da raccogliere nell'imbuto tutte le vibrazioni indotte nell'aria, la fiammella osservata nello specchio girante apparirà affatto tranquilla: si vedrà invece fortemente oscillare quando, per via della lastra aggiunta all'imbuto, si sopprimeranno in esso le oscillazioni dei settori alterni.

L'uso dei coni, o semplicemente dei tubi di gomma uniti alla capsula, si presta assai bene per lo studio dei nodi e dei ventri nelle campane. Perciò si porta l'estremo aperto del cono o del tubo a piccola distanza dalla campana vibrante, e nelle sue varie regioni, sì della faccia esterna che interna di essa, e dall'oscillare o no della fiammella, si determinerà la posizione dei ventri e dei nodi della campana.

Nelle lastre vibranti è certamente degno di nota la esistenza di una superficie di interferenza che ho osservata, e che non so se da altri sia già stata notata. Essa costituisce come il prolungamento della superficie della lastra, estendendosi un poco intorno ad essa, e per determinarla si può procedere nei modi seguenti.

Si prende una grande lastra metallica e per un foro che passi pel suo centro si sospenda con una cordicella in posizione verticale. Quindi si batte la lastra con un martello di gomma, così che essa vibri e giri intorno alla corda. In tal caso s'avvertirà, che la nota da essa prodotta si spegne quasi affatto, tutte le volte che il prolungamento del suo piano passi pel nostro orecchio. Il fenomeno è così distinto che s'osserva senza alcuna difficoltà e comunque sia stata percossa e suoni la lastra.

La stessa esperienza può eseguirsi più comodamente fissando la lastra pel suo centro ad un manubrio di legno, pel quale si sorregge con una mano; e poi si percuota col martello di gomma o si strisci con l'archetto in modo da metterla in ampie oscillazioni; quindi approssimandolo al-

l'orecchio, si avvertirà l'interferenza ogni volta che l'orecchio si trovi sul prolungamento del piano della lastra.

Per rendere manifesto questo piano d'interferenza ad un numeroso uditorio si può fare uso del solito metodo della capsula manometrica, adoperando l'apparecchio della fig. 1, più sopra descritto, e con un solo cono laterale, disposto col suo asse orizzontalmente, invece dei due precedentemente adoperati. Detto cono porta la solita capsula manometrica, provvista del suo beccuccio a fiamma. Quando la lastra vibra, attaccata dall'archetto, se il cono trovasi sopra o sotto il piano della lastra e fuori del suo perimetro, ma vicinissima ad essa, la fiammella oscillerà distintamente per le vibrazioni aeree che riceve. Se il piano della lastra risulta bisettrice al cono la fiammella rimane tranquilla. Meglio però l'esperienza riesce se la capsula, spoglia del cono anzidetto, si avvicini direttamente, con la sua membranella messa a nudo, alla lastra nel modo su accennato.

L'origine di questo piano di interferenza è semplicissima. Quando un segmento d'una lastra entra in vibrazione si producono nell'aria, a partire dalle sue due facce, onde eguali e contrarie: e fra loro vi deve essere una regione d'aria tranquilla, che deve corrispondere al prolungamento del piano della lastra. Ovvero possiamo anche dire, che si nel cono come nel tubo di gomma o nel meato uditivo, quando sono opportunamente disposti verso la lastra vibrante, entrano onde eguali e contrarie e perciò devono annullarsi.

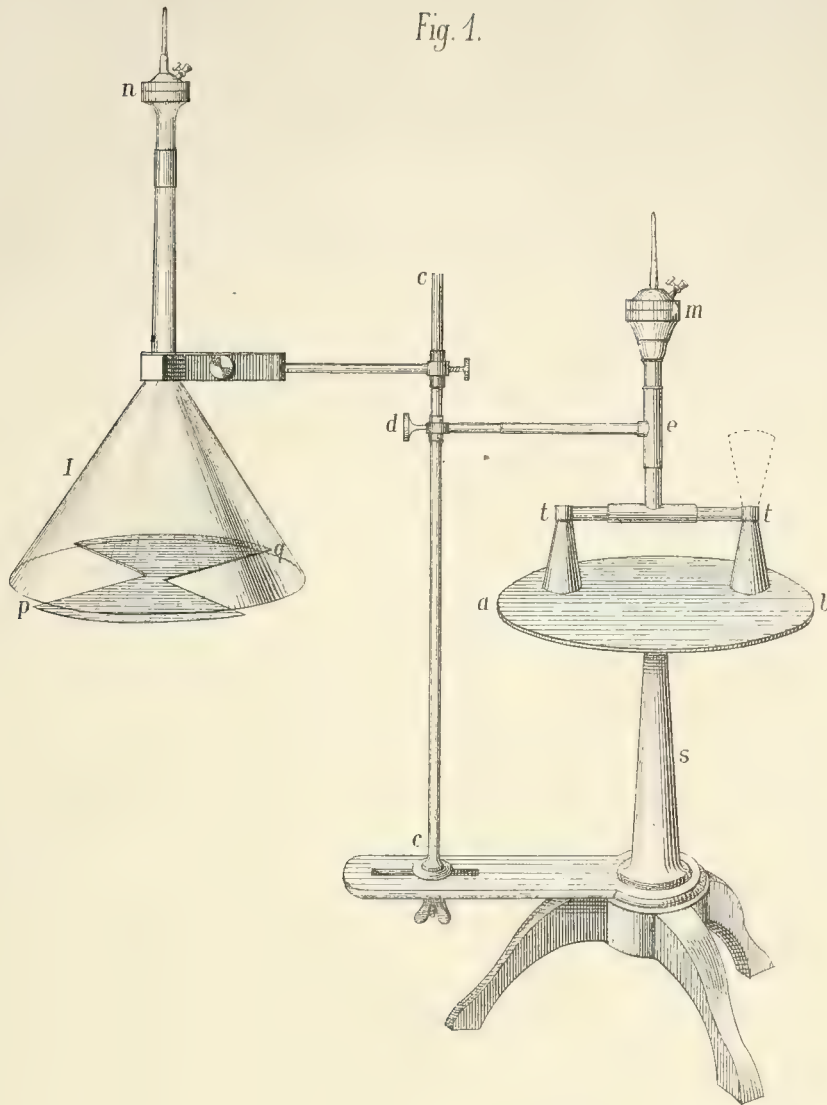
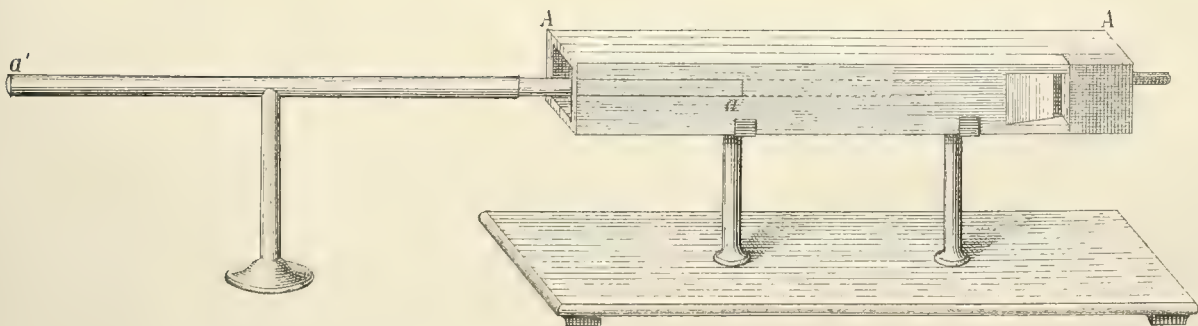
Un metodo analogo può servire a studiare lo stato della colonna di aria nei tubi sonori. Riesce, in tali ricerche, assai comodo il tubo sonoro con una parete di vetro che si adopera per varie esperienze di acustiche. Si dispone il tubo AA, orizzontalmente sopra un appropriato sostegno fig. 2; e quando esso suona vi si introduce un tubo di vetro aa' fissato ad apposito sostegno e riunito in a', per via di un tubo di gomma, ad una capsula manometrica. Se la canna dà la nota fondamentale, ed il tubo $a'a$ vi si introduce con l'estremo a sino a metà della canna, la fiamma della capsula vibrerà vigorosamente. In tal caso esiste un nodo nel mezzo della canna, e le condensazioni e rarefazioni dell'aria si comunicano dal tubo alla capsula ed alla fiamma. Estraendo il tubo, e portandone l'estremo a alla fine della canna, la fiammella rimane tranquilla: ma essa vibra non appena il capo del tubo s'introduce nella canna, od anche si pone, semplicemente a livello della sua estremità.

Se si fa rendere alla canna la sua ottava si osserva, che il mezzo della canna ha un ventre, giacchè portandovi l'estremo a del tubo la fiammella rimane affatto tranquilla. Questo fatto ci dice inoltre che nei ventri l'aria realmente non varia punto di densità; e perciò l'oscillare della fiamma, che si manifesta appena s'introduce l'estremo a del tubo nella canna, ci

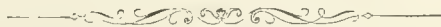
Fig. 1.

Fig. 2.

E. Contoli, inc.

Lit. G. Wenk e Figli — Bologna.

mostra che il vero ventre si riscontra subito fuori della canna, ove l'aria realmente non varia di densità, e non nella canna medesima. Quando la canna dà la sua ottava, se si porta l'estremo *a* ad $\frac{1}{4}$ da ciascuno estremo si scorge subito, dall'oscillare della fiamma, la presenza di un nodo, come la teoria ci dice.

È da avvertire che è bene di prendere un tubo di vetro o di ottone di 5 o 6 mm. di vano interno, e non più per non alterare l'altezza della nota della canna e la posizione dei suoi nodi: ed è inoltre necessario, in queste esperienze, di fare uso di una canna che sia facile a dare l'ottava superiore, anche quando trovasi internamente il tubo esploratore.

Quando la canna dà il suo primo armonico si producono due nodi, ciascuno ad un quarto da ogni estremità sua, nei quali l'aria trovasi naturalmente, in opposizione di fasi: val quanto dire che quando in uno vi è condensazione nell'altro vi è rarefazione. Per mostrare questo fatto ai molti miei scolari mi sono servito di uno dei noti tubi del König a tre capsule manometriche, destinato a mostrare, a vero dire, imperfettamente, i vari nodi nelle diverse ma niere di sue vibrazioni. Ho riunito con sottili tubi di gomma le due capsule estreme con una terza capsula manometrica, ed ho fatto dare alla canna il suo primo armonico. In tal caso si osserva che la fiam mella di questa terza capsula manometrica rimane tranquilla, essendo opposte le ondulazioni comunicate dai due nodi alla detta capsula. Appena, però, si chiude uno dei tubi di gomma, unito ad una delle due capsule della canna, la fiammella comincia a vibrare per le oscillazioni comunicatele da una sola capsula non interferite da quelle dell'altra.

RICERCHE SPERIMENTALI

INTORNO A CERTE SCINTILLE ELETTRICHE

COSTITUITE DA MASSE LUMINOSE IN MOTO

MEMORIA

del Professore **AUGUSTO RIGHI**

(Letta nella Sessione del 26 Aprile 1891).

CON TRE TAVOLE

Introduzione.

1. Ho dimostrato in una breve Nota (1) che la scarica d'un condensatore può, in certe circostanze, produrre nell'aria un fenomeno luminoso diverso da quelli finora noti, e cioè invece di una scintilla che si mostra simultaneamente lungo tutto l'intervallo che separa i due elettrodi, può osservarsi dapprima una luminosità sull'elettrodo positivo, la quale poscia si muove verso l'altro elettrodo, in guisa da far nascere in chi la guarda l'illusione di un tratto luminoso che si allunga, e perciò da rassomigliare più o meno alle così dette *folgori progressive* descritte da diversi osservatori.

In quella medesima Nota feci conoscere le condizioni necessarie o favorevoli alla produzione del curioso fenomeno, le quali principalmente consistono nell'uso di forti resistenze introdotte nel circuito di scarica, e nella rarefazione conveniente dell'aria fra i due elettrodi, ed ebbi ad esprimere il proposito di studiare questo nuovo genere di scariche con una certa estensione per mezzo della fotografia.

Avendo già raccolto oltre ad un migliaio di immagini fotografiche della scarica, prodotta in condizioni svariatissime, consacro la presente Memoria all'esposizione dei risultati ottenuti, avvertendo che un cenno di alcuni di questi fu già da me reso di pubblica ragione (2).

---

(1) Mem. della R. Acc. di Bologna, serie V, tomo I.
(2) Rend. della R. Acc. dei Lincei, seduta 19 aprile 1891.

I. Gli apparecchi adoperati.

2. *Macchina e condensatore.* Non descriveró che sommariamente questi apparecchi. La macchina d' Holtz a quattro dischi, chiusa in cassa d'aria secca, puó dare, in ogni condizione atmosferica, scintille di oltre 30 cent. di lunghezza. Nelle esperienze che quí devo narrare non ho mai fatto uso peró che di potenziali assai minori di quelli che corrispondono a quelle scintille.

Il condensatore é formato di sei batterie, che possono disporsi o in superficie, o in serie in vari modi a norma del bisogno. Ogni batteria é formata di diciotto vasi cilindrici di vetro alti mezzo metro e del diametro di 15 a 16 centimetri, armati per metá della loro altezza e ben verniciati nel resto. D' ordinario le armature interne di tre delle batterie, riunite in modo da formarne una sola di 54 vasi furono poste in comunicazione con uno dei conduttori della macchina, e le armature interne delle tre altre, furono similmente riunite coll' altro conduttore, mentre le armature esterne delle batterie comunicavano fra loro e col pavimento. La capacitá del sistema era cosí equivalente a quelle di 27 vasi colle due armature direttamente collegate ai due conduttori della macchina, e precisamente a quasi $\frac{1}{5}$ di micro-faraday. Alcune volte impiegai capacitá minori, che indicheró in quel che segue dando il numero di vasi equivalente.

3. *Apparecchi per la scarica.* Ho fatto uso principalmente dei seguenti apparecchi.

Il primo (fig. 1), che chiameró sempre (A), é quello descritto nella Nota precedentemente citata.

Esso é un largo tubo di vetro (diametro 11 c. lunghezza 45 c.) con elettrodi che facilmente possono scambiarsi e porsi anche a diverse distanze, corredato di una tubulatura a rubinetto R onde poter variare la pressione dell' aria interna, e d'un manometro M che misura questa pressione.

Il secondo (B) (fig. 2) é tutto in vetro, ha 4 c. di diametro ed é munito di elettrodi filiformi di platino a, b, saldati nella parete, come pure di due tubulature con rubinetti r, r', e di un manometro m. Esso é comodo per le esperienze in gas diversi dall' aria.

Il terzo (C) é simile a (B), solo é piú sottile (diametro 1 c.).

Il quarto (D) (fig. 3) é esso pure tutto in vetro ed ha una tubulatura con rubinetto R. Gli elettrodi a, b, sono d' alluminio dorato e terminano in palline di circa 1 c. di diametro. Il diametro del recipiente é circa 11 c., e la distanza fra le sfere a, b, press' a poco 30 c.

Oltre a questi apparecchi ne adoperai altri di forma simile a quello della fig. 2, ma senza manometro né rubinetti, e chiusi alla lampada, onde averli sempre pronti per riprodurre certe fasi particolari dei fenomeni. Essi sono dunque dei veri tubi di Geissler della forma della fig. 4.

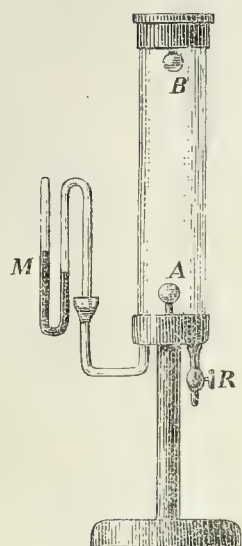
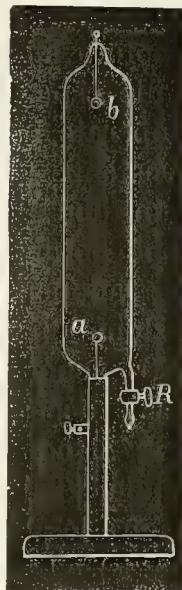



Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.

L'apparecchio (D) fu costruito dal Müller a Bonn; gli altri furono costruiti in laboratorio.

4. *Circuito di scarica.* Le comunicazioni fra le armature del condensatore e l'apparecchio di scarica furono fatte con lunghi e grossi tubi d'ottone. Un commutatore (fig. 5) (del quale mi valgo da tempo con vantaggio) la cui costruzione risulta chiaramente dalla figura, nella quale *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* sono cilindri di ebanite, *m n* è la base di legno, ed il resto è ottone, permette di dare alla scarica la direzione che più piace. I conduttori *g h* comunicano col tubo di scarica; *i*, *l* colle armature del condensatore.

Oltre all'apparecchio per la scintilla il circuito di scarica suol comprendere delle resistenze ed uno spinterometro con sfere d'ottone di 4 cent. di diametro. Le resistenze sono formate con cannelli di vetro (fig. 6) chiusi in basso e contenenti acqua distillata. Un elettrodo di platino *a*, terminato a spirale piana, è saldato in basso, mentre un elettrodo analogo *b* è saldato in un tubo sottile di vetro *t* passante per un foro del tappo che chiude il cannello più largo.

Avendo osservato che la resistenza offerta da una di tali colonne d'acqua diminuisce ad ogni scarica (fenomeno del quale non saprei ora assegnare

con sicurezza la causa), così fui costretto ad adottare il partito di mutare spessissimo l' acqua distillata. Ho sempre fatto uso dell' acqua d'una stessa provenienza (Istituto di Chimica),senza di chè i risultati non sarebbero mai stati concordanti. Giudicai inutile misurare le resistenze adoperate, giacchè è noto che la resistenza dell' acqua distillata è influenzata enormemente da traccie di sostanze sciolte, per cui i numeri che avrei trovato non avrebbero potuto ad ogni modo servire nel caso di una eventuale ripetizione delle mie esperienze. Perciò indicherò, quando sarà necessario, le resistenze adoperate in lunghezze di colonna di un c^2 di sezione. Naturalmente per resistenze piccole, p. es. di 4 o 5 cent. d' acqua non si poteva adoperare un tubo avente la sezione d' un centimetro quadrato, giacchè la scarica avrebbe potuto produrre una scintilla nel seno del liquido con rottura del tubo; adoperai invece cannelli assai più ampi con colonne d' acqua proporzionatamente più lunghe.

La fig. 7 mostra schematicamente la disposizione degli apparecchi, astrazione fatta da certi accessori che vennero aggiunti per scopi speciali. C è il condensatore, M il commutatore della fig. 5, R la colonna d' acqua, A la scintilla addizionale, T il tubo di scarica. Come si vede, al momento della scarica si forma fra le palline dello spinterometro una scintilla (che diremo *scintilla addizionale*) ed in pari tempo si produce una scintilla, od altro fenomeno luminoso, entro l' apparecchio.

5. *Specchio girante e fotografie.* Per istudiare i caratteri della luminosità che si produce entro l' apparecchio, se ne guarda l'imagine riflessa da un specchio piano verticale, alto 41 cm. e largo 53 cm., mantenuto in rota-

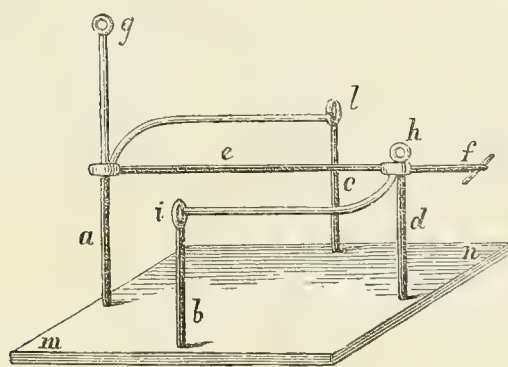
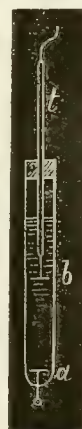
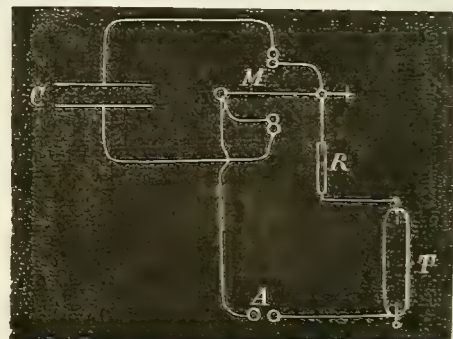



Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7.

zione uniforme intorno ad un asse verticale per opera di un roteggiò a peso. Inclinando più o meno le alette del regolatore di questo si può variare la velocità angolare dello specchio. In generale questa fù o di un giro in circa due secondi, o di un giro in cinque o sei secondi. Per espe-

rienze di lezione è preferibile assai non adoperare specchio girante, ma far girare lo stesso apparecchio intorno ad un asse parallelo alla retta che và da un elettrodo all' altro, giacchè in tal modo il fenomeno è visibile da tutti gli uditori simultaneamente.

Qualche volta uno specchio verticale fisso era posto di lato allo specchio girante; esso mostrava un' immagine fissa della luce prodotta nell' apparecchio, collocata di fianco all' immagine mobile. Colla macchina fotografica si potevano ritrarre, volendo, in pari tempo le due immagini.

Onde far sì che la scarica avvenga precisamente quando lo specchio girante è rivolto in una determinata direzione, l' asse dello specchio S (fig. 8) porta un braccio d' ebanite AB cui è fissato un filo d' ottone CD piegato a U, i cui due rami, che sono orizzontali, strisciano su due archi metallici MN, PQ, fissi e posti l' uno sotto l' altro, durante una certa porzione di giro dell' asse. È solo quando avviene questo strisciamento che il circuito di scarica è completo nel modo indicato dalla fig. 7.

Fig. 8.

È facile poi collocare i due archi metallici in modo che il contatto fra essi ed il filo mobile abbia luogo precisamente durante tutto il tempo nel quale l' immagine dell' apparecchio data dallo specchio è visibile dal luogo ove trovasi lo sperimentatore, oppure ove è collocato l' obbiettivo fotografico.

Quest' ultimo è un obbiettivo doppio da ritratti di Voigtländer, le cui lenti hanno oltre dieci centimetri di diametro. Fu sempre adoperato senza diaframmi, e tenuto il più delle volte a tal distanza da dare immagini di dimensioni esattamente la decima parte del vero.

Trovai buonissime le lastre sensibili del Lumière di Lyon (marca *bleu*), e di queste feci sempre uso, adoperando un rivelatore all' iconogeno assai concentrato.

In alcuni casi, fra le due lenti costituenti l' obbiettivo, passava un disco di cartone (fig. 9), al quale con un roteggio (quello che serve all' esperienza del disco di Foucault) mosso da manivella, si poteva imprimere una velocità di cinquanta o più giri al secondo. Il disco ha 41 cent. di diametro e porta una finestra della forma *acdf* (*abc* e *def* semicerchi di 8 cent. di diametro), la quale apre l' obbiettivo, per circa un sesto di giro, computando in questo tempo anche quegli istanti in cui l' obbiettivo è aperto solo in parte (1).

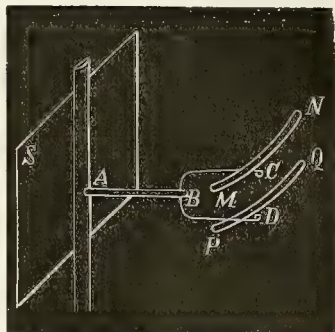
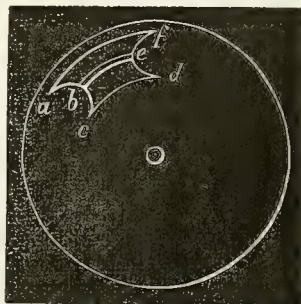



Fig. 9.

(1) L' arco *be* lasciato nel cartone serve per robustezza. Allo stesso scopo, ed anche perchè il

Mediante questo disco l'immagine fotografica si risolve in tante immagini separate della luminosità, prese a successivi intervalli compresi nella durata della scarica, come sarà spiegato nel cap. IV allorchè si parlerà delle esperienze nelle quali si fece uso di un tal disco.

II. Aspetto generale del fenomeno.

6. *Aspetto della scintilla vista direttamente.* Supponiamo dapprima che, senza far uso nè dello specchio girante nè della macchina fotografica, si osservi semplicemente il fenomeno luminoso che apparisce entro l' apparecchio (A) nel momento della scarica. Se le due palline dallo spinterometro (fig, 7) sono messe a contatto, nel circuito di scarica non esiste nessun altra interruzione che quella fra gli elettrodi dell' apparecchio, che supporremo per ora essere sfere d' ottone di 4 c. di diametro lontane 28,5 c. l' una dall' altra. Ridotta che sia la pressione dell' aria a pochi centimetri e messa in azione la macchina elettrica, comincia, quando i potenziali delle armature del condensatore hanno raggiunto un certo valore, un fenomeno luminoso stabile fra gli elettrodi, che è l'analogo della stelletta e del fiocco che si formano sulle punte nell' aria libera. Non descriverò questo fenomeno, in gran parte noto, nè le differenze che esso presenta allorchè gli elettrodi hanno forma di punta, e come esso muta a seconda della direzione della scarica allorquando gli elettrodi hanno curvatura differente.

Scostando poco a poco le palline dello spinterometro, dapprima il fenomeno non muta, e solo vi si aggiunge una pioggia continuata di scintillette fra la pallina stessa; ma poi arriva un momento nel quale cessa il fenomeno luminoso continuo e si produce ad intervalli un' unica scintilla fra gli elettrodi entro l' apparecchio. Questa scintilla ha il noto aspetto che si osserva nell' ovo elettrico, e cioè è rossa o rosea, e non giunge fino all' elettrodo negativo, dalla luminosità violetta del quale rimane divisa per mezzo dello *spazio oscuro* di Faraday.

Però, se la pressione dell' aria ha un certo valore, dipendente dalle dimensioni degli elettrodi e dell' apparecchio, e se il circuito comprende una conveniente resistenza, si vede in modo distintissimo che questa scintilla non si produce simultaneamente in tutta la sua lunghezza, ma bensì successivamente dall' elettrodo positivo verso il negativo. Essa è dunque una imitazione delle *folgori progressive.* La distanza fra le palline dello spinterometro per la quale comincia ad apparire tale scintilla cresce al crescere

---

centro di gravità del disco rimanga nell' asse, il contorno dell' apertura è raddoppiato con altro cartone.

della resistenza del circuito, e se questa é molto grande tanto più evidente é in generale il carattere progressivo della scintilla.

Accostando gli elettrodi entro il tubo, la scintilla *addizionale* (cioé quella fra le palline dello spinterometro) necessaria alla produzione della scintilla nell' apparecchio diviene minore od anche nulla. Se oltre questo limite gli elettrodi sono avvicinati ancor più, il fenomeno si modifica come si dirà più avanti.

7. *Scintilla vista nello specchio girante.* Supponiamo ora di guardare il fenomeno entro lo specchio girante.

Se la scintilla addizionale ha il minimo valore possibile onde cessi il fenomeno luminoso continuo fra gli elettrodi, la scintilla nell' apparecchio assume l' aspetto che mostra la fig. I; essa é quindi costituita da una *massa luminosa* che si forma sull' elettrodo positivo, e da questo si stacca avanzandosi verso l' elettrodo negativo, ad una certa distanza dal quale si spegne.

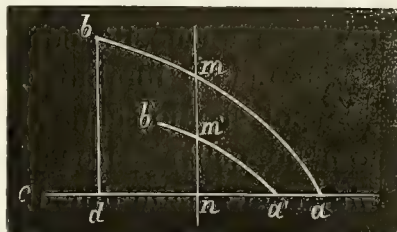
Se invece si aumenta vieppiù la scintilla addizionale, oppure si diminuisce la resistenza inclusa nel circuito, o si varia la pressione dell' aria, le dimensioni dell' apparecchio ecc., si ottengono delle figure più complicate le quali dimostrano che la scarica consiste nell' emissione di successive masse luminose dall' elettrodo positivo, animate da velocità più o meno grandi. In questo caso il fenomeno luminoso potrà chiamarsi una *scarica composta*, mentre che nel caso precedente si aveva una *scarica semplice.*

Devo avvertire che adopero solo per brevità la designazione di *masse luminose.* È probabile infatti che il fenomeno sia prodotto non già da materia ponderabile in moto, ma dal propagarsi dello stato d' incandescenza o di luminosità a successivi strati gassosi.

8. *Misure sulle fotografie.* Quando invece di osservare i fenomeni nello specchio girante, se ne trae una immagine fotografica, si può, eseguendo su questa opportune misure, determinare la velocità colla quale la massa luminosa si muove, e rilevare con comodo varie particolarità che sfuggono alla osservazione diretta di un fenomeno così rapido.

Fig. 10.

Sia ab (fig. 10) la linea percorsa dalla massa luminosa nell' immagine fotografica, ac l' immagine fotografica della linea luminosa che apparisce nello specchio girante in corrispondenza all' estremità dell' elettrodo positivo, e che é dovuta ad una breve luminosità che persiste sull' elettrodo anche quando la massa luminosa se ne é staccata. Si abbassi la perpendicolare $bd = h$ su ac e si ponga $da = k$. È chiaro che la velo-

cità media v della massa luminosa starà a quella con cui l' immagine data dallo specchio girante si muove, come *bd* stà a *da* ossia come $h:k$.

Ma la velocità dell' immagine riflessa dallo specchio, dovuta dalla rotazione di questo, è

$$\frac{4\pi r}{t},$$

qualora si indichi con r la distanza fra l' asse dell' apparecchio e quello intorno a cui ruota lo specchio e con t il tempo che questo impiega a far un giro. Avremo dunque:

$$v = \frac{4\pi rh}{kt}.$$

In tal modo con semplici misure fatte sulle fotografie, e dopo aver misurato r e t, si può calcolare la velocità media v, la quale sarebbe identica alla velocità reale in ogni istante, qualora la linea *ab* fosse retta, ossia la velocità stessa fosse costante.

Nel corso di questa Memoria non riporterò risultati numerici, che avrebbero un' importanza assai limitata. Però, quando avrò occasione di parlare di velocità più o meno grande delle masse luminose in moto, s' intenderà che questa velocità è stata calcolata nel modo ora descritto, salvo quei casi in cui le differenze di velocità erano così notevoli da potersi rilevare a colpo d' occhio.

È poi evidente che dalle fotografie può dedursi l' aspetto che offrirebbe l' apparecchio se lo si guardasse per un istante qualunque estremamente breve durante la scarica. Ciò per esempio, nel caso di una scintilla composta, nel quale le fotografie mostrano diverse linee come la *ab*, per esempio due *ab* ed *a'b'* (fig. 10), se si immagina tracciata una retta *mn* perpendicolare ad *ac*, si trova che questa incontra in m, m' due linee luminose. Dunque, se si vedesse l' apparecchio solo per un certo istante, apparirebbero due masse luminose m, m', l' una sopra l' altra. Tutto ciò astrazione fatta dalla lieve tortuosità che può avere la traiettoria percorsa nell' apparecchio da ogni massa luminosa.

Se poi si vuol conoscere l' istante cui corrisponde un dato aspetto del fenomeno nell' apparecchio, per esempio appunto quello delle due masse m, m', basta naturalmente misurare *an* che diremo k'. Il tempo τ trascorso dal principiare della scarica all' istante considerato, sarà evidentemente (1):

$$\tau = \frac{nk't}{4\pi r},$$

(1) Ogni punto dell' immagine riflessa dallo specchio girante percorre naturalmente nello spazio

essendo n il rapporto fra la grandezza dell' immagine luminosa riflessa dallo specchio, e quella della sua fotografia. Come si disse n per solito era eguale a 10. Solo per le figure XXXVII a XLI (1) si aveva $n = 3,2$.

III. Circostanze che influiscono sul numero delle masse luminose costituenti ogni scarica, e sulle loro velocità.

9. *Caso scelto come punto di partenza.* Sono numerosissime queste circostanze; e siccome le variazioni notevoli che si osservano nei fenomeni mutandone una gradatamente, per esempio la resistenza, e lasciando costanti le altre (pressione dell' aria, distanza degli elettrodi etc.) potrebbero essere differenti qualora i valori costanti dati alla pressione, distanza degli elettrodi ecc. fossero diversi da quelli addottati, così si vede che a rigore bisognerebbe enormemente moltiplicare le prove, e le fotografie pur numerose da me fatte potrebbero apparire insufficienti. Ho quindi preferito di partire da un caso tipico, quello in cui ottenni la scintilla *semplice* nel modo più perfetto (fig. I).

In questo caso la pressione dell' aria, la distanza fra gli elettrodi etc. avevano i valori indicati nella tavola che precede le fotografie; gli elettrodi erano sfere di 4 c. di diametro e la scintilla addizionale era inserita fra l' elettrodo positivo e la omonima armatura del condensatore. La durata della scarica nel caso della fig. I fù di un sesto di secondo, e la velocità media della massa luminosa costituente la scintilla progressiva, di circa un metro al secondo.

Ottenuta la scarica semplice, facevo variare una sola delle circostanze che hanno influenza nel fenomeno, ed osservavo gli effetti di questa variazione. In ultimo poi cercai di rendermi conto degli effetti ottenibili facendo variare in pari tempo due o più di dette circostanze.

10. *Influenza della forma e dimensione degli elettrodi.* Adoperando come elettrodi o due sfere o due punte, oppure una sfera e una punta, e purché a norma del bisogno si modifichi la distanza fra le palline dello spintero-

---

un arco di cerchio: ma questo può considerarsi come un tratto rettilineo, durando sempre la scarica solo per una porzione non tanto grande di giro.

(1) Tutte le figure delle tavole sono la riproduzione in fototipografia (eseguita dal Turati di Milano) di alcune delle negative fatte da me. Queste negative non furono in generale rinforzate, e mai in alcun modo alterate con ritocchi o altro. Nella tabella che precede le tavole sono indicate per ogni figura le condizioni sperimentali in cui fu ottenuta, e cioè: apparecchio adoperato, resistenza introdotta nel circuito, pressione dell' aria nell' apparecchio etc.

Le linee orizzontali, che veggonsi all' alto e al basso di ogni figura, sono dovute alla luminosità che riveste gli elettrodi per tutta la durata della scarica.

metro, non si ottengono che lievi variazioni nel fenomeno, che per amore di brevità mi astengo dal descrivere.

11. *Influenza dell' ordine nel quale sono collocate le varie parti del circuito.* Mentre la resistenza può occupare qualsiasi luogo senza che con ciò si abbiano risultati diversi, muta alquanto il fenomeno, specialmente quando l' aria nell' apparecchio abbia pressione non tanto piccola, se invece di porre lo spinterometro fra l' elettrodo positivo dell' apparecchio e l' armatura positiva del condensatore, esso viene collocato dalla parte dell' armatura negativa, cioè fra questa e l' elettrodo omonimo. Le fig. II e III ne fanno fede. Per la fig. II la scintilla addizionale era presso l' elettrodo positivo. La scarica produsse l' emissione di due o tre masse luminose, animate da una velocità di circa 1,3 m. al secondo in media. Invece nel caso della fig. III, ottenuta dopo aver invertito le cariche del condensatore, la velocità della prima massa luminosa fu dapprima notevolmente maggiore (circa 3^{m},6 al secondo) che nel caso precedente, ma poi diminuì rapidamente, dopo di chè la massa luminosa rimase quasi immobile nell' apparecchio per il rimanente della scarica (velocità alla fine circa 33 cent.). Questo comportamento è caratteristico pel caso in cui la scintilla addizionale è dalla parte dell' elettrodo negativo, e sempre più o meno si manifesta qualunque sieno le altre condizioni dell' esperienza. Le fig. IV e V ne porgono un altro esempio.

12. *Influenza della capacità del condensatore.* Nella maggior parte dei casi una diminuzione nella capacità del condensatore produce un lieve aumento nella velocità della massa luminosa. Ma l' effetto principale che si ottiene è una notevole diminuzione nella durata complessiva della scarica. Le fig. VI, VII e VIII diversificano solo in questo, che nel caso della VI il condensatore aveva una capacità equivalente a quella di tre, nel caso della VII a nove e nel caso della fig. VIII a ventisette dei soliti vasi di vetro armati.

È dunque vantaggioso l' impiegare grandi capacità. Anzi con capacità assai minori di quella di tre vasi non sarebbe stato forse possibile l' iniziare le presenti ricerche.

13. *Influenza della pressione dell' aria.* Riducendo la pressione dell' aria ad essere alquanto inferiore a quella di 20 a 40 mm. (con cui meglio si ottiene la scarica semplice, cioè costituita da una sola massa luminosa), la scintilla si fà di più in più diffusa e sfumata (fig. IX). Se le condizioni dell' esperienza sono quelle per le quali la scarica è semplice, si riconosce che la velocità della massa luminosa è maggiore che a pressioni un po' più elevate. Se poi si dispongono le cose in modo che la scarica sia composta, si ottengono nello specchio girante immagini come la fig. X, dalla quale si ricava che le masse luminose si arrestano o retrocedono a salti. Queste

figure sono notevolmente diverse dalle I e XI ottenute alla pressione di 20^{mm}.

Se invece la pressione é superiore alquanto a quella del caso tipico, non solo la velocità delle masse luminose é pure maggiore, ma si ottengono figure di più in più irregolari, in causa di modificazioni nella forma delle masse (che sarà studiata più oltre) ed in causa del divenire tortuose le loro traiettorie. Ciò risulta dal confronto fra la fig. II (pressione 40^{mm}), la XII (press. 80^{mm}) e la XIII (press. 120^{mm}). Esiste dunque sempre una pressione per la quale il moto delle masse luminose ha la massima lentezza.

Alle forme bizzarre viste alle più alte pressioni entro lo specchio girante, corrispondono naturalmente forme irregolari delle scintille osservate direttamente. Basta per persuadersene confrontare le fig. XIV e XV fra di loro. Entrambe queste figure sono doppie, giacché di fianco allo specchio girante ne era stato collocato uno fisso, e sulla lastra sensibile si dipingevano le due immagini date dai due specchi. Quella data dallo specchio fisso è naturalmente identica a quella che si sarebbe ottenuta puntando direttamente l' obbiettivo verso l' apparecchio. Nel caso della fig. XIV la pressione era 20 mm. e la scintilla vista nello specchio fisso non mostra che un rigonfiamento, dovuto all' emissione della seconda massa luminosa. Invece nel caso della XV la scintilla assume l' aspetto di un fascio di linee luminose serpeggianti.

Un carattere spiccato delle scariche ottenute nell' aria a debole pressione consiste nel rallentamento delle masse luminose, o anche nel loro arrestarsi da un dato istante sino alla fine della scarica. Mentre con pressioni di 40 o più millimetri questo arresto o questo rallentamento non si osservano qualche poco che quando si carica negativamente l' armatura del condensatore che é dalla parte della scintilla addizionale (vedi § 11), quando la pressione é p. es. solo di 20 o meglio 10 mm. il fenomeno in questione si manifesta anche nel caso contrario. Le figure XI, XIV, XX, e sopra tutto la XXIII ne fanno fede. Nella parte di destra della fig. XXIII, che non é altro che l' immagine della scintilla vista entro uno specchio fisso posto a fianco dello specchio girante, le masse luminose che la costituiscono mostrano quasi esattamente la loro forma reale, in causa appunto del rimanere esse quasi immobili per quasi tutta la durata della scarica. La stessa apparenza si ha naturalmente guardando direttamente l' apparecchio.

Onde potere osservare a volontà questa curiosissima forma di scintilla, che si potrebbe chiamare *scarica a rosario,* ho costruito dei tubi pieni d' azoto (che, come si vedrà, dà gli effetti stessi dell' aria ma con maggior intensità di luce), con elettrodi filiformi di platino e chiusi alla lampada (fig. 4). Due di tali tubi sono lunghi 70 c. grossi 5 c. e contengono azoto a 13^{mm} ed a 20^{mm} di pressione rispettivamente.

Un altro tubo chiuso, lungo 35 c. e grosso 4 c. con azoto a 25^{mm} di pressione può fornire un effetto simile a quello della fig. I, cioè può dar luogo ad una scarica *semplice*. Gli altri due tubi, in causa dell' essere assai grande il rapporto fra la lunghezza ed il diametro, non presentano mai meno di 2 o 3 masse luminose (vedi § 17).

14. *Influenza del potenziale della batteria.* Se la distanza esplosiva nello spinterometro è maggiore di quella appena necessaria onde si abbia la scarica semplice, questa dapprima resta tale, mentre la velocità della massa luminosa aumenta; ma se si accresce ancora la lunghezza della scintilla addizionale, si ottengono scariche composte, e cioè costituite dall' emissione successiva di più masse luminose dall' elettrodo positivo. Le fig. II, IV, VI, VII, X, XI, sono esempi di scariche composte, nelle quali le masse luminose si riducono però a due o tre; ma è facile ottenerne in numero assai maggiore.

15. *Influenza della resistenza del circuito.* Una diminuzione nella resisfenza del circuito, a partire da quella colla quale si ottiene la scarica semplice, produce press' a poco gli stessi effetti di un aumento nella scintilla addizionale, ossia d' un âumento nella differenza di potenziale delle armature. In conseguenza è possibile compensare una diminuzione di resistenza con una diminuzione di lunghezza della scintilla addizionale. Così per esempio è possibile (entro limiti lontani) l' ottenere una scarica che sia costituita da un numero determinato di masse luminose, mentre la residenza del circuito di scarica ha un valore [prestabilito, purché si dia una conveniente distanza alle palline dello spinterometro. Od anche, essendosi realizzate le condizioni della scarica semplice, si può continuare ad ottenerla tale accrescendo in pari tempo e la resistenza e la distanza delle palline fra le quali si forma la scintilla addizionale. Però la velocità della massa luminosa è minore in quei casi in cui la resistenza è più grande.

16. *Influenza della distanza fra gli elettrodi.* Se si diminuisce questa distanza si ottengono modificazioni simili a quelle dovute ad una diminuzione della pressione del gas. Si può dunque sino ad un certo punto compensare un aumento di pressione con una diminuzione di distanza degli elettrodi. Per esempio, se nell' apparecchio (A) le due sfere, anziché a 28,5 c. di distanza, si pongono a 10 c., si possono avere anche colla pressione di 80^{mm} delle immagini simili alla fig. I, mentre che a questa pressione e con distanza di 28,5 c. fra gli elettrodi non si hanno che le figure complesse simili alla XII.

17. *Influenza delle dimensioni trasversali dell' apparecchio.* Quando invece dell' apparecchio (A) si fa uso di uno più stretto come (B) o (C), diventa di più in più difficile l' ottenere scariche semplici. Queste si hanno ancora

col tubo (B) (fig. XVI), ma la massa luminosa giunta verso l'elettrodo negativo, anziché spegnersi d'un tratto, retrocede verso il positivo. Questo fenomeno si manifesta meglio alle pressioni più basse (fig. XVII). Per poco che si aumenti la scintilla addizionale, o si diminuisca la resistenza, si ottengono scariche composte, come le XVIII, XIX e XX. In ogni caso poi la velocità delle masse luminose è tanto più grande quanto più il tubo è ristretto.

Col tubo (C) si ottengono facilmente scariche composte da molte masse luminose successivamente emesse dall' elettrodo positivo, come mostrano le fig. XXI e XXII (1).

18. *Possibile compensazione fra le varie cause modificatrici del fenomeno.* Dal complesso di questi risultati può trarsi la conclusione che le scintille costituite da masse luminose in moto non sono il privilegio d'un dato valore della resistenza o della pressione ecc., ma che si formano, almeno entro larghi limiti, ogni qualvolta l'assieme delle circostanze sia favorevole senza riguardo al particolar valore di una delle cause influenti. Così, si è visto che una variazione nella resistenza può essere compensata da una conveniente variazione del potenziale, in modo che la scarica conservi invariato il suo carattere distintivo, e cioè rimanga costituita dal moto di una o di più masse luminose formantesi sull'elettrodo positivo. Del pari un aumento nella pressione del gas può trovare il suo compenso nell'avvicinamento degli elettrodi, specialmente se congiunto con opportune variazioni del potenziale, della curvatura degli elettrodi ecc.

Se al contrario si introducono variazioni tali che non vi abbia fra esse compensazione, il fenomeno resta modificato. Dalla scintilla formata da una sola massa in moto si può passare a quella formata da molte masse luminose con velocità via via più grandi. Vedremo poi che in pari tempo si modifica la forma d'ogni singola massa, di guisa tale che si può comprendere la graduata trasformazione della scarica qui studiata nella scintilla ordinaria.

IV. Forma delle masse luminose.

18. *Metodo d' osservazione.* Poco si può ricavare dalle fotografie ottenute nel modo che si è spiegato, intorno alla forma ed all' aspetto d'ogni singola massa luminosa. Siccome i tratti inclinati delle immagini ottenute

(1) La fig. XXII rassomiglia notevolmente ad una ottenuta da Spottiswoode (Proceedings of the Royal Society of London, v. XXV, p. 79); ma la rassomiglianza è fortuita, essendo completamente diverse le condizioni sperimentali in cui le due figure furono ottenute.

puntando l'obbiettivo verso lo specchio girante, sono in generale più intensi dalla parte dell' elettrodo negativo che dalla parte opposta, bisogna ammettere che verso l' elettrodo negativo la massa luminosa fornisce maggior quantità di luce. Ma questo può provenire o da diversa luminosità della massa nelle due parti rivolte ai due elettrodi, oppure da diversità di forma. È solo nei casi simili a quello della fig. XXIII che, restando le masse quasi immobili per una gran parte della durata totale della scarica, si può avere una idea della loro forma reale.

Pel maggior numero dei casi è ad immagini fotografiche istantanee che devesi ricorrere, onde studiare la forma delle masse luminose, ed è a questo fine che s' impiega il disco girante descritto nel § 5.

Si potrebbe, veramente, limitarsi ad osservare direttamente la scarica attraverso al disco girante, ma oltre che riesce sempre difficile il conservare memoria netta di un fenomeno di durata estremamente breve, e che non si ripete mai in modo assolutamente identico, si aggiunge qui la sfavorevole circostanza della piccolissima intensità luminosa che rimane alle masse luminose viste isolatamente per un tempo brevissimo. La sensibilità delle lastre adoperate permettendo d'avere immagini fotografiche abbastanza marcate, l' uso di esse è di gran lunga preferibile alla osservazione diretta.

Se la finestra praticata nel disco girante non passasse che una sol volta per l' asse dell' obbiettivo, si avrebbe un' unica immagine delle masse luminose ad un dato istante, e si potrebbe puntare l' obbiettivo direttamente verso l' apparecchio in cui ha luogo la scarica. Ma invece l' obbiettivo si apre una volta ad ogni giro del disco, e sulla lastra fotografica si ha un certo numero di immagini della scarica, che sono gli aspetti che questa presenta vista ad intervalli regolari. Onde impedire che queste successive immagini si sovrappongano, basta dirigere l'obbiettivo verso l'immagine della scarica che appare nello specchio girante. In tali condizioni si ottengono tutte le successive immagini disposte a fianco l'una dell' altra da destra a sinistra. Delle moltissime fotografie eseguite ne ho riprodotto cinque nelle fig. XXXVII, XXXVIII, XXXIX, XL e XLI.

Se in queste esperienze si vuol conoscere quale sia l' intervallo di tempo che trascorre fra due successive aperture dell' obbiettivo, non occorre misurarlo direttamente. Basta infatti misurare sulle fotografie gli intervalli che esistono fra le imagini luminose allineate orizzontalmente in alto ed in basso di ogni figura, e che altro non sono che le imagini della luminosità continua che si forma a contatto degli elettrodi durante la scarica. Se k' è tale intervallo, n il rapporto di grandezza fra l' oggetto fotografato e la sua imagine ($n = 3{,}2$ per le cinque figure citate poc' anzi), t la durata d' un giro dello specchio girante, r la distanza fra l' asse di rotazione di questo e l' asse dell' apparecchio di scarica, la durata τ d' un giro del disco

girante sarà data dall' ultima formola del § 8 e cioè:

$$\tau = \frac{nk't}{4\pi r}.$$

Per le cinque figure dalla XXXVII alla XLI il valore di τ era rispettivamente: 0,0140; 0,0136; 0,0280; 0,0149; 0,0140 il ché corrisponde a velocità del disco di 71,4; 73,5; 35,7; 67,1; 71,4 giri al secondo.

20. *Forma delle masse luminose, e circostanze che la modificano.* La fig. XXXVII, se non si fosse adoperato il disco girante, sarebbe riuscita simile alla XVIII, e cioè nelle condizioni della esperienza dalla quale la fig. XXXVII é stata ricavata la scarica é costituita dalla emissione successiva di quattro o cinque masse luminose dall' elettrodo positivo. Nella detta figura si vedono queste masse isolate in posizioni successive. Se le condizioni del circuito di scarica sono invece quelle della fig. I, cioé quelle che danno luogo alla scarica semplice, non si ottiene che una sola fila di imagini della massa luminosa, disposte nel modo che può prevedersi osservando la fig. I; peró la forma della massa luminosa rimane press' a poco la stessa.

Esaminando le numerosisime fotografie che conservo si può farsi un concetto delle varie fasi del fenomeno. Cosí si riconosce che all' iniziarsi della scarica si forma sull' elettrodo positivo una specie di fiamma, la quale si allunga strozzandosi in mezzo finché la parte superiore si distacca conservando per un poco la forma assai allungata che vedesi all' estremità destra della fig. XXXVII. Ma mentre, cosí isolata, la massa luminosa si avanza verso l' elettrodo negativo, essa si raccoglie divenendo più grossa e più corta, assumendo infine la forma definitiva, quale apparisce nella figura medesima. Questa forma è ovoidale, e si può darne una qualche idea considerando la massa luminosa come costituita da una mezza sfera dalla parte rivolta verso l' elettrodo negativo, unita ad un cono col vertice rivolto verso l' elettrodo positivo. Questo processo di formazione richiama quello delle goccie liquide che si staccano da un tubo dal quale esce lentamente dell' acqua, tanto che la scarica elettrica nel caso di queste mie esperienze potrebbe con ragione denominarsi *scarica a goccie*, se non fosse forse preferibile chiamarla *scarica globulare*, denominazione questa suggerita da quella di un fenomeno naturale col quale sembra la detta scarica avere analogia.

Dall' esame delle negative fotografiche (meglio assai che da quello delle riproduzioni quí unite) risulta altresí che la luce é emessa da tutto il volume costituente la massa luminosa, di guisa che l' immagine ha la parte centrale più intensa, ed é sfumata tutt' intorno. Questo carattere appartiene del resto anche alle ordinarie scintille, e ha per conseguenza che le immagini fotografiche diminuiscono di dimensioni quando per una causa

qualunque diminuisce l'intensità luminosa nella immagine della scarica sulla lastra fotografica. È possibile quindi che il diminuire delle dimensioni delle immagini d'una massa luminosa, quale apparisce per esempio nella figura XXXIX, sia dovuto, non già a diminuzione reale del suo volume, ma a diminuzione dell'intensità delle radiazioni da essa emesse.

Al crescere della pressione del gas le masse luminose diminuiscono di grossezza e crescono di splendore, precisamente come le scintille ordinarie. Così le masse sono più grandi, almeno inizialmente, nel caso della figura XXXIX (pressione 5^{mm}) che nel caso della fig. XXXVII (pressione 20^{mm}) o della XXXVIII (pressione 40^{mm}). Oltre a ciò, al crescere della pressione esse tendono a divenire più lunghe e sottili, come mostra appunto la suddetta fig. XXXVIII, ed in tal modo la scarica globulare può trasformarsi in una scintilla ordinaria.

Se invece che nell'aria si produce la scarica nell'azoto, le masse luminose, mentre divengono più brillanti, conservano però la stessa forma e gli stessi caratteri. Ma così non è, a quanto sembra, cogli altri gas, giacchè sostituendo all'aria l'idrogeno, ho ottenuto immagini, in generale troppo deboli per essere qui riprodotte, ma dalle quali apparisce che le masse luminose sono per così dire troncate dalla parte che guarda verso l'elettrodo negativo, mancando quasi la parte emisferica. Qualche cosa s'indovina di questa notevole differenza di forma, paragonando fra loro le parti di destra delle figure XXIII, XXIV, XXV, la prima delle quali fu ottenuta coll'azoto, e le altre due coll'idrogeno.

Infine, in tubi assai stretti, come il tubo (C), (di un centimetro di diametro) le *goccie* o le masse *globulari* divengono assai piccole, come si desume dalla fig. XL.

È bene qui notare che, quantunque il tempo durante il quale restava aperto l'obbiettivo fotografico per ogni giro del disco di cartone fosse estremamente piccolo e precisamente la sesta parte dei valori di τ dati alla fine del § 19 (computando anzi nel tempo suddetto anche gli istanti durante i quali solo una porzione dell'obbiettivo era libera), pur tuttavia l'immagine della massa luminosa doveva a rigore spostarsi qualche poco sulla lastra sensibile, sia pel moto reale della massa stessa entro l'apparecchio, sia per il moto apparente dovuto alla rotazione dello specchio. Mentre nella maggior parte dei casi quello spostamento era trascurabile, esso doveva produrre una deformazione apprezzabile delle immagini allorquando, come col tubo (C), le masse luminose erano assai piccole, specialmente poi ponendo l'apparecchio a distanza assai grande dallo specchio (ciò che rende, naturalmente, assai rapido lo spostamento delle immagini riflesse). È possibile ottenere in tali condizioni, in luogo di figure simili alla XL, altre figure nelle quali le immagini allineate verticalmente assumono la forma di tante spire di una vite verticale.

21. *Riproduzione stroboscopica del moto delle masse luminose.* È facile comprendere che, stante il modo nel quale sono ottenute le fotografie descritte in questo capitolo, esse si prestano ad essere osservate con un metodo stroboscopico che permette di riprodurre le varie fasi del moto traslatorio dal quale le masse luminose sono animate.

Si prenda una positiva simile ad una delle figure XXXVII a XLI, ma ottenuta con una più rapida rotazione dello specchio, in modo che le successive immagini della scarica risultino più spaziate l'una dall'altra in senso orizzontale, e si tagli in tante striscie varticali, ciascuna delle quali comprenda una di quelle immagini dell'apparecchio. Ognuna di tali strisce porterà con sè, naturalmente, tanto alla sua estremità superiore che alla inferiore, uno dei brevi tratti luminosi che vedonsi allineati orizzontalmente in alto ed in basso di ogni figura, e che, come si disse, sono le successive immagini della luce che riveste gli elettrodi per tutta la durata della scarica. Si otterrà così una serie completa di immagini le quali, poste in un fenachisticopio di qualunque forma al posto usuale, faranno vedere, col giuoco di questo istrumento, le masse luminose con un moto apparente simile al moto reale delle masse stesse, ma tanto più rallentato quanto più lenta sarà la rotazione del fenachisticopio.

V. Esperienze in gas diversi dall'aria.

22. *Azoto e ossigeno.* Per osservare i fenomeni in gas diversi dall'aria adoperai quasi sempre l'apparecchio (B). Aperto uno dei rubinetti, si faceva per esso il vuoto nel tubo; aprendo quindi l'altro, che comunicava col recipiente o coll'apparecchio che forniva il gas, coll'intermezzo di tubi disseccanti e spesso di opportuni vasi di lavatura, si lasciava riempire tanto il recipiente che l'intera pompa pneumatica di gas ben puro e ben secco. Ripetendo un certo numero di volte l'operazione, si poteva rimaner tranquilli sulla purezza del gas contenuto nell'apparecchio.

I primi gas sperimentati furono quelli componenti l'aria. Coll'ossigeno non sono riescito ad ottenere affatto il fenomeno della scarica globulare. A seconda della pressione del gas, della resistenza introdotta nel circuito ecc. si ha al momento della scarica o una luce diffusa simile a quella degli ordinari tubi di Geissler, o scintille che sembrano formarsi ad uno stesso istante in tutta la loro lunghezza. La luce é in generale bianco-violacea, ma volge al rosso mattone se si mescola all'ossigeno qualche traccia d'aria o di azoto. Se la quantitá di questo gas é un po' maggiore comincia a prodursi il fenomeno quí studiato, giacché appaiono nello specchio girante le solite curve luminose.

Coll' azoto puro si hanno invece tutti i fenomeni già ottenuti coll' aria, ma la luce è alquanto più viva e di un rosso più violaceo o purpureo. Con questo gas i fenomeni si mostrano quindi col massimo splendore, e così pure la fluorescenza delle pareti del tubo, che sempre ha luogo anche a pressioni piuttosto elevate quando si impiegano scariche potenti, è alquanto più vivace nell' azoto che nell' aria. Le fig. XXIII e XXXIX furono ottenute coll' azoto. Con questo gas, anche meglio che coll' aria, si ottiene alle basse pressioni il genere di scariche della fig. XXIII, quello cioè caratterizzato dal rimanere le masse luminose quasi immobili per una gran parte della durata della scarica. In generale poi, a parità di condizioni, la scarica è meno complessa che coll' aria. Così, mentre p. es. se si è in tali condizioni sperimentali che coll' aria si ha la fig. XXII, coll' azoto se ne ha una del genere della XXI.

23. *Idrogeno, etilene, gas illuminante.* Con questi gas si hanno fenomeni simili che coll' aria, senonchè la luce è di color diverso e alquanto meno intensa. Coll' idrogeno puro (p. es. prodotto coll' elettrolisi d' acqua privata d' aria) la scarica produce una luce bianco-azzurra; cogli altri due gas il colore è più carico. Traccie di azoto aggiunte all' idrogeno fanno volgere al rosso il colore della luce.

La fig. XXIV e XXV furono ottenute col tubo pieno d' idrogeno puro a pressione assai bassa. Osservando le striscie luminose quasi orizzontali che mostransi nello specchio girante, o meglio le immagini di queste sulle negative fotografiche, si riconosce che esse non sono di uniforme intensità; anzi quest' intensità presenta frequenti alternative percorrendole in senso orizzontale, tanto che assumono un aspetto simile a quello di un velo luminoso raccolto a fitte pieghe verticali. Questa particolarità rivela nella scarica delle rapidissime fluttuazioni.

Qualche cosa di simile si osserva anche coll' azoto a pressione debolissima.

24. *Protossido d' azoto, anidride carbonica.* Col primo di questi gas ho ottenuto lo stesso risultato negativo che coll' ossigeno. Coll' anidride carbonica si hanno traccie del fenomeno, giacchè osservando la scarica entro lo specchio girante, in mezzo ad una luce diffusa ed uniforme si vedono una o più linee, più luminose del fondo, leggermente incurvate nel senso del movimento. La luce è verde-azzurra e volge al rosso con traccie d' azoto, il quale rende ancora più evidente la formazione delle scariche a moto progressivo. Non è fuor di luogo il dubbio che qualche traccia di azoto, non sufficiente a cambiare il colore della luce, abbia prodotto quelle linee curve più luminose, e che coll' anidride carbonica pura non si sarebbe visto neppure quell' accenno del solito fenomeno.

25. *Vapori di diversi liquidi.* Ho infine sperimentato con vapori di liquidi aventi alla temperatura ordinaria delle alte pressioni di saturazione.

Col vapore d' *etere* la luce è azzurra. Nello specchio girante si ha un effetto simile che coll' anidride carbonica.

Col vapore di *solfuro di carbonio* la luce della scarica è bianco-azzurra come coll' idrogeno, ma brillantissima quanto quella che si ha coll' azoto. Nello specchio girante vedonsi delle traccie di linee luminose inclinate, e le figure che appariscono sono simili a quelle che si avrebbero coll' aria ma con resistenza nel circuito assai più piccola di quella che è realmente,

Col vapore di *cloroformio* per determinare la scarica bisogna aumentare di molto la lunghezza della scintilla addizionale. La scarica è giallo oro, ma osservata nello specchio girante si vede che prima della luce gialla diffusa, si forma una scintilla rettilinea verde. Non vi è traccia di moto progressivo di masse luminose. In breve tempo sulle pareti interne del tubo si depone uno strato di sostanza nera.

Col vapore di *alcool etilico* la luce ha colore bianco-azzurro come coll' idrogeno. Si vede nello specchio girante qualche traccia del fenomeno qui studiato.

Col vapore d' *alcool metilico* la scarica è azzurro-violetta, ma senza traccia del fenomeno.

Anche col vapore di *benzina* non si osserva il noto fenomeno, ma la luce è azzurra alle basse pressioni, p. es. 10^{mm}, e gialla a pressioni più alte, p. es. a 20^{mm}. In questo caso però, osservando la scarica nello specchio girante si vede che essa comincia con scintille rettilinee gialle, e finisce con una luce azzurra continua. L' apparenza è bellissima. L' ultima luce esiste sola alle pressioni più basse.

In conclusione non è adunque che coll' azoto, (e quindi coll' aria) coll' idrogeno, coll' etilene e col gas illuminante, che si forma bene la scarica globulare; coll' azoto però il fenomeno è di gran lunga più distinto e più brillante. Cogli altri gas e vapori non si riesce a provocarlo in modo sicuro. Non è escluso però che non si possa produrre anche in questi e negli altri gas, non messi alla prova, modificando entro limiti assai più estesi, di quelli che mi era possibile raggiungere, le condizioni dell' esperimento.

VI. Congetture sul modo in cui si produce il fenomeno, ed esperienze da esse suggerite.

26. *Scariche nei liquidi.* Fin dalle prime esperienze sul soggetto del quale si tratta in questa Memoria, parvemi rilevare qualche analogia fra i nuovi fenomeni e certi altri che riscontrai molto tempo fà colla scarica attraverso

l' acqua (1). Se un vaso d'acqua è posto nel circuito di scarica d' un grande condensatore per mezzo d' elettrodi filiformi isolati dall' acqua in quasi tutta la loro lunghezza, si formano sulle loro estremità libere, al momento della scarica, certe apparenze luminose. Sull' elettrodo negativo è un fiocco a fili brevi e numerosissimi; sul positivo è un gruppo di scintillette sinuose alquanto lunghe ma relativamente poco numerose.

Questi fenomeni luminosi si formano però anche in condizioni apparentemente differenti. Si ponga in un vaso pieno d' acqua un tubo di vetro quasi chiuso in fondo, in modo che non abbia quivi che un foro di una piccolissima frazione di millimetro di diametro, e si immergano gli elettrodi l' uno nell' acqua del vaso, l' altro in quella del tubo. Al momento della scarica una scintilla si forma attraverso al forellino, mentre all' esterno del medesimo vedesi il fenomeno luminoso proprio d' uno degli elettrodi, ed internamente quello caratteristico dell' altro elettrodo, come se il forellino fosse chiuso e sostituito con un breve tratto di filo metallico funzionante da elettrodo intermedio o doppio elettrodo.

La spiegazione di questi fenomeni parvemi allora, e parmi tuttora, dover essere la seguente.

Durante una prima fase della scarica, questa percorre il liquido senza illuminarlo portandolo nelle varie sue parti a potenziali diversi press' a poco come avviene lungo ogni conduttore percorso da una corrente costante, colla differenza che nel caso della scarica (che in generale non sarà oscillante, stante la grande resistenza del liquido) i potenziali sono variabili col tempo e la loro distribuzione ad un istante qualunque segue certo una legge assai complicata. Se mentre dura la scarica accade che si stabilisca fra due punti del liquido una differenza di potenziale tale che possa dar luogo ad una scarica esplosiva, comincia una seconda fase durante la quale una scintilla congiunge quei due punti.

Ciò posto è chiaro dapprima che, per la grande resistenza opposta dalla stretta colonna d' acqua che si trova nel foro del tubo nel caso della precedente esperienza, la differenza dei potenziali dalle due parti del foro raggiungerà facilmente un alto valore, perciò una scintilla si formerà attraverso di esso.

Siccome poi la variazione di potenziale da un punto ad un altro del liquido sarà necessariamente assai più rapida presso gli elettrodi e presso il forellino dalle due parti di esso, che in qualunque altra parte più ampia del liquido, così in questi luoghi potranno del pari avere origine delle scariche esplosive. Tale è la causa delle luminosità dianzi descritte.

---

(1) *Ricerche sperimentali sulle scariche elettriche,* II Memoria, § 10, 11, 12. R. Acc. dei Lincei, Memorie della Classe di Scienze fisiche ecc. Vol. I (4 febbraio 1877). — N. Cimento Serie 3ª, v. I.

Come si vede, secondo questa spiegazione, le scintille nei liquidi non sarebbero che casi particolari della scarica laterale (1).

27. *Congetture sul fenomeno della scarica globulare.* È probabile che in un gas qualunque, specialmente poi quando sia rarefatto, la scarica esplosiva sia sempre preceduta da un passaggio invisibile di elettricità, e che la scintilla si formi quando la differenza di potenziale fra due porzioni del gas raggiunge un valore sufficiente. Anche nell' aria alla pressione ordinaria la scintilla é preceduta da una trasmissione elettrica invisibile, che non é che l' ordinaria dispersione della elettricità resa di più in più attiva mentre la differenza di potenziale fra gli elettrodi va man mano crescendo. Le esperienze sul cambiamento di posto delle scintille per effetto della vicinanza di corpi elettrizzati, sembranmi confermarlo (2).

Se effettivamente il fenomeno della scarica progressiva nel gas più o meno rarefatto ha un' origine analoga a quella supposta per le scariche nell' acqua, la scintilla all' elettrodo positivo deve formarsi allorché la differenza di potenziale fra l' elettrodo ed una regione più o meno lontana del gas, abbia raggiunto un sufficiente valore. Dell' elettricità positiva é cosi trasportata nel gas. Lo strato gassoso caricato positivamente agirà più oltre come un nuovo elettrodo, e cosi la scarica luminosa percorrerà l' apparecchio fin verso l' elettrodo negativo. Il formarsi poi del fenomeno piuttosto sull' elettrodo positivo che sul negativo, é un fatto che é in relazione colla diversa dispersione delle due elettricità.

Evidentemente questa spiegazione grossolana, se vale per far comprendere genericamente la produzione del fenomeno fondamentale, non può aspirare a rendere conto dei dettagli, od almeno non può giungere a tanto senza ipotesi sussidiare, che passerò sotto silenzio non sembrandomi esse abbastanza giustificate.

È da notarsi che quantunque questa spiegazione mi sia stata suggerita da una certa analogia fra il fenomeno qui studiato e quello delle scariche nell' acqua, pure essa in fondo non diversifica molto da una messa avanti recentemente da J. J. Thomson (3) per render conto delle stratificazioni della scarica. Se non ché il Thomson addotta la teoria elettrolitica della scarica elettrica nei gas, alla quale però potrebbe addattarsi, volendo, anche la mia spiegazione.

Per quanto questa sia imperfetta pure le seguenti esperienze da essa suggerite hanno dato i risultati previsti.

---

(1) V. Memoria citata precedentemente, § 7 e 8.

(2) *Spostamenti e deformazioni delle scintille nell' aria.* Mem. della R. Accad. di Bologna, serie IV t. II (12 maggio 1881). — N. Cimento, serie 3ª t. XII.

(3) Phil. Mag. august 1890, pag. 129.

28. *Fenomeni che si producono quando la colonna gassosa percorsa dalla scarica ha, in una piccola porzione della sua lunghezza, una sezione assai ristretta.* Si è visto che nel caso della scarica nell' acqua attraverso un esilissimo foro (§ 26), questo si illumina e si comporta come un doppio elettrodo posto fra gli elettrodi principali; così deve dunque accadere anche nel caso della scarica nel gas rarefatto, ed è quanto difatti si verifica. Si supponga collocato un diaframma isolante orizzontale a metà fra i due elettrodi dell' apparecchio (A) della fig. 1, avente nel centro un foro di uno o due centimetri di diametro, e si stabiliscano le condizioni dell' esperienza in modo che senza il diaframma si avrebbe una scarica simile a quella della fig. II. Col diaframma si produce una scarica semplice, cioè una sola massa luminosa, che parte dall' elettrodo positivo, e che si arresta prima di raggiungere il foro del diaframma. Nello stesso tempo una seconda massa si forma sul foro del diaframma, dirigendosi verso l' elettrodo negativo. Il risultato è dunque lo stesso come se all' apparecchio adoperato se ne fossero sostituiti due, uno sopra l' altro, il foro del diaframma comportandosi come elettrodo negativo dell' apparecchio inferiore, e come elettrodo positivo dell'apparecchio superiore. In corrispondenza del foro si osserva una luminosità stabile, simile a quelle che sempre si formano in contatto degli elettrodi.

Invece di eseguire nel modo indicato l' esperienza, si può più comodamente ottenere un analogo risultato nel modo seguente.

Entro l' apparecchio (A) si colloca un tubo di vetro *CD* (fig. 11) che racchiude entro di sè l' elettrodo positivo *A*, e che all' estremità superiore *C* ha un foro ristretto, per esempio di 8 mm. di diametro. La fig. XXIX mostra l' effetto ottenuto con questa disposizione. Il tubo *CD* aveva circa 4 c. di diametro ed il foro *C* era circa 15 c. al disopra dell' elettrodo *A*. Quantunque la parte di scarica che si forma fra il foro e l' elettrodo negativo del tubo non sia in questo caso così nettamente limitata, come quella che si forma al di sotto del foro, pure dalla fig. XXIX si rileva che, mentre delle masse luminose erano emesse dall' elettrodo positivo, altre partivano dal foro, come se questo fosse un vero elettrodo.

Fig. 11.

La luminosità continua nel foro si osserva anche se il tubo *CD* è liberamente aperto all' estremità superiore. Con un tubo simile a *CD*, ma aperto in alto, che sorpassava in altezza di circa 19 c. l' elettrodo positivo, ho ottenuto le scariche delle figure XXVI, XXVII e XXVIII. Nel caso della fig. XXVI si vede nettamente la luminosità continua che si forma alla bocca del tubo. Nella fig. XXVII, oltre di questa luminosità si vede anche la massa luminosa, partita dall' elettrodo positivo, oltrepassare l' estremità del tubo, con velocità bruscamente diminuita. Questa diminuzione di velocità è forse

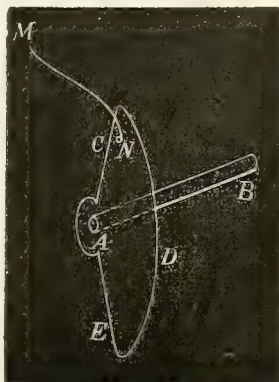
dovuta al fatto che la massa luminosa si muove in ultimo entro un tubo di maggior sezione trasversale (vedi § 17). Infine la figura XXVIII mostra un fenomeno simile a quello della XXVI, ma con direzione inversa della scarica.

29. *Effetto di una interruzione del circuito di scarica prima che questa sia completa.* Non mi consta che fino ad ora si sia giunti ad interrompere il circuito di scarica d' un condensatore con tale rapidità da far si che la carica, che all' istante dell' interruzione ancor si trova nel condensatore, vi rimanga, almeno nella massima parte. È chiaro del resto che in qualunque modo nei casi usuali si produca una interruzione del circuito, una scintilla si formerà immediatamente fra le due parti staccate, per quanto rapidamente si allontanino l' una dall' altra, la quale scintilla permetterà alla scarica di esaurirsi. Nel caso mio, la resistenza dovuta alla colonna d' acqua posta nel circuito, doveva però prolungare la durata della scarica, e offrire così maggiori probabilità di successo.

Il mezzo più semplice che si presentava per raggiungere l' intento era questo. Come si è detto nel § 5 il circuito di scarica nelle mie esperienze non era completo per un certo intervallo di tempo che una volta ad ogni giro dello specchio. Sembrava quindi che dovesse bastare il sostituire ad uno dei due archi d' ottone fissi (fig. 8) sui quali striscia il filo isolato mobile insieme allo specchio, un nuovo arco metallico discontinuo, e cioè costituito da brevi tratti o denti sporgenti per far si che il circuito a brevi intervalli si trovasse alternativamente chiuso ed aperto. Ma così facendo osservai appunto che ogni volta che il filo mobile abbandonava un contatto, restava a questo collegato da una scintilla, per opera della quale il circuito rimaneva chiuso; diffatti l' immagine vista nello specchio girante risultava poco o nulla modificata.

Bisognava dunque rendere più rapido il distacco e finalmente raggiunsi lo scopo propostomi nel modo seguente.

Fig. 12.

Oltre all' asse verticale portante lo specchio, il roteggio da me adoperato aveva assi orizzontali, ed uno di questi dotato di velocità angolare assai maggiore di quella del primo. Prolungai questo asse con un cilindro di ebanite *AB* (fig. 12) all' estremo del quale era fissato un settore *CDE* di lastra metallica sul quale un filo metallico elastico *MN* poteva strisciare. I due pezzi *MN* e *CDE* furono inseriti nel circuito di scarica, cosiché quand' anche il filo mobile portato dallo specchio toccasse i due archi metallici fissi della fig. 8, onde il circuito fosse chiuso bisognava ancora che il settore girante *CDE*

fosse toccato dal filo *MN*. Durante il tempo nel quale esisteva il primo contatto, il settore faceva 3 o 4 giri, e perciò nella durata d'una scarica il circuito era più volte alternativamente completo od interrotto per opera del settore.

Anche con questa disposizione vedesi formarsi una scintilla fra *MN* e *CDE* nell'atto del distacco, ma questa è assai breve, e la parte di carica che ancor possiede il condensatore non può scaricarsi finchè il contatto fra *MN* e *CDE* non sia ristabilito.

Le fig. XXX e XXXI mostrano alcuni dei risultati così ottenuti. La scarica comincia colla formazione di una massa luminosa sull'elettrodo positivo, la quale si sposta verso il negativo. Quando un istante dopo per opera del settore girante il circuito è interrotto, la massa luminosa si spegne. Allorchè un momento dopo il circuito è nuovamente chiuso, non si vede formarsi una luminosità nel luogo ove la massa sparì, ma invece si forma una nuova massa luminosa in contatto dell'elettrodo positivo come se una nuova scarica cominciasse.

Nel caso della fig. XXX ogni scarica parziale è semplice; nel caso della XXXI fra una interruzione e l'altra ebbero campo a formarsi due masse luminose.

Questo risultato non infirma la spiegazione proposta, giacchè si comprende come possa lo strato gassoso carico positivamente dissiparsi rapidamente non appena gli elettrodi cessano di fornire elettricità. Può darsi dunque, che se, invece d'interrompere il circuito, non si fa altro che aumentarne ad intervalli brevissimi la resistenza, si giunga ad altro risultato, e cioè che la massa luminosa si spenga, per mostrarsi subito dopo al posto di prima.

30. *Effetto di modificazioni di resistenza introdotte nel circuito durante la scarica.* Per ottenere lo scopo d'introdurre momentaneamente una maggior resistenza nel circuito, bastava mettere una delle estremità d'un tubo pieno d'acqua distillata in comunicazione col filo *MN* (fig. 11) e l'altra estremità col settore *CDE* (per mezzo d'un filo strisciante sulla parte centrale della lamina *CDE*).

Le figure XXXII, XXXIII, XXXIV mostrano i risultati ottenuti colla nuova disposizione. Le masse luminose si spengono all'istante in cui una forte resistenza è aggiunta nel circuito; ma appena per opera del settore girante la resistenza addizionale è esclusa, le masse luminose ricompaiono là dove sparirono un momento prima, o un poco più oltre.

Nei casi delle fig. XXXII e XXXIV il settore girante era di 180°, e cioè un semicerchio. La resistenza che esso introduceva era nel primo caso equivalente a 22,6 cent. e nel secondo a 12,7 cent. di colonna d'acqua d'un centimetro quadrato di sezione.

Nel caso della fig. XXXIII il settore mobile era di 60° e la resistenza da esso introdotta equivalente a quella d' una colonna d' acqua di 6 centimetri di lunghezza e di un centimetro quadrato di sezione.

Nelle esperienze attuali la scarica non è dunque sospesa, giacchè anche coll' aumentata resistenza del circuito gli elettrodi forniscono al gas, quantunque assai più lentamente, dell' elettricità. Tuttavia le masse luminose si spengono o quasi, ma lo strato gassoso positivo non può perdere completamente la sua carica, di modo che si trova pronto a produrre di nuovo la massa luminosa non appena, ridotta la resistenza del circuito al valore primitivo, possono gli elettrodi essere riforniti di elettricità con rapidità sufficiente.

31. *Effetto prodotto da sfere metalliche isolate allineate fra i due elettrodi.* Si è detto nel § 28 che un restringimento brusco della sezione trasversale del tubo di scarica fa l' ufficio di un elettrodo intermedio, e che perciò l' apparecchio si comporta come due apparecchi più brevi posti al seguito l' uno dell' altro. Ho constatato direttamente che una massa metallica isolata posta fra gli elettrodi si comporta appunto in questa maniera anche senza che il gas sia materialmente diviso in due porzioni da una parete trasversale.

Fra i due elettrodi dell' apparecchio (A) furono fissate quattro palline di rame di 17,5 mm. di diametro, isolate e press' a poco equidistanti. La colonna gassosa lungo l' asse dell' apparecchio risultava così divisa in cinque intervalli all' incirca eguali fra loro in lunghezza. Nell' atto della scarica si formavano simultaneamente cinque masse luminose, una sull' elettrodo positivo e le altre sulle quattro palline dalla parte rivolta verso l' elettrodo negativo. Le cinque masse si muovevano nel senso della scarica per un intervallo un po' minore della distanza fra due palline consecutive. In una parola, si otteneva lo stesso effetto come se si fossero collocati cinque apparecchi di seguito l' uno sopra l' altro. Ogni pallina intermedia si comportava dunque come un elettrodo negativo colla sua parte rivolta verso l' elettrodo positivo principale, e come un elettrodo positivo colla sua parte rivolta verso l' elettrodo negativo dell' apparecchio.

32. *Effetto di una derivazione posta fra gli etettrodi.* Il prodursi di scariche composte, e cioè di scariche costituite dalla formazione di più d' una massa luminosa sopra l' elettrodo positivo, deve dipendere evidentemente dal fatto che gli elettrodi forniscono elettricità in quantità sufficiente anche dopo che la prima massa luminosa ha intrapreso il suo cammino da un elettrodo all' altro. È chiaro quindi che facendo comunicare fra loro direttamente i due elettrodi, deve aversi una scarica composta da un minor numero di masse luminose, di quello che si avrebbe senza la derivazione.

Ho ripetutamente verificato con opportune esperienze questa previsione.

Così per esempio poste le condizioni delle esperienze tali che entro l'apparecchio (A) contenente aria a 20^{mm} di pressione, si aveva entro lo specchio girante un effetto simile a quello della fig. XI, mettendo una resistenza equivalente a quella d'una colonna d'acqua 4,5 c. e di un c. q. di sezione, come derivazione fra gli elettrodi, si ebbe una scarica simile a quella della fig. I.

VII. Influenza del magnetismo sulle scariche globulari.

33. *Azione del magnetismo sulle scariche.* È noto da lungo tempo quanta influenza abbia il magnetismo sulle scariche nei gas, specialmente se rarefatti, non solo nel cambiare la forma e l'aspetto della scarica, ma anche nel modificare la resistenza che essi oppongono alla scarica stessa. A queste azioni note da tempo devonsi poi aggiungere quelle da me scoperte più recentemente (1) e che riguardano l'azione del magnetismo sopra i fenomeni fotoelettrici e sulla dispersione delle cariche nei gas rarefatti.

Era dunque naturale che pensassi di esaminare se e quale influenza una potente elettrocalamita esercitasse sulla scarica globulare, ed ecco quanto ho constatato.

34. *Influenza del magnetismo sulla scarica costituita da masse luminose in moto.* Per queste esperienze adoperai l'apparecchio (B) (fig. 2) e qualche volta l'altro (C). L'apparecchio principale (A) (fig. 1) oppure l'altro (D) (fig. 3) meno dovevano prestarsi all'uopo, giacchè in causa del loro grande diametro non si poteva abbastanza accostare il polo dell'elettrocalamita alla porzione del gas percorsa dalla scarica, ed era quindi presumibile che l'azione del magnetismo non si sarebbe che debolmente manifestata.

L'elettrocalamita adoperata fu una delle due che riunite formano il noto apparecchio di Ruhmkorff, ed era percorsa da una corrente di circa 10 Ampère. Il suo polo convesso fu posto quasi a contatto della parete laterale del tubo di scarica fra un elettrodo e l'altro, mentre il suo asse orizzontale prolungato andava a passare per l'asse di rotazione dello specchio. In tal modo, trovandosi il tubo fra lo specchio girante e l'elettrocalamita, questa non impediva di vedere entro lo specchio girante l'immagine della scarica.

Se si guarda direttamente il tubo, oppure, ciò che vale lo stesso, se si guarda la sua immagine entro lo specchio immobile, l'azione del magnetismo sembra ridursi ad uno spostamento della scintilla nel senso in cui

(1) *Sulla convezione fotoelettrica e su altri fenomeni elettrici nell'aria rarefatta.* Mem. della R. Acc. di Bologna, serie IV, t. X (27 aprile 1890).

si sposterebbe una corrente diretta dall' elettrodo positivo al negativo. Tuttavia si scorge ancora che il carattere progressivo della scarica diviene assai meno marcato.

Osservando entro lo specchio girante, l' influenza del magnetismo si manifesta completamente, e può descriversi brevemente dicendo, che la parte del gas che si trova ove il campo magnetico è più intenso, si comporta come la porzione di gas compresa in una parte ristretta del tubo (vedi § 28), e cioè mentre s' illumina in modo continuo, essa si comporta anche come un elettrodo intermedio. Le due figure XXXV mostrano l' effetto del campo magnetico, e così pure le XXXVI. Le XXXV furono ottenute sopra una medesima lastra fotografica a pochi minuti d' intervallo e con questa differenza, che quella a destra fu fatta mentre passava la corrente nella elettrocalamita, e quella a sinistra senza tale corrente. Fin dal principio della scarica il gas s' illumina nella parte più intensa del campo magnetico, e resta luminoso in modo continuo sino alla fine. Intanto masse luminose si formano tanto sull' elettrodo positivo che alla parte superiore della luminosità continua, precisamente come se questa fosse un elettrodo intermedio. Qualche volta, come appunto nel caso della figura XXXV a destra, la prima delle masse luminose formantesi sull' elettrodo positivo, riesce a proseguire il suo cammino attraverso alla regione più intensa del campo magnetico.

Un effetto analogo si ha nelle fig. XXXVI, che offrono un caso di scarica composta da un gran numero di masse luminose.

Oltre a questo effetto, l' influenza magnetica sembra accrescere la resistenza del gas giacchè l'aspetto della scarica si modifica alcun poco nello stesso modo come se si aumentasse la resistenza del circuito.

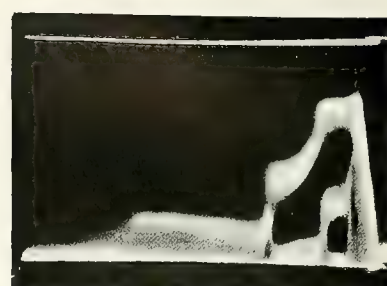
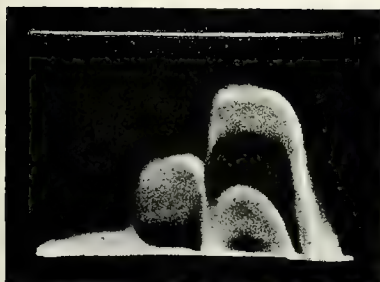
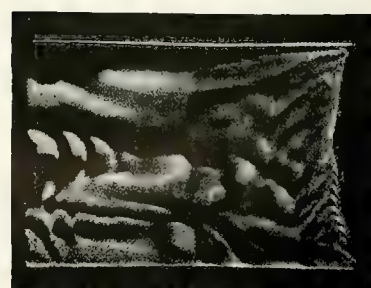
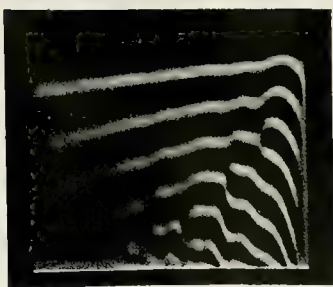
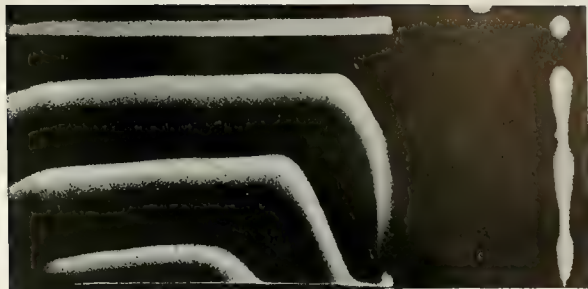
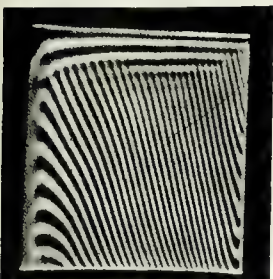
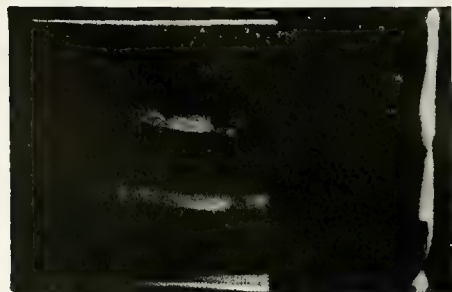
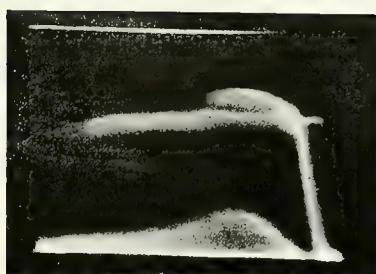
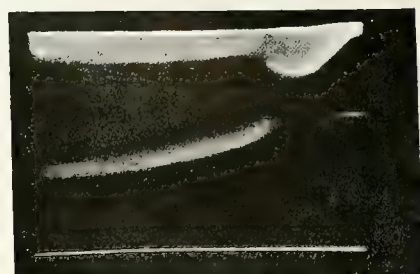
Diveniva interessante l' ottenere immagini fotografiche coll' intervento del disco girante posto fra le lenti dell' obbiettivo, onde poter esaminare le masse luminose isolatamente. La fig. XLI mostra una delle fotografie così ottenute. Essa fu fatta sopra una stessa lastra sensibile insieme alla XXXVII, e la sola differenza fra le due è dunque che durante la produzione della XLI l' elettrocalamita era percorsa dalla corrente. Oltre ad uno spostamento della scarica, specialmente visibile in basso della figura XLI e cioè presso l' elettrodo positivo, nel senso voluto dalle leggi elettrodinamiche, in virtù del quale la scintilla abbandona l' asse dell' apparecchio per andare a lambire la parete del medesimo, la detta figura mette in evidenza il risultato generale già esposto. Veggonsi diffatti tante successive immagini della luminosità immobile che si forma davanti al polo magnetico, come pure le masse luminose che si formano alla sua sommità, e quelle che hanno origine sull' elettrodo positivo, ma che non possono raggiungere il tronco di scintilla immobile nel campo magnetico.

È quasi superfluo l' osservare che di quest' azione del magnetismo non si può render conto colla spiegazione generica data nel capitolo precedente, e non solo perché questa, che ho esposto a titolo di abbozzo provvisorio, è troppo incompleta, ma anche perché nulla o quasi sinora si sá di positivo sulla causa degli altri fenomeni che si producono allorché scariche elettriche hanno luogo in un campo magnetico.

Tabella che indica le condizioni sperimentali in cui furono ottenute le fotografie quì riprodotte.

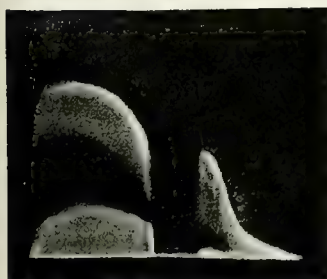
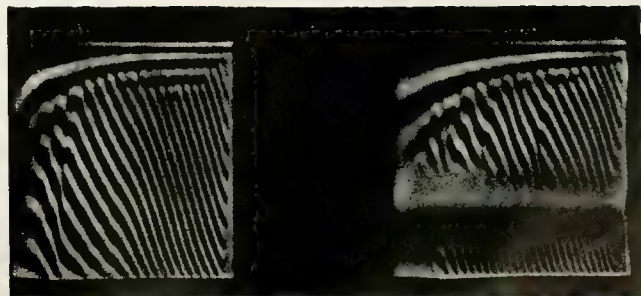
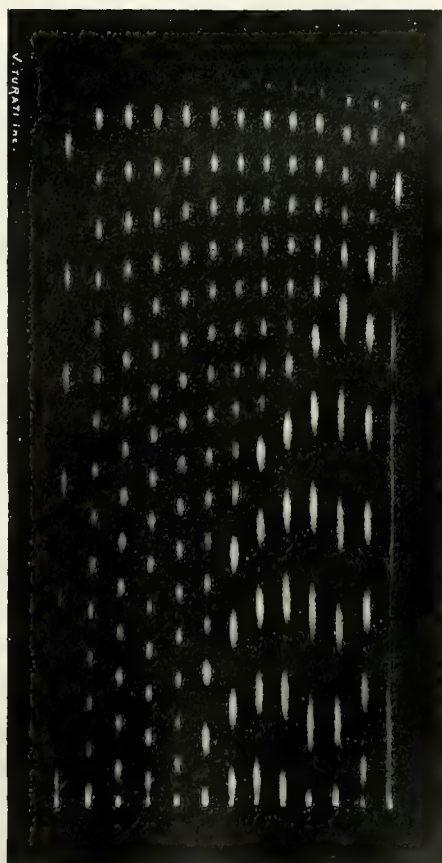
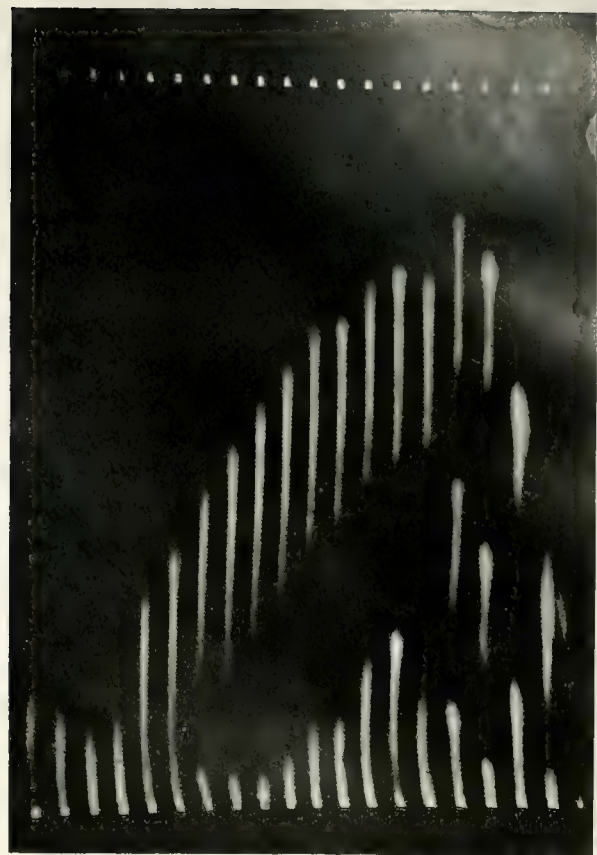
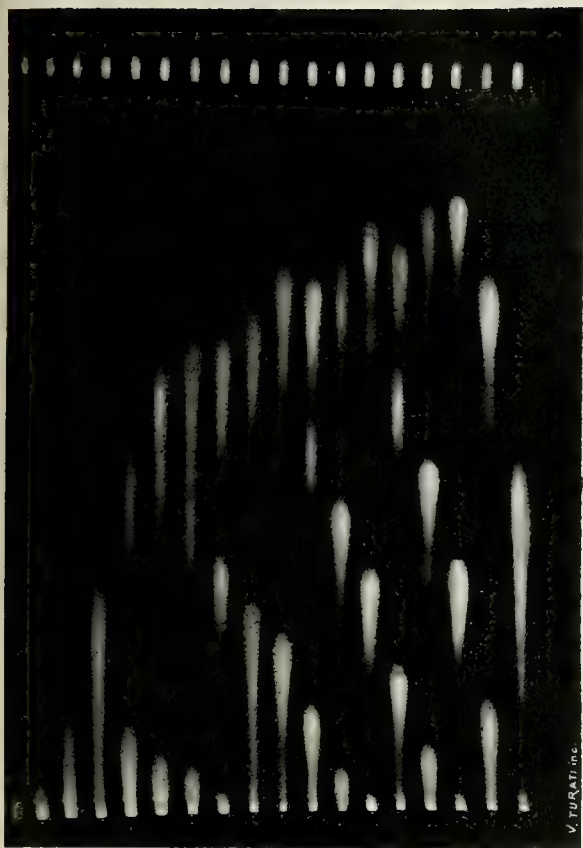
Numero d'ordine delle figure.	Capacità del condensatore espressa in numero di bottiglie.	Resistenza introdotta nel circuito, in centimetri di colonna d'acqua di un c. q.	Scintilla addizionale in mm.	Apparecchio adoperato.	Distanza degli elettrodi in centimetri.	Forma degli elettrodi.	Pressione del gas in mm. di mercurio.	Natura del gas.	Riferimento al testo §
I	27	16	7	(A)	28, 5	Sfere di 4 c.	20	Aria	7, 9, 13, 16
II	»	»	5	»	»	»	40	»	11, 13, 14
III	»	»	»	»	»	»	»	»	11
IV	»	»	15	»	»	»	25	»	11, 14
V	»	»	»	»	»	»	»	»	11
VI	3	6, 8	10	»	»	»	20	»	12, 14
VII	9	»	»	»	»	»	»	»	12, 14
VIII	27	»	»	»	»	»	»	»	12
IX	»	16	13	»	»	»	12	»	13
X	»	6, 8	10	»	»	»	10	»	13, 14
XI	»	4, 5	7	»	»	»	20	»	13, 14
XII	»	6, 8	10	»	»	»	80	»	13
XIII	»	»	5	»	»	»	120	»	13
XIV	»	10	7	»	»	»	20	»	13
XV	»	12, 6	13	»	»	»	80	»	13
XVI	»	8, 5	5	(B)	31	Fili di platino	20	»	17
XVII	»	12	11	»	»	»	8	»	17
XVIII	»	5	5	»	»	»	20	»	17, 20
XIX	»	8, 5	10	»	»	»	»	»	17
XX	»	4, 8	11	»	»	»	8	»	13, 17
XXI	»	17	7	(C)	»	»	30	»	17, 20
XXII	»	6, 8	»	»	»	»	»	»	17, 20
XXIII	»	14	10	(B)	»	»	9	Azoto	13, 19, 20
XXIV	»	3, 4	12	»	»	»	10	Idrogeno	20, 23
XXV	»	»	»	»	»	»	»	»	20, 23
XXVI	»	5, 4	8	(A)	28, 5	Sfere di 4 c.	20	Aria	28
XXVII	»	3, 4	5	»	»	»	»	»	28
XXVIII	»	5, 4	8	»	»	»	»	»	28
XXIX	»	6, 8	10	»	»	»	»	»	28
XXX	»	9	9	»	»	»	»	»	29
XXXI	»	10, 2	10	»	»	»	»	»	29
XXXII	»	7	8	»	»	»	»	»	30
XXXIII	»	»	»	»	»	»	»	»	30
XXXIV	»	»	»	»	»	»	»	»	30
XXXV	»	12	6, 5	(B)	31	Fili di platino	20	»	34
XXXVI	»	10, 8	6	(C)	»	»	30	»	34
XXXVII	»	12	12	(B)	»	»	20	»	19, 20, 21
XXXVIII	»	14, 3	9, 5	»	»	»	40	»	19, 20, 21
XXXIX	»	10, 2	7	»	»	»	9	Azoto	19, 20, 21
XL	»	11	10	(C)	»	»	25	Aria	19, 20, 21
XLI	»	12	12	(B)	»	»	20	»	19, 21, 34

INDICE

I.
II.
III.
IV.
V.
VI.
VII.
VIII.
IX.
X.
XI.
XII.
XIII.
XIV.
XV.
XVI.
XVII.
XVIII.
XIX.

XX.
XXI.
XXIII.
XXII.
XXIV.
XXV.
XXVI.
XXVII.
XXVIII.
XXIX.
XXX.
XXXI.
XXXII.
XXXIII.
XXXIV.
XXXV.
XXXVI.

XXXVII.

XXXVIII.

XXXIX.

XL.

XLI.

NUOVE RICERCHE

SULLA

MELANOFLOGITE

DELLA MINIERA GIONA PRESSO RACALMUTO (SICILIA)

MEMORIA

DEL PROF. LUIGI BOMBICCI

(Letta nella Sessione del 22 febbraio 1891).

Ordine degli argomenti:

I. Le idee, sulla Melanoflogite, dei mineralogisti che fin qui la studiarono.
L' opinione dell' A., sulla natura chimica e molecolare della stessa sostanza.

II. L' inalbamento che sempre producesi, nei cristalli di Melanoflogite, fortemente scaldati; essendone invece parziale e incostante l' annerimento.

III. Le colorazioni rosee, carnicine e nerissime nella Melanoflogite naturale, cristallizzata.

IV. Le strette analogie fra la Melanoflogite delle solfare sicule, il quarzo e la silice idrata delle solfare di Romagna.

V. Il quarzo cristallizzato e la silice idrata associati alla Melanoflogite nei singoli cristalli e nei loro aggruppamenti.
Le figure esagone osservate in quei cristalli.

VI. Le cristallizzazioni cubiformi e cubico-sferoedriche della Melanoflogite.
Le strutture mimetiche loro inerenti.

VII. La coesistenza, anche nei cristalli mimetici di Melanoflogite, dei due tipi di struttura cristallina; il tipo regolare, mono-reticolare, con determinati assi di simmetria; e il tipo sferoedrico o fibroso-raggiato.
Il graduato passaggio che ne deriva, dall' apparente, semplice cubicità alla sferoedria assoluta.

VIII. L' ordine cronologico delle fasi di costituzione della Melanoflogite e dei minerali con questa associati e concomitanti.

IX. La struttura degli aggregati sferoidali della Melanoflogite incrostante, al microscopio e alla luce polarizzata.

X. Conclusioni.

Appendice: Descrizione degli esemplari di Melanoflogite posseduti dal Museo universitario di mineralogia, in Bologna.

I.

Nel pigliare in esame gli esemplari di Melanoflogite posseduti dal museo universitario di Mineralogia (vedasi il catalogo in appendice), non ebbi dapprincipio altro intento che la scelta e la presentazione di quelli che già mi erano sembrati in alto grado istruttivi per la storia della sferoedria e delle sue gradazioni; volli limitarmi cioè, a porre in vista una nuova e bella serie di passaggi e di trasformazioni fra il tipo mono-poliedrico degli individui *a struttura regolarmente e unicamente reticolare con determinati assi di simmetria*, ed il tipo sferoedrico degli adunamenti globulari, a zone concentriche di accrescimento, ed a struttura *fibroso-raggiata.* E difatti, purchè si abbiano disponibili le principali varietà di Melanoflogite cristallizzata può comporsi con tutta facilità una serie di tal genere.

Ne sono primi termini gli esaedri simulanti i cubi regolari ed isometrici; ne sono ultimi termini le masse globose, colle superficie irte di apici di cristalli, ma talvolta liscie, perciò rassomiglianti a sfere.

Senonchè, trattandosi di una cristallizzazione prodotta da silice e acido solforico, della quale gli elementi essenziali, *natura chimica e costanti cristallografiche* sono tuttodì problematici, e della quale mantiensi ancora misteriosa la ragione di coesistenza della silice coll'acido solforico e con piccolissime quantità di carbonio e di acqua; trattandosi, inoltre, di un raro ed elegante prodotto *sui generis* delle nostre solfare sicule, finora esclusivo di una sola miniera, la miniera Giona presso Racalmuto, mi sentii fortemente attirato a verificare se il mio modo di giudicar la Melanoflogite era confermato, o no, da ulteriori osservazioni, alquanto diverse da quelle dei valentissimi scienziati che dal 1876 la fecero soggetto dei loro studi.

(1) *Neus jahrbuch für Miner. und Geol. 1876.*

Riassumo brevemente le supposizioni espresse dai chimici e dai mineralogisti che studiarono la Melanoflogite e pubblicarono i risultati delle loro ricerche. Faccio questo, sia per la convenienza di un sunto storico e bibliografico sull'argomento; sia per mettere in luce l'indole e la misura delle ragioni per le quali l'opinione mia diverge essenzialmente da quelle formulate fin qui.

Il Prof. Von Lasaulx, che fu lo scopritore della Melanoflogite, dandone nel 1876 le prime notizie (1), ne ammette la composizione chimica quale si dedusse da una analisi quantitativa, del Bettendorf, e ritiene costituita la sostanza da silice e acido solforico.

Il Von Lasaulx considera la Melanoflogite rigorosamente monometrica colle sfaldature parallele alle faccie del cubo. Descrive l'annerimento dei cristalli cubici mediante la calcinazione, e trae da questo fenomeno il nome specifico, significante appunto *nero alla fiamma;* ma resta in dubbio circa la causa dell'annerimento, imperocchè il resistere del color nero all'azione degli acidi fa escludere la presenza di solfuri di ferro, come causa determinante; ed il resistere all'arroventamento prolungato in contatto dell'aria impedisce di attribuirla a diffusione di particelle di carbonio libero, fornito dalla dissociazione di qualche idrocarburo preesistente.

Lo stesso autore classificando cronologicamente la Melanoflogite, in ordine alla paragenesi con i minerali suoi concomitanti, la giudica di ultima formazione, ossia più recente, in confronto del solfo nativo, della Calcite, della silice idrata opalina, e della Celestina.

Confido di riuscire a dimostrare, mercè le osservazioni di cui segue l'esposizione ordinata, che questi apprezzamenti sono inesatti; lo sono perchè la Melanoflogite *non è una combinazione chimica propriamente detta, unitaria,* di silice e acido solforico; perchè non è rigorosamente, intrinsecamente cubica; e perchè diventa nera solo in casi speciali e in parti limitate, mentre divien sempre bianca o verdolina nella massa per calcinazione; Il Lasaulx, sperimentando forse su pochissimi e minimi saggi, ha presa l'eccezione per la regola, ed altri ne hanno seguito l'esempio; infine, perchè la Melanoflogite si è costituita simultaneamente, con fasi ripetute, con alternanze di tempo e di posizione rispetto ai minerali che vi si trovano concomitanti; fra i quali è rarissima la Celestina.

Il Prof. E. Bertrand, (1) annunzia che la Melanoflogite presenta fenomeni ottici assai precisi i quali permettono di verificare che la cristalliz-

---

(1) *Bull. de la Soc. Miner. de France 1880*, pag. 239.

zazione della sostanza *non è isotropicamente cubica*; che è dipendente bensì da un assettamento (assemblage), di sei piramidi a base quadrata aventi i vertici loro al centro dei rispettivi cristalli esaedrici, ed aventi perciò *le basi quadrate loro nelle posizioni delle sei facce del cubo.*

Farò rilevare più avanti come il Bertrand molto si avvicini al vero ammettendo *mimetici* i cristalli della Melanoflogite; tuttavia Egli non tiene conto dei fatti contrari al modo speciale ora indicato di mimesia, quindi al carattere tetragonale della simmetria cristallografica dei poliedri costituenti. Ma fin d'ora amo di rilevare che i sei gruppi, ammessi dal Bertrand, come divergenti dal centro alle facce, nei cubi da esso esaminati, non sono piramidi, non hanno basi quadrate, non corrispondono alle caratteristiche geometriche dell'esaedro; esse sono, *quando sussistono*, fasci a struttura raggiata, di tipo sferoedrico, *associati* alle cubicità incomplete, quasi scheletriche del minerale.

Il Prof. G. Spezia (1) ha istituite sul minerale di cui si tratta molte accuratissime ricerche. Indico le più interessanti notizie che emergono dal suo lavoro e le sue deduzioni:

Egli annunzia che allorquando i gruppetti di Melanoflogite sono sostenuti da una patina delicata, che riveste cristalli di solfo, questa patina non è di quarzo, quale la dice il Lasaulx, bensì di silice idrata, opalina;

che i cristalli cubici che si credono diventati tutti neri per calcinazione, lo sono soltanto alla superficie; internamente si trovano divenuti bianchi e si mantengono tali;

che le loro sezioni ∞ 100, e perpendicolari alla patina di sostegno indicano « ... un involucro esterno, nero, a limiti rettilinei ed una massa bianca interna, a limiti irregolari;

che i cubi di Melanoflogite sono costituiti da diversi involucri su di un nucleo centrale. L'involucro esterno, che si fa nero per riscaldamento, è isotropo di struttura; il campo interno risulta da un aggregato di particelle cristalline, e non si annerisce al calore.

Secondo il Prof. Spezia non vi è ragione di ricorrere, come fecero il Mallard e il Bertrand, all'ipotesi della mimesia quadratica o tetragonale dei cristalli cubici per ispiegare certe anomalie ottiche, ammesse dal Mallard; imperocchè, nei cristalli da esso studiati *tali anomalie non sussistono.*

Egli osserva altresì che gli aggregati sferoidali di Melanoflogite anneriscono al pari dei cubi; solo peraltro alla superficie ed al centro; non già

---

(1) Spezia — R. Accad. dei Lincei, Mem. giugno 1883, Serie 3ª, Vol. XV.

nella zona intermedia, che rimane immutata; e che la materia colorante può essere carbonio; ciò desume da esperimenti delicati e decisivi. Peraltro non può dire come questo carbonio stia in combinazione colla silice e coll'acido solforico.

Le ricerche analitiche condussero anche il chiarissimo Professore ad accettare per questo minerale il resultato dell'analisi precedentemente eseguita dal Bettendorff.

Riconosce ed afferma l'alternanza delle fasi di formazione dei cristalli di solfo, calcite e Melanoflogite, avendo notato prima di altri che quest'ultima talvolta sostiene cristallini di solfo, mentre nel massimo numero dei casi essa vedesi sostenuta dal solfo stesso in grossi rombottaedri; anzi talvolta sostiene crosticelle di calcite, mentre suol trovarsi distesa sugli aggregati micro-cristallini di scalenoedri della calcite medesima.

Afferma non esservi Melanoflogite senz'opale. Propende per l'idea che la Melanoflogite cristallizzi in cubi, *veramente monometrici*; ma riconosce che riman tuttavia da trovarsi una causa per il fatto della simmetria esagonale di certi nuclei da lui trovati nelle sezioni di due cristalli, ed aventi contorno esagonale con angoli di 120°.

Ammette che l'alterazione dei grossi cubi sia avvenuta dall'interno all'esterno.

Fa voti, acciò si riesca a spiegare l'associazione dell'acido silicico coll'acido solforico, e la resistenza a separarsi dei due componenti, ancorché il minerale venga mantenuto a lungo ad elevate temperature.

Le mie conclusioni sulla natura della silice contigua al minerale; sulla struttura multipla dei cubi maggiori e degli aggregati sferoidali; sulla presenza del carbonio, e sul modo di localizzazione dell'annerimento; sulla simultaneità e alternanza di origine della Melanoflogite, del solfo, della calcite, e sulla preesistenza dell'opale, si accordano in parte con quelle dell'egregio collega; ma ne divergono quelle concernenti la intrinseca monometricità coll'esclusione della aggregazione mimetica, ed il procedimento, — dal nucleo interno verso le zone periferiche — di una alterazione che Egli crede avvenuta nei cubi più grossi della singolare sostanza.

Di ciò, nella parte descrittiva delle mie proprie osservazioni.

Il Prof. F. Pisani, di Parigi (1), nel 1888, qualificando alla sua volta come *strana* la composizione della Melanoflogite ne studia alcuni cubi in-

---

(1) *Bull. Soc. Mineral. de France* — 1888 pag. 278.

colori, di 2 mm. diametro, a spigoli netti e facce irte di cristalli (ossia del tipo intermedio e più comune della serie); trova molto *curiosa* la combinazione chimica della silice e dell'acido solforico; e dice di non conoscere altri esempi di combinazione analoga tranne quelli dell'acido fosfomolibdico, solubile e cristallizzabile con 7 $\%$ di acido fosforico ($^1/_{20}$ in equiv.) Cita pure la solforicina del Laurion.

Il Prof. E. Mallard, che aveva già nel 1880 (1) esaminati i cristalli di Melanoflogite, e d'accordo col Bertrand, li aveva giudicati mimetici, ossia dati dall'assettamento di sei piramidi ottuse tetragonali, a vertici convergenti ad un centro comune, presenta nel 1880 (2), una seconda nota in proposito. Egli suppone pseudomorfico il minerale; accoglie l'idea della *coesistenza* della silice e dell'acido solforico, carbonio e acqua, ridicendola *strana*; e denunzia come *singolare* il fatto della presenza, *nelle varietà fibroso-raggiate della Melanoflogite,* del quarzo libero, sotto forma di parti molto birifrangenti, e in plaghe che fra loro s'intersecano, colla croce nera positiva, ma eccentrica, nelle lamine ridotte abbastanza sottili.

Egli rileva che i cristallini cubiformi, giallini, a facce piane e specchianti son formati *quasi esclusivamente* di Quarzo; ma calcinandoli vi appariscono punteggiature nere, ossia tracce di carbonio.

Desume da ciò una *sostituzione di Quarzo alla Melanoflogite*; pure avvisando che ritrovandosi il quarzo *al centro dei cristalli* pare favorita piuttosto l'idea di una paramorfosi.

Nota pure, il Mallard, che la inesatta orientazione delle fibre di Melanoflogite rapporto alla esterna configurazione potrebbe far credere che questa sostanza avesse rimpiazzato semplicemente per pseudomorfosi la materia dei cristalli cubici; dunque, secondo l'A. il quarzo e la Melanoflogite avrebbero compiuto simultaneamente ciò che calcedonia e quarzo hanno fatto nella Saffirina cubica di Transilvania.

Egli *insiste sulla promiscua compenetrazione (enchevêtrement), del Quarzo e della Melanoflogite,* per mettere in guardia i chimici nel valutare i risultati delle analisi future.

Da parte mia convengo col Mallard sulla mimesia cubiforme della Melanoflogite, ma l'intendo in altra maniera, come dirò in appresso. Non credo pseudomorfico il minerale, nè trovo strana la coesistenza delle due diverse anidridi; dò molta importanza anch'io alla presenza di quarzo li-

(1) *Bull.* c. s. Tomo III, pag. 160.
(2) *Bull.* c. s. Tomo XIII, pag. 180.

bero in particelle nelle zone interne di Melanoflogite la cui struttura fibrosa raggiata spiega benissimo le croci scure d' interferenza osservate dal Mallard. Mi compiaccio che Egli indichi tutti di quarzo alcuni piccoli cubettini di Melanoflogite giallognola; trovo inutile far intervenire sostituzioni e pseudomorfismi; Per me non esiste Melanoflogite indipendente dal quarzo; essa é una varietá di questo, come un sale idratato lo é del rispettivo sale anidro, da cui differisce tuttavia per forma e per fisiche proprietá; e altro non vedo nella notata *inesatta orientazione delle fibre,* rapporto alla simetrica cubica esteriore, che l' effetto naturale del vario sviluppo *relativo* delle due *coesistenti* strutture cristalline di diverso tipo.

Accetto il ravvicinamento giustissimo e illuminante fra la Melanoflogite colla calcedonia Zaffirina di Transilvania, offrente forme di cubi; tanto più che stento a credere al modellamento della materia in vacui lasciati dalla Fluorina, mancando sopra di ciò le necessarie informazioni.

Ultimo a studiare la Melanoflogite, a tutto il decorso 1890, é stato il Prof. M. G. Friedel, il quale pubblica un lungo e particolareggiato lavoro (1) su questo stesso minerale italiano.

Cercheró di riassumerlo concisamente, commentando via via quei punti ne' quali le osservazioni o le idee dell' autore sono in contrasto colle mie ricerche e le mie deduzioni.

Il Prof. Friedel, trattando da principio, dopo un cenno sulla giacitura del minerale in posto, della struttura d' un cristallo esaedrico di Melanoflogite del quale osservava una sezione parallela a due facce, la descrive data da zone quadrate successive, concentriche, debolmente birifrangenti e con area centrale otticamente inattiva.

Misurati gli angoli diedri trova l' incidenza media di 88°,37' per le normali, e la riferisce *a tutti gli angoli del cubo.*

Evidentemente ció non puó aver luogo in un cubo realmente isometrico, ed a facce normalmente piane. Se gli angoli divergono da 90°, sei solamente (tre a tre culminanti, o sei a zig-zag, laterali), presenteranno lo stesso valore d' incidenza; gli altri sei avranno un valore subordinato al precedente e l' esaedro avrá simmetria romboedrica; le zone concentriche non potrebbero essere altrimenti quadrate. Ma ció puó verificarsi in un cubo a faccie lievemente concave; vale a dire in un cristallo multiplo, con abito esaedrico, od in un cubo con depressioni non di decrescimento; in tal caso per altro non si ha un cristallo normale; non si hanno valori angolari carat-

---

(1) *Bull. de la Soc. Miner. di France,* T. XIII. Déc. 1880, pag. 356.

teristici; non si hanno incidenze misurabili mercé l'angolo piano delle rispettive normali.

Malgrado questo, Egli pure ammette col Mallard e col Bertrand, composto ogni singolo cubo da sei piramidi tetragonali e dichiara emiedrica ciascuna piramide, come se si trattasse di entità distinte e determinabili.

Esclude recisamente le inclusioni.

Generalizza in modo assoluto l'annerimento dei cristalli per via di calcinazione.

Insiste sopra quella specie di poliedria biedrica delle facce di minimi cubettini, valutata al microscopio con incidenze di 91°,30′ sugli spigoli esaedrici, la quale rarissima nei tanti esemplari osservati è frequentissima invece nei cubi di pirite, se mimetici ed a nuclei con sei direzioni di sistemi raggiati, che ho descritti ultimamente.

Rileva l'esistenza di faccette parallele agli spigoli ma *irregolarmente distribuite;* tuttavia, avendo trovato di 63°,30′ l'incidenza di alcune colle facce adiacenti, le definisce come d'un tetracisesaedro b^2; crede sieno aggruppamenti accidentali le compenetrazioni d'esaedri a tipo globulare, caratteristiche del minerale; descrive uno dei casi frequentissimi di coesistenza degli elementi supposti del cubo con aggregati emergenti da ciascuna faccia di questo; tocca della frequenza dell'abito sferoidale, ed esclude le pseudomorfosi supposte dal Mallard.

Non credo di osar troppo notando gli errori così indotti nella diagnosi cristallografica e strutturale dal Prof. Friedel e gli altri, nel giudicare la natura chimica della Melanoflogite. Esprimo lealmente il mio modo di vedere, senza ombra di scortesia verso l'illustre scienziato.

Egli ammette perentoriamente, senza dubbi, la combinazione chimica *stabilissima* e *assoluta*, di silice e acido solforico.

Dà come formula $SO^3 + 20\, SiO^2$; ma riconosce col Mallard, che circa il 50 $^0\!/_0$ dei cristallini cubici sono esclusivamente dati da quarzo!! Alla sua volta spiega il fatto invocando la trasformazione della Melanoflogite in quarzo; senza sospettare affatto che essi sieno invece di quarzo fin dall'origine, e rimasti tali per non essersi *melanoflogitizzata* in essi la silice jalitica iniziale, preesistente!

Secondo il Prof. Friedel, solo nei giacimenti solfiferi con Melanoflogite presso Racalmuto si troverebbe associata la silice agli esemplari di Solfo e di Celestina.

Egli dunque ignora che la silice (jalite, calcedonia, quarzo ecc., in druse e gruppetti raggiati di cristalli), si trova *relativamente copiosa* nelle solfare della vicina Romagna; e la collezione del museo di mineralogia della Uni-

versità ne possiede oltre 60 magnifici esemplari; questi si presentano tutti — cosa significantissima per la mia tesi — *a mammelloncini, ad aggregati sferoedrici, a crosticelle irte di punte cristalline, a velature* ecc., colla massima somiglianza di quelli di Melanoflogite di Racalmuto; solo, non fu fin ora dato di scoprirvi traccia di questo minerale.

Per concepir l'origine del quarzo in gruppi di cubi, il citato A. ricorre alla separazione ed eliminazione dell'acido solforico dalla combinazione sua nella Melanoflogite; combinazione già da esso qualificata « assoluta e stabilissima ». Inoltre, pel modo suo di vedere, quest'acido solforico sarebbesi combinato subitamente col calcare, onde formare quel gesso che talvolta scorgesi in forma di minime squamettine e di efflorescenze bianche d'attorno alla Jalite melanoflogitifera, incrostante il solfo.

Ora, una tale spiegazione contraddice perentoriamente al concetto, già affermato dallo stesso A., della reale e fenomenale stabilità della sintesi dell'acido solforico colla silice, e che Egli ritiene essere una vera e propria combinazione chimica. Difatti l'agente di dissociazione del composto (Melanoflogite), quindi della libertà data all'acido solforico, avrebbe dovuto esser nello stesso tempo d'estrema energia chimica e di fenomenale mitezza; capace cioè di scomporre la combinazione tenacissima e quasi inattaccabile del composto ora nominato, vincendo il potere dissociante di quelle temperature elevatissime e lungamente mantenute, colle quali si tentò di eliminare dalla Melanoflogite il carbonio e l'acido solforico *senza riuscirvi che in parte;* capace di operare quelle reazioni chimiche cui valgono soli l'acido fluoridrico, o gli alcali, o i carbonati alcalini fusi al calor bianco nascente; e al tempo stesso così blando e delicato da lasciare nella loro piena integrità i limpidi e friabili cristalli di solfo nativo, colle loro esili pellicole di calcite, e la ganga comune, preesistente, ossia il calcare bituminifero, grigio-marnoso.

Si noti, che il risultato di tale scomposizione e della cacciata dell'acido solforico sarebbe ravvisabile nelle varietà più limpide e pure, più dure e lucenti, lievemente ambrate per diffusione probabile di qualche idrocarburo.

Mi auguro di poter sostituire a queste idee una spiegazione più ammissibile e giusta, confortata da fatti e da confronti.

Verso la fine del suo lavoro, il Friedel tratta della Melanoflogite in lamelle esagonali, ed in gruppetti globosi da $1/2$ a $3/4$ mm. di diametro.

Descrive queste lamelle come smussate sui loro sei lati, e fortemente birifrangenti; disposte per lo più in pile di lamine sottilissime (1).

Chiudesi la Memoria del Prof. Friedel con un confronto opportunissimo delle rispettive proprietà della Melanoflogite sia *quadratica* (secondo lui), sia *esagonale,* colla Tridimite e colla Cristobalite; e colla considerazione seguente: « Pare che la presenza dell' anidride solforica faccia « variare solamente in grandezza le proprietà della silice cristallizzata, « *senza modificare assai profondamente la molecola, per mutarvi il senso* « *dei fenomeni e gli elementi principali della simmetria.* »

Con questo periodo si rischiara un po' l' orizzonte. Esso rivela una felice intuizione del vero modo d' equilibrio molecolare delle due anidridi. Senza dubbio, sta in contraddizione aperta col concetto ripetutamente affermato dall' A. della *combinazione chimica assoluta e stabilissima;* ma è un grande passo verso l' idea della sintesi puramente meccanica delle particelle integranti, e conservanti nel loro lavoro cristallogenico completamente illesa la loro individualità specifica. Tanto meglio così!

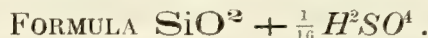
Il Dana (ediz. 1877) cita il giacimento e la composizione centesimale della Melanoflogite dicendone dubbia la natura chimica; il Naumann (Ediz. 1881), riporta il sunto del lavoro del Von Lasaulx, ricordando le osservazioni ottiche del Bertrand; lo Tschermak parla di *piccoli cubi birifrangenti, di silice, acqua e acido solforico;* il Lapparent scrive solamente nell' indice dei nomi quello del minerale in discorso, notandolo costituito di silice, acido solforico e acqua; il Groth (ediz. 1889), lo classifica *fra le silici idrate, del genere opale;* lo qualifica pseudoregolare, con pseudomorfosi, e composto di silice idrata, con 5 % di acido solforico e tracce di materie bituminoidi. Lo confronta colla Sulforicina del Laurion.

Ciò premesso, ecco la più concisa e sintetica espressione delle mie idee sulla natura chimico-molecolare e sulla costituzione strutturale caratteristica della Melanoflogite.

(1) La rigorosa esagonalità può riscontrarsi facilmente nelle forme isometriche del cubo, dell' ottaedro, rombododecaedro, mercè sezioni normali ad assi di simmetria, e così nei romboedri, nei prismi esagonali.

Io ritengo che questa sostanza debba intendersi e definirsi così:

SILICE ROMBOEDRICA (TIPO QUARZO), IN FORME PSEUDOCUBICHE PER MIMESIA, ED ABITUALMENTE ESAEDRO-SFEROEDRICHE, CON 5 % DI ACIDO SOLFORICO, SUO ELEMENTO DI CRISTALLIZZAZIONE.

FORMULA $SiO^2 + \frac{1}{16} H^2SO^4$.

Considero dunque la Melanoflogite come una varietà di silice cristallizzata, dipendente dal tipo massimo della serie silicea, minerale, il QUARZO.

Escludo che essa derivi da pseudomorfosi, ed a più forte ragione da epigenesi consecutiva.

Considero unita, in equilibrio meccanico-molecolare, alla sostanza cristallina del Quarzo, l'anidride solforica; non già in combinazione chimica definita.

Ammetto che le particelle primitive, iniziali, della costituzione fisica del Quarzo possano rimanere romboedriche, con ($R \wedge R = 94°,15'$); ma attribuisco all'assettamento cristallogenico loro con quelle dell'anidride solforica, ivi *funzionante da elemento di cristallizzazione,* la differenza dei valori angolari dell'assieme cubiforme, con incidenze di circa 90°, nei casi più frequenti.

In altri termini, trovo possibile e naturale che la presenza di un elemento di cristallizzazione, nel sistema reticolare romboedrico del Quarzo, facendone variare le incidenze caratteristiche e l'abito dei cristalli, attragga verso 90°, il valore vicinale di 94°, 15', *col concorso, in ciò efficacissimo della mimesia.*

Alla coesistenza abituale — negli esemplari di Melanoflogite — sia della struttura monopoliedrica, ad unico assettamento reticolare, colla sferoedrica raggiata; sia della condizione anidra e cristallina della silice colla idrata ed amorfa, attribuisco le notevoli differenze che il loro studio pone in luce e che diedero occasione a molte, diverse e generalmente oscure o titubanti interpretazioni.

Attribuisco poi alla influenza, quasi direi *alla suggestione,* delle idee preconcette e vecchie sulle combinazioni chimiche, quindi alla insufficiente conoscenza dei fenomeni della sintesi poligenica, gli strani imbarazzi e talune supposizioni infondate di cui feci cenno nelle pagine precedenti.

Queste conclusioni mie sono senza dubbio arditissime e forse troppo

originali e impreviste per la massima parte di coloro che ne piglieranno conoscenza.

Tuttavia mi arride la fiducia che basti un imparziale e sereno apprezzamento delle circostanze di fatto, intrinseche e comparative, da me segnalate, e verificabili ad ogni richiesta, per giustificarle, per ottenerne quindi l' assenso desiderato.

II.

L' inalbamento che producesi abitualmente per l'azione diretta del calore sui cristalli di Melanoflogite tipica.

I dieci esemplari che presento all' Accademia (dall' es. 21501 all' es. 21510 di collezione), tutti costituiti da gruppetti di cubettini per la massima parte nitidi e lucenti, si sono fatti bianchi, come porcellana in modo analogo a quello pel quale divien bianca la Selenite quando si va *disidratando.* Siffatta analogia vale a suggerire da sé sola che, anche per la Melanoflogite, la perdita della giá posseduta trasparenza puó dipendere da un cangiamento di struttura ossia dalla scissione di due qualitá di particelle fisiche, fra loro equilibrate e associate cristallogenicamente ; le une funzionando presso le altre *come elementi di cristallizzazione.*

Dopo che i cristalli di Melanoflogite sostennero il primo colpo di fuoco e s' inalbarono fino a completa bianchezza, si vedono, continuandone l' arroventamento al cannello, divenir neri in qualche parte della loro superficie e della loro massa. Talvolta anneriscono completamente; anzi si trovarono esemplari nativi giá divenuti intensamente neri. (Es. N. 21471 di collez.)

È notevole che alcuni cristalli inalbandosi pigliano tinte lievemente verdoline o gialline; e questi anneriscono poi più facilmente ma parzialmente. Coll' inalbarsi divengono non di raro friabili, similmente alla selenite e ad altri sali idratati che si disidratano; dopo di che si sfogliano e facilmente cadono in detriti di squamette che un lieve soffio puó disperdere. (Es. N. 21475, 21510 di collez.).

Dunque tale fenomeno, del farsi bianchi e quasi opachi i cristalli di Melanoflogite, che si scaldano vivamente é costante ed é paragonabile alle disidratazioni, a caldo, dei corpi contenenti acqua di cristallizzazione; é inerente al tipo strutturale della specie ; mentre la colorazione nera suol essere parziale, incostante e subordinata a circostanze variabili ed eventuali; essa puó mancare completamente.

Al minerale sarebbe convenuto assai più il nome di LEUCOFLOGITE; quello adottato contiene un' allusione smentita dall' osservazione sperimentale.

Resta invece plausibilissima l'opinione del Prof. Spezia, che l'annerimento, quando producesi, dipenda da minime particelle di carbonio; queste sono poi facilmente derivabili da tracce di quegli idrocarburi bituminoidi, in seno ai quali sogliono prodursi, di sovente, i più nitidi e puri cristalli di solfo, e dei quali sogliono essere imbevuti i calcari marnosi delle ganghe solfifere.

III.

Le colorazioni rosee, carnicine, o nerissime della Melanoflogite naturale, cristallizzata.

Questa particolarità di colori brillanti nei cristalli di Melanoflogite, e della tinta nerissima, costituitasi naturalmente si collega abbastanza coll' inalbamento precedentemente descritto perchè ne riesca opportuno il ravvicinamento.

Sono due le condizioni che rendono degni di speciale interesse questi esemplari del minerale che ci occupa: la bella e vivace colorazione rosea dei suoi strati composti da brillanti gruppetti di cristalli, e la sovrapposizione di questi strati ad una ganga selenitica, a zone bianche e grigie alternanti, colla struttura confusamente fibrosa.

Per le loro modalità cristallografiche, le varietà rosee corrispondono perfettamente al tipo, assai comune e caratteristico cui riferisconsi le fig. 7. 9, 11, e 12 tav. I.).

Il grado e la vivacità del colore differiscono assai ne' quattro esemplari che possiedo; nell'es. 21468 *a*, la tinta rosea è carica, brillante e uniforme; é scura, ma pallida nell' es. 21468 *b*, e volge al gialliccio in varie parti, negli altri due.

Le sezioni trasversali dei mammelloncini colorati in roseo ce ne presentano bianca la massa, ed il colore sembra limitato alla superficie; ma si scorge facilmente che esso penetra per un certo spessore nelle parti limpide dei cristallini più esterni, guardando il detrito di questi col microscopio.

La luce par che non abbia azione degradante su di questa colorazione delicatissima, al pari di quella del quarzo roseo di Rabenstein in Baviera.

Appena esposta al dardo del cannello la Melanoflogite rosea, ingiallisce. La nuova colorazione si mantiene nello stesso grado della preesistente; e

per l' azione sostenuta del fuoco alcuni cubetti divengono neri, altri anneriscono in parte, altri rimangono bianchi ed opachi.

Gli acidi energici, a freddo e a caldo, non fanno variar la tinta rosea, in modo sensibile; ma disgregando i cristalli rosei si vede, distintamente al microscopio che in certi punti l' azione degli acidi, anche a freddo, fa passare al color bruno-bituminoide il color di rosa, in certi punti e in varie direzioni.

È notevole il fatto che altri es., con gesso concrezionato fibroso, su cui stanno disseminati in copia piccoli cubi anneriti di Melanoflogite, portano patine e crosticelle di color carnicino, o roseo, ma amorfe e quasi terrose, così ricordando le qualità di gesso pur concrezionato e fibroso, rossiccio e variegato dei soffioni boraciferi di Larderello (o Montecerboli presso Volterra), in Toscana.

IV.

Le strette analogie fra la Melanoflogite delle solfare di Sicilia e il Quarzo e la silice idrata delle solfare di Romagna.

Nelle ricerche sulla genesi e sulla costituzione chimica della Melanoflogite riesce sommamente utile, e diró pure indispensabile il confrontar le modalità numerose di questa sostanza con quelle di altre materie silicee che si trovano formate in consimili o identici giacimenti. Feci già conoscere fino dal 1877 (1), il quarzo cristallizzato e la silice idrata, opalino-calcedoniosa, di cui si raccolsero molti e belli esemplari nella miniera solfifera di Marazzana nel Cesenate al cantiere de' Fondi; e nelle precedenti pagine ho fatto una nuova allusione all' associazione di queste silici col solfo nativo; posso perció limitarmi ad insistere su questo fatto: che, *fra le differenti varietà del quarzo, della selce, dell' opale e del calcedonio raccolte nei due indicati giacimenti, lontani fra loro ma perfettamente analoghi,* si hanno le più significanti rassomiglianze, le analogie più esplicite, tanto nelle strutture, quanto nelle associazioni relative. Con tali varietà potrebbesi comporre una doppia serie, facendo risaltare il parallelismo e la corrispondenza loro, termine a termine.

Difatti la silice che accompagnasi al solfo nativo ed alla calcite, a Marazzana presenta, al pari della Melanoflogite di Racalmuto, le qualità nitidamente cristallizzate in cristalli distinti ma più spesso in

---

(1) Contribuzioni di Mineralogia italiana. « Mem. Accad. delle Scienze, Ist. di Bologna, Serie III, tomo VIII, 1877.

gruppi, in druse, in mammelloncini irti di apici di piramidi, in veli cristallini sugli ottaedri di solfo; e le qualità idrate, jalitiche e calcedoniose, concrezionate e incrostanti e le miscele col quarzo nelle forme globulari a struttura finamente ma distintamente fibroso-raggiata.

La bellissima serie speciale, da studio, delle silici di Marazzana, che sta disposta nel Museo mineralogico di Bologna, comprende 63 esemplari (dal N. 22958 al N. 23020), fra i quali notevolissimi: l'es. N. 22958 in forma d'incrostazione jalitico-calcedoniosa del color azzurrino, fior di spigo, caratteristico della saffirina *in cubi* di Ungheria; gli es. 22966 e 22967 costituiti da copiosi rivestimenti a mammelloni, sulla marna solfifera bituminoide, di quarzo jalino, in piramidi grigiastre o bianche, a facce nitide e brillanti, colla frequente alternanza di quelle del romboedro primitivo di 84°, e colla dimensione media di due mm. negli spigoli culminanti; gli es. 22971, 22977, che presentano il quarzo in pellicole tenuissime, diafane rivestenti ora gli ottaedri del solfo nativo, ora i prismi di Celestina; gli es. 22997 .... 23003, ne' quali il quarzo, divenendo bianco, quasi opaco e terroso, friabile, efflorescente, si presenta a mammelloni distinti, a emisferi o globuli aderenti alla ganga solfifera, colla struttura raggiata, colle superficie ancor vestite di apici di piramidi e finamente sagrinate e scabre. Gli ultimi es. (N. 23011 .... 23020), passano alla qualità bianca, farinosa di questa silice stessa.

Questa silice generalmente distendesi colle sue incrostazioni opaline e calcedoniose, sopra ganga calcareo-marnosa, identica a quella degli es. di Melanoflogite. Su questa silice non agì l'anidride solforica; essa fecesi immediatamente e stabilmente quarzosa; quindi non ebbe luogo la sintesi molecolare cristallogenica delle sue particelle con quelle dell'anidride solforica; della Melanoflogite non si vedono tracce.

Ma da un momento all'altro, anche nelle solfare romagnole, può trovarsi questa rara sostanza; essendovi di già vicinissime, alla condizione speciale necessaria e propizia, le condizioni generali del giacimento.

V.

Il Quarzo cristallizzato e la silice idrata associati alla Melanoflogite nei singoli cristalli e nei loro aggruppamenti.

Le figure esagone osservate nelle sezioni di tali cristalli.

Le più notevoli sostanze che si scorgono ad occhio nudo o con piccoli ingrandimenti, nelle masse cubiformi, multiple e nelle sferoedriche di Melanoflogite, sono:

a. Il Quarzo cristallizzato, colle forme classiche dei prismi esagoni, piramidati;

b. La silice calcedoniosa, in nuclei centrali nei sistemi sferoedrici.

c. La silice jalitica, opalina, con disposizioni zonate, concentriche, o irraggianti, nelle masse centrali dei cristalli multipli, o alla superficie delle ganghe, in forma di pellicole sostenenti gli strati di cristallini cubici di Melanoflogite.

d. Tracce di materie coloranti, diffuse, bituminoidi, bene spesso concentrate verso le sommità cupuliformi di aggregati di cubi, nei rivestimenti più copiosi e mammellonari della Melanoflogite incrostante il solfo nativo.

Scopersi il Quarzo cristallizzato in prismi e piramidi esagonali, nei cubetti microscopici di una pellicola esilissima di Melanoflogite pura, ricuoprente come velatura traslucida grossi cristalli di solfo. È perciò cosa di estrema rarità, e difficile a verificarsi. La preparazione N. 21499 (fig. 17), della collezione di questo Museo, la presenta peraltro distintissima, con mediocre ingrandimento, per es. verso i 100 diametri. Il pezzo da cui fu ricavata stava già da anni nel Museo, colla indicazione sola di Girgenti pel luogo di sua provenienza.

Questo caso costituisce un termine intermedio fra i due perfettamente noti:

« *Cristalli di solfo rivestiti di pellicole di puro quarzo.*

« *Cristalli c. s. con pellicole di Melanoflogite pura.*

I prismetti di quarzo sporgono dalle facce dei cubi, nel modo rappresentato dalla fig. 17; vale a dire all'incirca come le estremità cristalline dei fasci *irraggianti*, sporgono dalle facce dei cubi di pirite, o dalle cavità centrali dei cristalli multipli della stessa Melanoflogite, combattendo così, alla loro volta, l'idea di una mimesia esa-piramidata, ad elementi tetragonali, e facendo sempre più plausibile quella della intrinseca natura quarzosa del minerale.

Circa alle figure esagonali osservate, nelle sezioni di alcuni cubi di Melanoflogite dal Prof. Spezia, credo di potermi restringere a poche considerazioni dopo quanto precede. Possono farsi queste supposizioni:

a. Derivano da sezioni di zone prismatiche, esagone, di quarzo, o di silice tridimitica, costituitesi a guisa di embrioni, sia contemporaneamente, sia successivamente all'adunamento sferoidale o cubiforme, ossia come i cristalli di quarzo del caso sopra descritto?

b, Derivano da sezioni trasversali di vacui lasciati da romboedri di calcite, e riempiuti poscia di silice ?

Presento questa seconda ipotesi imperocchè si connette con un fatto singolare e degno di nota, illustrato a sufficienza colle fig. 26, 27, 28, 29 della Tav. II, prese dalle sezioni N. 21490, 21493 di collezione.

Il fatto è questo. Parecchie sezioni di gruppi sferoedrici di Melanoflogite opalifera e quarzifera, si presentarono al microscopio con una profusione di areole triangolari, generalmente equilatere e di poliedrini tetraedrici a contorni nitidissimi messi vieppiù in risalto da certi corpuscoli neri e opachi che in varia quantità vi stanno irregolarmente sparsi.

Esclusa ben presto l'illusione di poliedri inclusi, tetraedrici, di una qualsiasi sostanza solida, fu facile verificare che trattavasi di vacui corrispondenti alle estremità trigonali di romboedri acuti di calcite; difatti dove stavano i corpuscoli, eravi già un vacuo corrispondente, nel quale era penetrato del polviscolo di smeriglio, nell'atto della lavorazione, ma facile a togliersi lavando; dove qualche tetraedrino era ancor pieno, bastava una goccia di acido per vuotarlo, producendovi la preveduta e dimostratrice effervescenza.

Per lo più dattorno a queste apparenze di tetraedri si dispone a zone concentriche la silice jalitica, e ciò ne rivela la presenza e la interposizione, come velo sottile, fra la Calcite e la Melanoflogite sovraincombente.

L' esser fortemente birifrangenti la aree esagone osservate farebbe preferire la prima idea; se si trattasse di pile di lamelle esilissime, del tipo tridimite, interverrebbe la polarizzazione lamellare; ad ogni modo, nella simmetria cubica, ottaedrica e dodecaedrica, del primo sistema, come nella romboedrica, è notoriamente inerente e di naturalissima manifestazione, la regolare esagonalità nelle lamine di sezioni o projezioni speciali.

VI.

Le cristallizzazioni cubiformi, cubico-sferoidriche e globulari della Melanoflogite. Strutture mimetiche inerenti.

Quale sia l'aspetto di queste cristallizzazioni e quali le varietà che ne dipendono, meglio che da qualsiasi descrizione può rilevarsi dalle diciassette figure (1, 1^{bis}... 16), della tavola prima.

La cubicità presentasi pressochè completa, dal punto di vista geometrico, nei cristalli rappresentati dalle figure 1... 4, malgrado lievi poliedrie

piccolissimi incavi nelle facce quadrate e malgrado l'incipiente rivelazione della presenza di *lastre quadrilatere,* tutte devianti dal parallellismo colle facce del cubo (fig. 4), anzi, tendenti a disporsi piuttosto come quelle dei notissimi gruppi *a rosette*, mirabilmente offerti dall'oligisto del S. Gottardo, dal Quarzo con nuclei calcedoniosi, dell' Arizona e da belli es. del Museo mineral. bolognese, di Selenite limpida di Bex, di Baritina arenifera di Rochemberg, di Marcasita di Nagyag, di Leadhillite di Sardegna, come dalle grandi corolle di neve, etc.

Nelle figure consecutive la cubicità apparisce pur dominante; ma si fa viepiù manifesta la struttura *multipla*, che è data appunto dagli adunamenti delle lastrine quadrilatere suddette, ciascuna con incidenze ortogonali, ma fra loro variabilmente oblique.

Queste lastrine stanno per lo più raccolte presso gli angoli piani concorrenti tre a tre agli otto angoli dell'esaedro (fig. 34, tav. seconda). Si fanno perciò viepiù appariscenti i rialzi di questi angoli e le depressioni, con lievi smussamenti curvilinei di alcuni spigoli, con piena indipendenza da ogni legge di decrescimento (fig. 9, 12, 14 ecc.). Comincia così ad assumere rilievo e significato la presenza, presso i centri delle facce esaedriche, striate, concave, curvilinee ecc., dei rilievi cupuliformi, o mammillonari, provenienti dal centro. Siffatti rilievi son dati da espansioni o fasci irti di apici di cristalli tabulari e di lamelle ortogonali, e dimostranti la presenza di strutture sferoedriche, fibrose, raggiate (fig. 10, 11, 15, 16). Peraltro, nelle tre ultime figure citate, l'abito sferoedrico è già prevalentissimo; lo è nei casi in cui l'occhio discerne ancora lamine ad incidenze ortogonali, con faccette piane e nitidissime, lucide, diafane, a disegno quadrilatero, addossate a pile irregolari e confuse, tuttavia rivelanti ancora col loro aspetto d'assieme, una dipendenza dal tipo esaedrico; lo è pure nei casi affini, in cui gli elementi cristallini sono quasi in totalità adunati sferoedricamente, e le cristallizzazioni sono già globose, scabre alla superficie per innumerevoli rilievi trigoni di cristallini microscopici, ma colla perduranza di angoli triedrici, corrispondenti a quelli del cubo, presso otto regioni simmetriche ed equidistanti, cui sarebber tangenti le facce di un ottaedro circoscritto (fig. 16, e rispettiva sezione fig. 18); lo è poi, in modo assoluto nelle varietà sferiche più sviluppate e voluminose, con nuclei biancheggianti, resi visibili dalla trasparenza e limpidità delle parti superficiali (fig. 22 e rispettiva sez. 35).

I cristalli di Melanoflogite sono generalmente piccoli; i più regolari e nitidi, rassomiglianti a cubi semplici, sono microscopici nelle pellicole cuoprenti cristalli di solfo, e i loro spigoli raggiungono di raro una lunghezza superiore al millimetro nelle crosticelle e negli aggregati sovrapposti a strati di Calcite. I gruppetti cubiformi e quelli colla comparsa delle nappe tondeg-

gianti di irraggiamento sferoedrico, giungono ad aver 2 e 3 millimetri di lato; i gruppi più voluminosi sono gli sferoidali, a superficie finamente sagrinata, ne' quali ho trovato lunghezze diametrali di oltre sei millimetri.

Un dettaglio della struttura esterna dei cristalli multipli cubiformi, puó vedersi riprodotto fotograficamente e copiato nella fig. 33 della seconda tavola. Basterebbe questo per escludere l' ipotesi della mimesia *con piramidi tetragonali, adunate esaedricamente;* e per dimostrare ad un tempo come sia fuor di proposito il descrivere per veri cubi, regolari, isometrici e isotropici i cristalli di cui é parola.

Il fatto tuttavia di primissimo valore, in questo speciale argomento, consiste nella singolar *mimesia* propria della Melanoflogite.

L' enunciato che più concisamente posso dare della mia idea in proposito é questo:

Otto sistemi triedrici di particelle romboedriche si dispongono colla simmetria ottaedrica intorno ad un centro comune, negli ottanti del sistema di tre piani coordinati, normali; quivi tendono a concretare l' entità geometrica degli otto angoli solidi del cubo.

La mimesia della Melanoflogite rientrerebbe perció nel tipo che vorrei dire *ottaedrale*, recentemente riscontrato negli ottaedri di Hauerite, colla stupenda conferma data dai cubi di Pirite di una nuova località piritifera del Bolognese e da altri di Cobaltina e di Fluorite. Sto adesso pubblicandone la illustrazione completa.

Rientra pure nelle serie di altre mimesie ottaedrali perfettamente analoghe, offerte dalle piriti *a nodo gordiano,* di Traversella, e da quelle in ottaedri globiformi, ossia colle otto facce loro fortemente convesse, che si raccolgono a Rockbudge (Stato di Virginia N. America). Basta il confronto delle figure che rappresentano le forme e le sezioni di questi interessantissimi cristalli per avere di ció la piena certezza.

Le fig. 31, 32 (tav. prima), rappresentano un ottaedro mimetico di Hauerite di Raddusa e una sua sezione principale; le fig. 29 (*a*, *b*, *c*, *d*), e 30 (*a*, *b*, *c*, *d*), danno idea di alcuni cubi mimetici della pirite del Bolognese, colle rispettive sezioni e di due sezioni analoghe di cubi di Cobaltina e di Fluorite; le figure 23, 24 sono quelle che già ebbi in addietro occasione di far note, della pirite a nodo gordiano, e della sezione teorica de' suoi cristalli; infine

le fig. 25, 26 appartengono alla pirite ottaedrica globiforme di Rockbudge (Virginia). Le analogie di tutti questi cristalli, così messi in confronto con quelli pure mimetici e abitualmente convessi di Melanoflogite (fig. 5, 19, 20) non potrebbero esser più chiare.

Si noti che in tutti i casi ora citati si ha la coesistenza delle forme a tipo semplice, monopoliedrico e geometricamente definito (ottaedri e cubi), colle strutture raggiate di sferoedria. Questa coesistenza, apparisce già alla superficie dei cristalli, colle sporgenze centrali, sulle facce, di gruppetti a fascio e di confusi aggregati di cristallini compenetranti; talvolta — come nell' Hauerite — con deficienze e vacui simulanti le tremie; sopratutto si fa evidentissima nelle sezioni che tagliano i cristalli per metà e che sono appunto quelle disegnate nelle fig. 24, 26, 29*d*, 30*b*, 31.

Questa mimesia non deriva dunque, come in tante altre specie minerali, dalla sintesi geometricamente regolare di tipi cristallini a costanti determinate.

Essa non conduce al costituirsi di una massa che nelle sue parti omologhe, tutte, presenta eguali proprietà ed è sede di fenomeni identici; e che nelle mimesie a tipo isometrico può simulare la isotropia strutturale. La mimesia invece, dei cristalli di Melanoflogite, *è sui generis.* Essa deriva dal contemporaneo concorrere, per costituir forme a tipo cubico e ottaedrico, *di otto sistemi cristallogenici* di una data struttura con altri sei di struttura diversa. Ma tutti, quattordici, si fanno solidali e obbedienti alla simmetria isometrica normale, per produrre cristalli di cui le modalità esteriori potranno esser più o meno rivelatrici della costituzione sintetica di massa.

Sappiamo ormai che le due maniere di struttura testè citate sono la *mono-reticolare,* con uniforme, omogeneo assettamento delle particelle cristalline, quale si ritiene negli individui semplici rispondenti al tipo classico dei cristalli; e la *fibroso-raggiata* o *sferoedrica.*

Ciascuna può riferirsi ai sei assi di simmetria cubica quanto agli otto di simmetria ottaedrica, tutti fra loro coordinati.

Resta pertanto a decidere una questione essenziale.

È cosa evidente che una volta ammessa la costruzione mimetica dei cubi di Melanoflogite nel modo testè considerato, occorre altresì la conoscenza della forma propria delle singole particelle iniziali; di quelle particelle, cioè, che mantenendosi identiche, costanti, per composizione chimica e per proprietà geometriche, generano, col solo mutare del loro assettamento, le diverse strutture, dalla reticolare, omogenea, alla fibroso-raggiata.

In altri termini: In quali forme, e di quale sistema, cristallizza veramente la Melanoflogite?

I poliedri mimetici riproducenti in senso puramente geometrico le forme del rombododecaedro, del trapezoedro-leucitoedro, si possono derivare dalle intersezioni ortogonali di tre prismi rispettivamente a basi quadrata ed ottagona; o dall' intersezione di sei prismi a basi rombiche, come il pentagonododecaedro da quella di tre prismi esagoni simmetrici; si possono concepire ottaedri regolari costituiti da elementi triangolari romboedrici, raccoltisi otto a otto, ed equidistanti, intorno ad un centro comune.

Ma per i cubi della Melanoflogite io li considero mimeticamente costruiti con otto sistemi triedrici di *romboedri*, disposti fra loro colla stessa simmetria *esaedriforme* che sussiste regolarmente fra gli otto angoli triedri del cubo.

Di più ravvisando io, nella Melanoflogite, la sostanza e la costruzione specifica del Quarzo, è naturale che assegni alle sue particelle, supposte romboedriche, il tipo stesso dei romboedri primitivi del Quarzo, nei quali, se la silice è pura, trovasi costante il valore di 94°,15'. Stanno a favore di quest' idea la vicinanza ai 90°, del valore ora ricordato; le differenze che si riscontrarono dal Friedel e da me stesso, in alcuni cubetti di Melanoflogite, dal valore di 90°, negli angoli diedri degli spigoli, e negli angoli piani delle facce; la configurazione dei cubi multipli, rialzati presso gli otto angoli, ed a spigoli immergenti verso le loro metà in un grande numero di casi; infine la possibilità tecnica di costruire sistemi cubiformi, con elementi romboedrici, dei quali i modelli rappresentati dalle figure 45... 48 possono dare idea.

Queste due figure rappresentano nel loro complesso ed in alcune particolarità, due sistemi cubiformi, a struttura mimetica, ambedue generati appunto da particelle, ciascuna romboedrica con $R \wedge R = 94°15'$ (forma del Quarzo), disposte con perfetta simmetria.

Tali sistemi sono alquanto diversi; ma si equivalgono nel dar idea della struttura ammissibile nella Melanoflogite.

Nella fig. 45, vedesi riprodotto con elementi romboedrici il tipo mimetico degli pseud' ottaedri di Oligisto vesuviano. Se non che, in ciascun ottante, invece di sola lamina triangolare, corrispondente ad una sezione normale all' asse principale del romboedro, ed ivi simulante una faccia vera dell' ottaedro regolare, si ha sulla lamina c. s., un gruppo di cinque romboedri, tutti rigorosamente iso-orientati, dei quali il centrale posa simmetricamente sulla faccia pseud' ottaedrica con uno dei suoi angoli terminali; vale a dire, col suo asse nel prolungamento dell' asse normale ad essa faccia (fig. 46). Ne risulta un assieme simmetrico di 40 romboedri, sufficiente a produrre un sistema cubiforme ad aree interne incavate, ma con rilievi sporgenti dal centro comune; il qual sistema diverrebbe illudentissimo se vi concorressero più piccoli e più numerosi elementi.

La fig. 47 rappresenta l'altro modello, assai più rassomigliante ad un cubo di quello adesso descritto.

I soliti romboedrini (forma del Quarzo), sono disposti come gli esaedri elementari del Salmarino nei cristalli cubici *a tremie*. Naturalmente le facce loro non posson combaciare nelle file rispettive, che coincidono con gli spigoli esterni del sistema pseudo-cubico, e con i gradini discendenti delle tremie centrali; ma la loro divergenza, dipendente dalla differenza angolare fra 94°,15' e 90°,00', può concepirsi ripartita in modo da non impedire la ortogonalità delle file rettilinee rappresentanti li spigoli (fig. 47). L'insieme offresi come un vero cubo a vacui contripeti, nei quali è facile immaginare sporgenti le espansioni *a nappe* dei nuclei a tipo sferodrico ed a struttura fibrosa o lamellare raggiata.

Ma nella Melanoflogite cristallizzata e cubiforme la silice costituente non è Quarzo puro! Contiene 5 % di acido solforico. Qualunque ufficio si assegni a questo composto, risulterà sempre probabilissima la sua influenza sulle forme cristalline iniziali della sostanza cui si aggiunge, ovvero *sulle forme sintetiche,* sugli *adunamenti poliedrici* che ne dipenderanno.

Ed ogni qualvolta, in sistemi di tal genere, le forme risultanti *tendano ad avvicinarsi al tipo isometrico*, come nelle mimesie più note e meglio qualificate, diviene naturalissima la simmetria cubica nei singoli adunamenti romboedrici di Melanoflogite, con oscillazioni possibili e probabili fra 94°,15' e 90°,00'; ciò a più forte ragione nei complessi macroscopici, di ordine elevato, costituiti dagli adunamenti di cui è parola, ivi *funzionanti come veri cubi*, quindi con assoluta e rigorosa modalità isometrica.

Gli assi di simmetria fisica, o di elasticità, di siffatti adunamenti coinciderebbero con i 4 assi ottaedrici dell'esaedro regolare.

Dallo sviluppo e dalla riunione di questi sistemi, in rispondenza alle direzioni dei 12 spigoli, trae nascimento la forma definitiva, pseudocubica della Melanoflogite, della quale sono presumibili e riconoscibili effettivamente, negli esemplari da studio, le seguenti particolarità: aspetto regolare con facce liscie e con cavità centrali, o con rialzi di apparente poliedria, nei più piccoli cristallini cubiformi; struttura nei più grandi esempi, a pile di tavole cristalline con disegno rettangolare ortogonale, ma con divergenze delle une sulle altre dal reciproco parallellismo.

Rugosità e striature derivanti da quelle pile e da queste divergenze, nei cristalli dove le tavole ortogonali son divenute, per incremento normale, discernibili anche coi piccoli ingrandimenti.

Incurvamenti e attondamenti di smussatura degli spigoli esaedrici; in-

cavamento conseguente delle facce, a superficie concave, curvilinee, striate, ma senza vere tremie e senza intervento di alcuna legge di decrescimento.

Ció per i cristalli cubici del minerale di cui si tratta, i quali pajono semplici e regolari.

Nel massimo numero dei casi le cristallizzazioni più vistose della Melanoflogite sono affollatamente multiple; tendono al tipo sferoedrico; risultano da un concorso d' inviluppi concentrici e di zone successivamente costituitesi intorno a nuclei centrali; frattanto, in tali zone, in tali inviluppi varia, colla struttura molecolare, la costituzione chimica. Per lo più varia con graduale transizione partendo da zone più esteriori o periferiche, disegnanti nelle sezioni da microscopio a luce polarizzata i contorni quadrati proprii dell' esaedro, e giungendo alle zone centrali concentriche, a contorno circolare, a superficie sferica, a nucleo abitualmente calcedonioso.

In tale concetto, le singole particelle generanti i cristalli mimetici e i loro aggruppamenti, nella Melanoflogite, sarebbero gli stessi romboedri primitivi del Quarzo; ma verosimilmente questi romboedri verrebbero avvicinati come poc' anzi ho notato, al tipo monometrico ed alla forma vera del cubo, dall' associazione loro, meccanica-cristallina, colle particelle primitive dell' acido solforico, di cui le forme sono esaedriche e con ogni probabilità romboedri o cubi (1).

Nego implicitamente così che la mimesia suddetta derivi da sei piramidi tetragonali convergenti con i vertici rispettivi in un punto comune, quale l' hanno immaginata il Mallard, il Bertrand, e quale viene accettata dal Friedel; ed ecco alcune altre ragioni di ció: io trovo che, dal punto di vista delle intime correlazioni del minerale col quarzo, è assai più naturale il riferirla ad elementi romboedrici, e proprio ai romboedri di

---

(1) A tutto rigore può dubitarsi della rispettiva cubicità ed esagonalità dei cristalli di anidride solforica e di acido solforico (H^2SO^4), quali sono indicate in diversi trattati, imperocchè tali cristalli fibrosi, esili, deliquescenti e corrosivi come sono, non diedero luogo fin ora a precise determinazioni goniometriche. Tuttavia, l' ammissione dei due modi suddetti di cristallizzazione è favorita da una circostanza di fatto sulla quale chiamai, fino dal 1883, l' attenzione degli studiosi, e che può formularsi così:

« *I corpi elementari o indecomposti, meno il solfo; e quasi tutti i composti binarii (ossidi,*
« *cloruri ed analoghi, solfuri ed analoghi), cristallizzano con forme isometriche e fisicamente iso-*
« *trope, pur essendo talvolta geometricamente emiedrici; ovvero, sono esagonali, o romboedrici, ma*
« *bene spesso per ragione di dimorfismo* »

In altri termini: « il grado di dissimmetria dei reticoli cristallini e la molteplicità delle diverse zone di faccie cresce col crescere della complicatezza della formula chimica, e colla struttura poligenica (v. nuovi studj sulla poligenesi - parte 3ª pag. 64) ».

I corpi semplici, gli ossidi e i binarj *c. s.*, se non sono esagonali, sono tetragonali; quindi sono sempre geometricamente e fisicamente uniassi. I composti, perciò, SO^3 ed SH^2O^4, rientrano con tutta probabilità in questa serie; la struttura fibrosa, frequentissima, è propria di molti sali monometrici ed esagonali, l' allume, il salmarino, il sale ammoniaco per modo d' esempio.

quarzo, di quello che a gruppi isometrici e isotropici fisicamente. Quei romboedri, ancorché serbassero il loro valore caratteristico di 94°,15′ nell'atto della genesi loro insieme all'a. solforico, non sarebbero molto discosti dall'esaedro regolare; di più, nella grandissima maggioranza degli esemplari di Melanoflogite con aggregati cubiformi o cubico-sferoedrici, *vedesi vuoto*, o *incavato a tremia* o fortemente depresso con orli e margini rialzati, incurvati e quasi attratti verso gli otto angoli triedri, appunto il luogo dove le piramidi ipotetiche dovrebbero sussistere; dove cioè le loro basi dovrebbero simulare le faccie piane del cubo.

È ovvio che in tali casi almeno, i cubi della Melanoflogite non posson credersi costruiti con sei piramidi quadratiche, per la perentoria ragione che nel luogo di tali piramidi essi presentano invece altrettante vacuità. Non solo mancano le piramidi; manca ivi eziandio la materia che dovrebbe produrle. In altri e numerosissimi casi, sempre nelle sei posizioni cui dovrebbero corrispondere le sei piramidi di mimesia, sorgono fasci o mazzetti di fibre cristalline, *irraggianti dal centro*, a tipo sferoedrico, ad apici triedri; talmente che bene spesso, in ciascuna delle sei aree centrali corrispondenti alle facce del cubo, ed incavate c. s., vedonsi sporgere dei mammelloncini e delle cupolette, costituite *identicamente* a quelle dei gruppi classicamente sferoedrici delle piriti a *nodo gordiano* (fig. 10, 11, 15, Es. 21447... 21456 di collezione).

Per lo più intorno a questi mazzetti o mammelloni, irti di punte cristalline, si dispongono, *a verticilli non regolari*, le pile di lamelle testè menzionate; ed ho trovato dei nitidi esaedri di Melanoflogite nei quali, dal centro delle facce visibili, sorgono prismi piramidati di vero quarzo. Infine, nego quel genere di mimesia perchè le divergenze dai 90° nelle incidenze delle facce e negli angoli piani degli spigoli, divergenze che il Friedel conferma e che appariscono in un'infinità di casi, per via di osservazioni macroscopiche e microscopiche del minerale e delle sue sezioni, *escludendo la cubicità escludono implicitamente la tetragonalità delle sei piramidi in cui può teoricamente e materialmente scindersi la forma regolare del cubo.*

VII.

La coesistenza anche nei cristalli mimetici di Melanoflogite dei due tipi; reticolare-monopoliedrico e sferoedrico a struttura raggiata. — Il conseguente graduato passaggio dalla apparente, semplice cubicità, alla assoluta sferoedria.

Le figure già richiamate (1ª .... 16ª), della prima tavola debbono aver prodotta senza dubbio, nel riguardante l'impressione di una serie istrutti-

vissima di forme cristalline, per il fatto dei graduati passaggi fra i due tipi qui sopra indicati.

Pertanto, tali transizioni continue da un tipo all' altro hanno questo grande significato; affermano la *coesistenza* delle due modalità strutturali; spiegano moltissime pretese anomalie nella storia naturale de' cristalli; illustrano la legge massima della evoluzione nelle morfologie inorganiche, e riducono al suo vero valore, tutto relativo, la determinazione rigorosa delle costanti geometriche de' cristalli e delle loro faccette. Senza dubbio questa determinazione essenzialmente matematica resterà sempre in sommo grado utile, necessaria e feconda, ma collo speciale obbiettivo delle ricerche comparative fra i corpi cristallizzati omeomorfi, e fra le specie prodottesi con diversi processi o in diversi giacimenti.

In altra pubblicazione (1), ho posto in luce quanto sia grande l' interesse scientifico delle variatissime modalità nei cristalli di Melanoflogite, colle quali può comporsi una bella serie per passar gradatamente dalla cubicità, in apparenza perfetta, alla sferoedria che dà all' occhio l' illusione di globi, anziché di cristalli.

Qui solamente occorre il dedurne questo risultato positivo:

1.° I cristalli apparentemente semplici di Melanoflogite *non sono cubi regolari*; non sono isometrici per ragione di struttura; *non sono isotropici*, per ragione di attitudini. Possono bensì parer tali; ce lo conferma il giudizio inesatto che ne diede Lasaulx, allorquando si accorse delle sfaldature parallele alle facce dell' esaedro (2). Tali cristalli sono indubbiamente *mimetici*.

VIII.

L' ordine cronologico delle fasi di costituzione della Melanoflogite e dei minerali con questa associati e concomitanti.

Se avendo modo di confrontar fra loro molti esemplari della miniera Giona, con Melanoflogite, tengasi conto della posizione rispettiva dei cristalli di tutte le specie che vi accompagnano la Melanoflogite stessa, cioè

---

(1) Le gradazioni della sferoedria nei cristalli di Hauerite, Melanoflogite, Pirite ecc. — Bologna 1890-91.

(2) Le sfaldature parallele alle facce del cubo sono facili assai più nei cubi *mimetici* di certi minerali di quello che nei cubi o in altre forme mono-reticolari. Confermano questo, tanto i cubo-ottaedri di Hauerite, colle sferoedrie localizzate coesistenti, quanto i cubi geminati di Pirite del nuovo giacimento bolognese, già presentati nel decorso Aprile a questa Accademia delle scienze.

Solfo nativo, Calcite, Celestina, silice jalitica in pellicole o crosticelle colle ganghe di Selenite, quando esse pure sussistono, giungesi immediatamente a questo risultato:

I minerali concomitanti c. s. alla Melanoflogite si son costituiti *promiscuamente con essa,* ma con fasi *irregolarmente alternantesi* pel tempo e pel modo, tanto da poterne dire contemporanea la genesi complessiva.

Peraltro, nel maggior numero dei casi e colla massima copia degli esemplari si fa evidente che la Melanoflogite si costituì posteriormente alla calcite, alla jalite concrezionata ed alla selenite zonata incrostante.

L' associazione della Melanoflogite colla Celestina è rarissima. Non potei riscontrarla fin' ora che in due minimi esemplarini della collezione che ho formata pel Museo (N. 21498 e 21499), i quali provengono da un antico acquisto fatto presso il Bryce Wright di Londra. Vi si scorgono appena pochi e miseri cubetti aggregati di Melanoflogite, sul solfo nativo, con druse di calcite in cristallini fusiformi, scalenoedrici, irraggianti. Sopra la Melanoflogite stanno come isolati, posando colle sole loro estremità sulla ganga, nitidi e bianchi prismetti di celestina, colla sua forma abituale MPe^1a^2 e piccolissimi fascettini con leggiere divergenze.

Puó concludersi che i diversi minerali associatisi nel giacimento di Racalmuto, colla Melanoflogite, come quelli della miniera di Marazzana, col quarzo, sonosi formati nel medesimo tempo; tutti cioè spettano ad un solo periodo di attività idrotermale, mineralizzatrice, generante in un col solfo nativo, carbonati e solfati, silice anidra e silice idrata; ma con irregolari alternanze di fasi, più o men favorevoli allo sviluppo dell' una o dell'altra delle citate sostanze.

Sta nella collezione un gruppo di sei esemplari, dal 21475 al 21480, appunto destinato a far vedere a colpo d' occhio i modi suddetti di associazione promiscua e di produzioni alternanti. Ma concorrono a tale intento parecchi altri es.; difatti: nell' es. 21475 bis, i cristalli di Melanoflogite posano *direttamente* sopra altri di solfo nativo. Si scorgono nitidissimi cubettini puri, brillanti, aderenti appena alle facce del solfo; e in un caso, su queste facce si notano le impronte quadrate, caratteristiche di altri cubi, distaccatisi e scomparsi.

Nella preparaz. 21477 le crosticelle di Melanoflogite tipica son sostenute da nuclei di silice calcedoniosa, incastrati alla lor volta negli strati cristallini di calcite fibroso-romboedrica; negli es. 21444... 45... 76 ecc., gli aggregati giallo-ambrati del minerale stanno sopra pellicole di jalite incolora

ricuoprenti grossi ottaedri di solfo nativo; e negli es. 21446... 47 ecc., vi si uniscono altri romboedri di calcite, e bianchi ciuffettini gessosi. I saggi 21478 e 21479 presentano i cubi di Melanoflogite sparsi sia sulla calcite cristallizzata e a strati incrostanti, sia direttamente aderenti al calcare marnoso grigio, solfifero; infine i saggi 21468, 21470, 21480 ecc., ci mostrano la Melanoflogite stessa nitidamente cristallizzata in mezzo e sopra al gesso concrezionato, fibroso, incrostante, con le colorazioni rosee, carnicine e nerissime precedentemente descritte.

IX.

Le strutture degli aggregati sferoidali della Melanoflogite incrostante, esaminata col microscopio ed a luce polarizzata.

Rendevasi, oramai, indispensabile qualche accurata ricerca sul modo di costituzione dei gruppi cubico-sferoedrici e degli aggregati globulari di Melanoflogite per averne dati sicuri sui rapporti di tempo e di posizione fra i cristalli del minerale e le silici dalle quali essi, per un processo eccezionale e raro, derivarono.

Praticai perciò alquante sezioni in quei gruppi, e le studiai col microscopio e colla luce polarizzata.

I risultati che trassi da questo studio sono illustrati in parte dalle fig. 36... 43 tavola seconda; e possono enunciarsi così:

Negli es. veramente sferoedrici, dove cioè la struttura distintamente raggiata è prevalente, la Melanoflogite tipica suol vedersi ridotta alla periferia, alla zona più esterna, dove si palesa colla sua isotropia ed inerzia ottica oltre che colle sezioni quadrilatere dei suoi cristalli.

La parte centrale è costituita di silice calcedoniosa, o selciosa amorfa otticamente inerte, nella cui parte inferiore sogliono vedersi frequentemente, coll' apparenza di vacui tetraedrici, le già descritte impronte degli apici di romboedri di calcite sui quali il gruppo si andò costituendo (fig. 37... 40 tav. 2ª).

Nella zona concentrica che s' interpone al nucleo di selce calcedoniosa ed all' involucro periferico essenzialmente opalino, rivestito esternamente dalla Melanoflogite cristallizzata, stanno associati quarzo, opale e jalite, con disposizione fibrosa-raggiata; vale a dire come nel calcedonio propriamente detto.

Ciò è provato da due fatti:

1.° La birifrangenza parziale di essa zona che alla luce polarizzata,

a nicols incrociati, vedesi prevalentemente e intensamente oscura ma punteggiata altresì dai colori spettrali, con allineamenti che irraggiano dal centro verso la periferia, mentre a luce ordinaria presentasi colla stessa identica modalità fibroso-fluidale, propria del calcedonio mammellonare e pseudomorfico.

X.

Conclusioni.

Dopo ciò che ho scritto nelle pagine precedenti nulla occorre che aggiunga per chiarire la mia idea sulla natura chimica e sulla struttura cristallina della Melanoflogite. Ma per quelli che gradiscono di trovare alla fine di uno scritto, per risparmiarsene la lettura intiera, il riassunto dei fatti principali e le conclusioni dell' Autore, raccoglierò gli elementi massimi della presente Memoria negli enunciati seguenti:

a. La Melanoflogite non è un composto chimico definito, unitario, obbediente alle leggi delle combinazioni atomiche di silice e acido solforico.

b. Invece è il risultato singolare dell' equilibrio cristallogenico fra particelle fisiche normali e prevalentissime di anidride silicica pura (tipo quarzo SiO^2), e di anidride solforica pura (tipo SO^3).

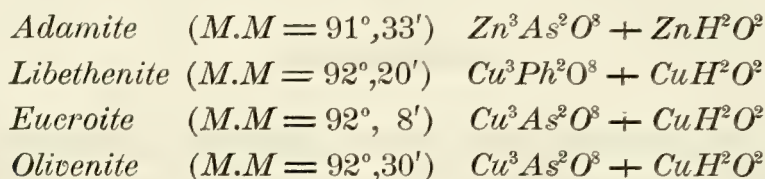
c. L' anidride solforica funziona, rispetto all' A. silicica, *come l' acqua di cristallizzazione propriamente detta* nei sali cristallizzati *idratati;* e tanto più facilmente, in ragione sia della contemporaneità dello *stato nascente* delle due stesse anidridi nel medesimo campo di attività chimiche e molecolari; sia dell' eguaglianza del numero di atomicità proprio di ciascuna ($4+2+2$ e $2+2+2+2$); sia, infine, per la correlazione di omeomorfismo fra le loro forme primitive, (esaedri ortogonali per l' anid. solforica, esaedri romboedrici di 94°,15′ per l' anid. silicica); ciò senza neppur ricorrere alla razionale ipotesi che tali forme integranti, le quali nel loro stato libero, indipendenti da ogni influenza perturbatrice del loro tipo specifico, presentano le suddette qualità geometriche possano reciprocamente influenzarsi e ridursi anche più vicine, quasi isomorfe, con i loro valori angolari caratteristici (1).

Di siffatti equilibri cristallogenici, ne' quali all' acqua di cristallizzazione

---

(1) Chi preferisse considerare l' acido solforico della Melanoflogite come - monoidrato SH^2O^4, con cristallizzazione di tipo esagonale troverebbe immediato l' omeomorfismo colla silice.

si trova sostituito un altro idoneo composto, si hanno copiosi esempi nelle specie minerali meglio conosciute; qui cito solo ad esempio l'Apatite e la Piromorfite, nelle quali ad ogni tre molecole del fosfato tribasico uniscesi una molecola di cloruro, rispettivamente di calcio e di piombo, nei cristalli esagonali; e gli arseniati e fosfati seguenti, ortorombici e pressochè assolutamente isomorfi, ne' quali con una molecola del sale uniscesi una molecola di idrato, che è rispettivamente di rame e di zinco:

Adamite	$(M.M = 91°,33')$	$Zn^3As^2O^8 + ZnH^2O^2$
Libethenite	$(M.M = 92°,20')$	$Cu^3Ph^2O^8 + CuH^2O^2$
Eucroite	$(M.M = 92°, 8')$	$Cu^3As^2O^8 + CuH^2O^2$
Olivenite	$(M.M = 92°,30')$	$Cu^3As^2O^8 + CuH^2O^2$

e. La silice con piccolissime dosi di acido solforico cristallizzata e a tipo cubico nella miniera Giona di Sicilia corrisponde perfettamente alla silice senz' acido solforico, cristallizzata a tipo romboedrico, cubiforme, della miniera Marazzana in Romagna.

In ambedue i giacimenti si hanno libere le varietà delle jaliti e dell' opale, colle miscele calcedoniose ecc., con quarzo cristallizzato.

f. La presenza del quarzo libero nella Melanoflogite è confermata da due fatti principali:

1° Il trovar parecchi cristalli cubiformi *tutti quarzosi;* non già per essersi *quarzificata* la Melanoflogite, come erroneamente ritiene il Prof. Friedel; ma per *non essersi stabilmente melanoflogitizzata la silice del quarzo;*

2° nei gruppi sferoedrici (sezionati per ricerche ottiche), la luce polarizzata fa discerner benissimo, a Nicol incrociati, l'intromissione di particelle, di irraggiamenti, di aggregazioni di puro quarzo, nelle zone interne di silice amorfa; tali zone, che senza di ciò si vedrebbero nelle dette condizioni perfettamente oscure, offrono confusamente sparsi, punti luminosi e strie a colori spettrali; e luminosità azzurrine, indefinite, con estinzioni ai 60° e 120° di rotazione delle lamine sul piano del raggio polarizzato incidente.

g. La produzione della materia silicea, (jalitica nella prima sua fase), e quella dell'anidride solforica (ossidazione normale del solfo, indiscutibilmente grandiosa e in proporzione dell' enorme quantità del solfato di calce per gessificazione del calcare che ne deriva) e del quarzo libero (disidratazione localizzata e favorita da circostanze speciali, della jalite), avvennero durante un dato periodo, nello svolgersi di una data fase. Tali fenomeni, sebbene alternantisi, quindi colla rispettiva intensità di continuo variabile, possono considerarsi come contemporanei.

Le circostanze speciali, c. s., favorenti la disidratazione della jalite, e la copiosa genesi del Quarzo, sono difficilissime a intendersi ed a riprodursi sperimentalmente. Ció peraltro puó dirsi per la cristallogenesi di qualsiasi modalità del Quarzo, e di cento altre specie minerali fra le più cospicue e feraci di colossali cristalli.

g. Il Quarzo laddove sussiste un *magmas* amorfo, opalino, siliceo, non puó essersi costituito, che *successivamente*, e per disidratazione e assettamento regolare delle particelle anidre risultanti. L' opinione che ammettesse l' inverso sarebbe assurda.

h. Un lavoro molecolare lentissimo presiedette alla divisione, nella sostanza delle sferule e degli esaedri sferoedrici di Melanoflogite, delle diverse qualità di silice; e questo viene confermato dalla localizzazione frequentissima verso la superficie di tali esaedri e delle sferule, delle traccie di bitume coloranti in bruno, ben distinte in alcuni esemplari. Il fatto di tali localizzazioni, che in certi punti o in certe direzioni della massa di un cristallo imprigionano una sostanza inquinante e diffusa é la diretta conseguenza della *cernita o selezione molecolare*, per lo scopo dell' omogeneità di struttura nei cristalli, continuamente attivo nelle fasi iniziali della genesi dei cristalli, probabilmente lunghissime, e bene spesso negletta dai mineralogisti, o non conosciuta abbastanza.

i. L' abito globulare o sferoedrico dominante si compone di più zone concentriche; le superficiali sono prevalentemente melanoflogitiche; le centrali o nucleari, o di sostegno sono prevalentemente di jalite pura.

Nasce da questa struttura l' analogia non trascurabile con i singolari e rari gruppetti a forma rosacea, di calcedonio, jalite e quarzo, dell' Arizona. Il calcedonio vi costituisce un piccolo nucleo, geodiforme, con rivestimenti jalitici, e contorno copioso di quarzo confusamente cristallizzato, irraggiante.

Finisco confidando che in siffatte questioni, di pura cristallochimica, si dileguino rapidamente, mercé il trionfo delle più semplici e naturali deduzioni, le preconcette idee e le dannose resistenze suscitate per lo più dall' inerzia, o da un eccessivo scetticismo o da meschini antagonismi di scuole. La deduzione che senza dubbio deve, prima o poi, affermare anche in Italia il suo trionfo é quella su cui fondasi in gran parte il mio concetto sintetico della poligenesi, cioé: «SE L'ACQUA DI CRISTALLIZZAZIONE — in virtù del suo omeomorfismo di esagonalità, — entra a far parte dei reticoli cri-

stallini colle sue particelle fisiche E SOLIDE — né di ciò può oggimai dubitarsi da chiunque abbia discreta lucidità di mente e coltura scientifica, *anche altri composti debbono poter funzionare analogamente!* Anche altri composti, cioè, inorganici e cristallizzabili, debbono poter essere *elementi cristallogenici nello stupendo fenomeno dell' attrazione iso-orientatrice,* e sostituirsi, virtualmente, all' acqua di cristallizzazione propriamente detta.

APPENDICE

Gli 86 esemplari (N. 21424 .... 21510 di catal.), di Melanoflogite, posseduti dal museo universitario di Mineralogia di Bologna.

Prima di dare il cenno descrittivo degli es. suddetti adempio al gratissimo dovere di ringraziare, anche pubblicamente, gli Ill.mi Sigg. Cav. Enrico Nicoli, Ing. Capo del distretto minerario di Bologna, ed Ing. G. B. Giammusso Oliver, Dirett. della miniera Giona, per la premura gentile, per la generosità illuminata e patriottica con cui donarono al Museo, e procurarono pure a condizioni propizie i più belli, scelti e istruttivi esemplari della serie.

Es. **21424 .... 21426** — Varietà del minerale in esaedri piccolissimi e brillanti, bianchi o incolori, taluni con facce leggermente incavate o con minime traccie centrali a margini interni, obliqui e seghettati, del tipo rappresentato dalle fig. 1 e 2 (Tav. prima).
Formano strati di fittissimi adunamenti, i quali rivestono le cavità e le screpolature geodiformi del minerale di solfo.
Vi si notano qua e là cristalli alquanto più grossi, ma tendenti al tipo sferoedrico (piccolissimi saggi).

Es. **21427 .... 28** — Var. in piccoli esaedri, copiosamente e confusamente aggruppati. Presentano minime traccie c. s.. Generalmente incolori, essi cuoprono come croste di accumulamento, sovrapposte ad esili pellicole di Jalite limpida, grossi cristalli di solfo nativo. Incrostano pure le masse amorfe di solfo. Il tipo può vedersi nelle fig. 1, 2 come i precedenti.
In questi esempi la rottura o la scomparsa di alcuni cristalli di solfo che già vi stavano incrostati, ha lasciati liberi i vacui corrispondenti, compresi fra crosticelle perduranti di Jalite e di Melanoflogite.

Es. **21429 .... 21433** — Var. in minimi cubetti a tremie, aggregati in croste giallicce e brune, le quali rivestono, a guisa di intonaco microcristallino e con disposizione a mammelloni le sporgenze e le cavità della ganga solfifera (Tipo delle fig. 3 e 4).

Es. **21434** — Var. in minuta cristallizzazione, che forma tenui crosticelle di color gialliccio lionato su grossi cristalli di solfo nativo. Forma pure, la Melanoflogite, piccoli aggregati cilindroidi e mammillonari, a superficie microcristallina.
Resta visibilissima nell'es. la forma di quei cristalli di solfo, sebbene essi sieno totalmente coperti dalla Melanoflogite incrostante, salvo dove si produsse qualche screpolatura (pezzo assai voluminoso).

Es. **21435 . . . . 37** — Var. in nitidi esaedri, di color giallo-miele chiaro, con facce lucenti, multiple o lievemente ondulate, scavate generalmente al centro da piccolissime tremie (tipo rappr. fig. 3 e 5). In alcuni cristalli le facce appariscono lievemente rialzate come da rudimenti di poliedrie convesse, che ricordano gli pseudo-tetracisesaedri della Fluorina.

In generale presentano assai regolare l'abito cubico.

Stanno copiosamente disseminati sopra tenui crosticelle biancastre, microcristalline, aderenti al minerale di solfo.

Es. **21438 . . . . 21441** — Var. in nitidi cristallini esaedrici di color bruno-caffè, di cui le facce offrono talvolta le tracce di piramidi ottusissime di poliedria; ma nella maggior parte scorgonsi le tracce delle depressioni centrali, a guisa di tremie, con i contorni rettilinei secondo il tipo delle fig. 2 e 3.

Stanno disseminati, isolati, distanti, sopra strati di Melanoflogite bianca, microcristallina, incrostante.

Es. **21442** e **21443** — Var. in piccolissimi cristallini di abito cubico, simili ai precedenti, di color giallo-bruno, o bruno-caffè più cupo al centro. Stanno sparsi sopra straterelli e mammellari della stessa Melanoflogite, in brillanti cubettini a tremie centrali (fig. 6 e 7). Al disotto avvi uno strato di Calcite a druse raggiate; poi la ganga marnosa solfifera.

Es. **21444 . . . . 21450** — Var. in fitti adunamenti di cristalli che formano croste continue, sulle cristallizzazioni di solfo nativo, generalmente su pellicole di Jalite incolora. La trasparenza delle crosticelle che scorgesi completa nella parte superficiale, v'induce un apparenza gelatinoide con tinte giallo d'ambra e sfumature brune. I cristalli, che hanno circa due mm. di lato in media, sono multipli, hanno abito cubico e spigoli a gradini; questi spigoli paiono smussati per l'incavarsi delle superficie contigue verso l'area centrale donde frequentemente sorgono fasci lamellari e cupoliformi della stessa sostanza (tipo della fig. 8). L'es. 21444 è uno dei più grossi della serie.

Es. **21451 . . . . 21454** — Var. simile alla precedente, ma colla superficie che pare spolverizzata da minimi gruppetti di lamelle bianche di selenite. Per la maggior parte tali gruppetti sorgono fra i cristalli della Melanoflogite, e vi si sovrappongono a guisa di efflorescenze.

Es. **21455 . . . . 21456** — Var. in grossi cristalli incolori e traslucidi, multipli, di abito prevalente esaedriforme, ma con rilievi convessi, irti di punte e di spigoli che lo avvicinano al tipo sferoedrico (fig. 9). Tali cristalli sporgono più o meno da uno straterello di Calcite finissimamente cristallizzata in romboedri inversi, multipli, curvilinei.

Es. **21457** — Var. in piccoli gruppetti cubiformi, del tipo delle fig. 9, 10, incolori e translucidi, scarsamente sparsi sopra rialzi mammellari di calcite bianco-perlata, in finissima cristallizzazione di romboedri acuti indeterminabili. Con solfo nativo in geode del calcare marnoso solfifero.

Es. **21458** — Var. in forma di rivestimenti o patine microcristalline, a superficie di mammelloncini o papille, bianca e traslucida. Questi rivestimenti cuoprono uno strato di cristalli dl solfo nativo, e pajon giallicci perchè lascian trasparire il colore di questi cristalli. Vi si scorgono gruppetti sferoedrici, e i contorni quadrati dei cristalli multipli che vi si compenetrano (Tipo fig. 8, 9, 10).

Es. **21459** — Var. simile a quella del N° 21457, ma con i vari gruppetti esaedrico-sferoedrici, lievemente colorati in bruno.

Es. **21460** — Var. in abbondante adunamento di cristalli cubico-sferoedrici, del tipo fig. 9, 10, multipli e traslucidi, di color bianco-gialliccio, in una geodina della ganga calcarea compenetrata di solfo.

Es. **21461-62** — Var. in fittissima cristallizzazione che forma rivestimenti mammillonari sopra le superficie geodiformi del calcare solfifero. I piccoli cristalli di Melanoflogite hanno abito di cubi multipli, incavati, come nel tipo delle fig. 8 e 10. Sono di color giallastro, bruno, traslucidi, poco nitidi e poco distinti.

Es. **21463** — Var. analoga alle precedenti, ma con cristalli alquanto più distinti e regolari, distesi sulla calcite incrostante la marna solfifera, con solfo nativo. Colore più chiaro che negli es. precedenti.

Es. **21464** — Var. in cristalli multipli, taluni piccoli, altri assai voluminosi, incolori e limpidissimi, tendenti al tipo della fig. 15, quindi all' apparenza sia di un ottaesaedro, sia di un aggregato sferoedrico. Stanno sparsi sopra una incrostazione di Melanoflogite gialliccia a rilievi mammillonari compenetrantisi ed a struttura raggiata. Con solfo nativo in massa.

Es. **21465** — Var. promiscue di piccoli cristalli multipli, rassomiglianti alle fig. 6, 9, 10, 11 con taluni cubetti brillanti (fig. 1, 3, 4) interposti.

Es. **21466** e **21467** — Var. in bellissimi aggregati sferoedrici, limpidi e incolori, con nuclei biancastri, visibili per trasparenza, con 5 . . . 7 mm. di diametro; sono singolarmente costituiti da cristalli tabulari jalini, a faccette brillanti, e riuniti sia in sei fasci a sommità mammellonari, irte di rilievi triedri, ciascuna occupante l' area di una faccia del cubo; sia coordinati, attorno al gruppo sferoedrico dei primi, in modo da riprodurre le posizioni e le simmetrie degli spigoli dell' esaedro regolare (fig. 11 e 12 tav. prima).

Tali mirabili aggregati stanno disseminati sui rivestimenti mammillonari biancastri e finamente cristallini di calcite e Melanoflogite sul minerale di solfo nativo. Rappresentano nel modo più istruttivo la coesistenza della sferoedria colla monopoliedria pseudo-cubica, nella Melanoflogite normale.

Es. **21468, a,** id. **b,** id. **c** — Var. rosea in piccoli e brillantissimi cristallini del tipo della fig. 2, 3, 4, ed in esaedri con vacui centrali delle facce, rispettivamente occupati da rilievi e sporgenze di sferoedria iniziale (fig. 13). Vi prevale tuttavia la disposizione a gruppetti sferoedrici o mammillonari assai minuti (circa due mill. nei diametri maggiori). Sono distesi, a guisa di rivestimento continuo e fitto, sul gesso concrezionato a zone fibrose. Nei tre esemplari sopra enumerati **a, b, c,** la colorazione è di un bellissimo colore di rosa ma in diverso grado vivace ed intensa. Essi ricordano alcuni saggi di Diallogite rosea, globulare e sferoedrica di Kapnick.

Es. **21469** — Var. in cristalli di color roseo, multipli, quasi sferoedrici, annidati in una piccola cavità del calcare concrezionato con globuli bianchi frapposti di jalite perlitiforme.

Es. **21470** — Var. in cristalli bruni, parzialmente bianchi e neri, piccoli ma nitidissimi, disseminati più o men copiosamente sopra una concrezione vacuolare di gesso biancastro, con patine terrose e crosticelle di color carnicino.

Es. **21471** — Var. in cristallini NERISSIMI come pece, corrispondenti al tipo della fig. 9; aggregati in gruppettini che rivestono le cavità irregolari geodiformi di una concrezione gessosa, biancastra la quale apparisce come alterata da calcinazione forse artificiale.

Es. **21472** — Var. c. s. in cristalli sparsi sopra la stessa modalità di ganga dell'esemplare 21470.

Es. **21473** — Var. in cristalli del tipo delle fig. 9, sparsi sopra una lastra di calcare, incrostata di solfo nativo da una parte e dall'altra rivestita di gesso bianchissimo, a crosticelle di globuli e mammelloncini, cui promiscuamente si associano i cristalli suddetti.

Es. **21474** — Var. in gruppetti sferoedrici, mammillonari, tutti costituiti da elementi aghiformi, irraggianti, e in globuletti simili a quelli tipici della Wavellite. (Due mezzi sferoidi aderenti a frammentini di ganga).

Es. **21475** — Var. in gruppetti di cubi, aderenti a ganga gessosa, calcinati al cannello e imbiancati completamente. (Su lastrina di vetro entro campanina).

SERIE DI ES. PER ILLUSTRARE LA CONTEMPORANEITÀ DELLE FASI DI FORMAZIONE DELLA MELANOFLOGITE E DEI MINERALI AD ESSA CONCOMITANTI.

Es. **21475**, bis. — I cristalli di Melanoflogite posano direttamente *sopra altri di solfo nativo.* Talvolta, invece di bei cristallini isolati, completi, aderenti leggermente alle facce piane e lucenti del solfo, si vedon su queste facce le impronte, distintamente quadrate e caratteristiche della Melanoflogite stessa.

Es. **21444** . . . . **21476** — I cristalli di Melanoflogite stanno *sopra una pellicola di Jalite* ricoprente cristalli di solfo puro.

La Melanoflogite in tali condizioni suol essere traslucida verso il centro, limpidissima alla superficie. Forma copiosi accumulamenti di poliedri multipli, cubiformi, con passaggio al tipo sferoedrico (fig. 9, 11); colore giallo-ambrato, con ineguali sfumature, volgendo al bruno.

Es. **21477** (tubetto) — Le crosticelle di Melanoflogite sono sostenute da nuclei di silice calcedoniosa, incastrate nei rivestimenti di calcite fibroso-romboedrica. Questi nuclei vennero isolati disciogliendo il calcare e la calcite nell'A. cloridrico diluito.

Es. **21446** — Ai cristalli di Melanoflogite dei casi precedenti, unisconsi altri cristalli romboedrici acuti (e^3) di calcite, e ciuffetti bianchi di gesso (Es. 21446 ecc.).

Es. **21478** — I cristalli di Melanoflogite posano *sopra quelli di calcite;* sia con fitte distese di cubettini nitidi, brillanti e incolori; sia con cristalli multipli, con gruppi di cristalli, o con cubi isolati e completi.

Gli strati cristallini di calcite, nei casi precedenti sogliono rivestire straterelli di solfo.

Es. **21479** — I cristalli di Melanoflogite posano *sul calcare grigio marnoso* compatto e solfifero. Si presentano cubiformi, bianchi, lucenti, sono compresi fra patine di calcite.

La diretta sovrapposizione delle incrostazioni di calcite sul calcare compatto è abituale nei giacimenti solfiferi tutti di Sicilia e di Romagna.

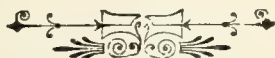
Es. **21480** — I cristalli di Melanoflogite sono sparsi *nella selenite fibrosa* o granulare e concrezionata. Nel primo caso figurano i bellissimi gruppi di cristalli rosei precedentemente descritti; (N. 21468 e 21469); nel secondo i neri o bruni pur indicati, con i suddetti (Es. 21470).

Es. **21481** — Il solfo in cristalli, che si frappogono alla Melanoflogite e si distendono su questa. Non ho veduto finora cristalli di solfo puro veramente posati sopra altri di Melanoflogite, in guisa cioè da affermarsi all' evidenza di origine posteriore; ma gli es. 21438, 21439, 21448, 21466 e altri presentano tali adesioni, promiscuità, reciproche intromissioni fra le due sostanze, e lo solfo si stende talmente sulle croste Melanoflogitiche che se non la decisa posteriorità del solfo, in rapporto alla Melanoflogite, risulta palesata e fuori di dubbio la loro rispettiva contemporaneità.

Serie di sezioni di cristalli e gruppi sferoedrici di Melanoflogite, per osservazioni al microscopio.

Sono 20 preparati, dal N. 21482 al 21500.

Serie per la dimostrazione dei modi di imbiancamento della Melanoflogite, al dardo del cannello. Dal N. 21501 al 21510.

Dieci piccoli esemplarini, ma con cristalli distintissimi, chiusi sotto campanine di vetro, allineate sopra assicella nera di legno. — Vi si scorgono oltre i gradi diversi del fenomeno, sopra cristalli di varia struttura, anche i parziali annerimenti, prodottisi consecutivamente sopra taluni degli esemplari quivi classificati.

La spiegazione delle figure, di questa e delle consecutive Memorie, trovasi in fine.

LE GRADAZIONI DELLA SFEROEDRIA NEI CRISTALLI

SUA COESISTENZA NELLE FORME NORMALMENTE RETICOLARI

MEMORIA

DEL PROF. LUIGI BOMBICCI

(Letta nella Sessione del 22 Marzo 1891).

Presentando a quest'Accademia insigne i risultati di ulteriori ricerche sulle modalità sferoedriche delle cristallizzazioni, mi propongo di confermare la giustezza delle conclusioni seguenti:

1° Fra le forme cristalline monopoliedriche, aventi il tipo normale e regolare dei cristalli propriamente detti; corrispondenti perciò, idealmente, alla individualità e uniformità strutturale del reticolo omogeneo; limitate solo da piani obbedienti alla legge di razionalità colle rispettive costanti fisiche e goniometriche: e le forme globoso-sferoedriche a struttura fibroso-raggiata, e superficie data da numero indeterminabile di apici angolari, ESISTONO GRADUATI PASSAGGI.

Vale a dire:

I due tipi ora accennati, derivante il primo da un sistema reticolare unico con determinati assi di simmetria, mentre il secondo è dovuto ad allineamenti di particelle cristalligene irraggianti da centri di simmetria, con infinito numero di assi, e limitati da superficie sferiche o di ellissoidi, SONO DUE TERMINI ESTREMI DI UNA MEDESIMA SERIE; quindi, anzichè essere fra loro indipendenti, tali da rappresentare un contrasto reciproco, e il portato di attività cristallogeniche incompatibili, si coordinano nel concetto più completo e generico del fenomeno della cristallizzazione naturale.

2° La curvilineità delle facce dei poliedri cristallini vie maggiormente si afferma come una delle più interessanti e naturali qualità dei cristalli; sia per le aberrazioni multiformi che induce nei tipi geometrici della cristallizzazione normale, di cui la regolarità e la costanza sono quasi sempre puramente ideali; sia, perchè ci aiuta a giudicare la natura delle differenti influenze dinamico-molecolari il cui intervento, nella genesi dei cristalli curvilinei e sferoedrici può dirsi inevitabile, e che si fanno contemporaneamente attive sulle leggi dei decrescimenti; donde le risultanti pel meccanismo di questi decrescimenti, date appunto dal modo e dal grado di ogni singola curvatura definitivamente prodottasi.

3° Al fenomeno della sferoedria propriamente detta, astrattamente sintetizzabile in un tipo sferico, con infinito numero di allineamenti raggiati e di apici terminali, si coordinano, colla maggior possibile naturalezza, i casi tutti delle facce elicoidi, delle lastre contorte a paraboloidi, dei romboedri selliformi, delle aggregazioni corolliformi o verticillate, e della spiralità di certe tremie, quelle ad es. del Bismuto e dell' joduro potassico.

Una coincidenza singolare mi permette di presentare oggi, parecchi esemplari in sommo grado istruttivi della *coesistenza ne' singoli aggregati cristallini delle due modalità tipiche, monopoliedrica e sferoedrica*, spettanti alle due specie da poco tempo scoperte in Sicilia, la Hauerite delle argille grigie, marnose di Mineo; e la Melanoflogite, di uno strato solfifero della miniera Giona di Racalmuto.

Ambedue queste sostanze, bisolfuro isometrico di manganese l' una, quindi del genere della Pirite; silice e anidride solforica l' altra, quindi ravvicinabile alle miscele di silice Quarzo, e silice idrata jalitica, offrono una serie interessantissima di graduati passaggi, ossia di numerosi termini intermedî, fra le due estreme modalità del semplice poliedro geometricamente determinato, e dello sferoide a superficie finamente scabra o liscia; offrono dunque una prova decisiva a favore delle affermazioni precedenti.

Inoltre, mi è dato di presentare alcuni altri casi, ciascuno de' quali, preso isolatamente, forse non basterebbe ad incitare gl' indifferenti ed a convincer li scettici; ma coordinati assieme e con i precedenti, additano un indirizzo di ricerche e di osservazioni d' interesse evidente e in alto grado fecondo per la storia vera del fenomeno universale della cristallizzazione.

Complessivamente indicati i casi che vado esponendo, dipendono dai minerali seguenti:

I. L'Hauerite in cristalli sciolti, di abito ottaedrico dominante, di Mineo (Val di Noto).
II. La Melanoflogite della miniera solfifera di Racalmuto;
III. Le Piriti in cristalli cubici, talvolta di mirabile bellezza e regolarità, della Pirite di « Cà della Fiora », nei monti della Riva, Valle di Dardagna, nell'alto Appennino bolognese;
IV. La Miemite in romboedri multipli, di Miemo, presso Volterra in Toscana;
V. La Calcite in romboedri acuti $11\bar{1}$ (e^1, detto *inverso* di Haüy), della formazione solfifera di Romagna;
VI. La Fluorite mimetica, in cubi, del Cumberland;
VII. L'Analcime del basalto analcimitico delle isole de' Ciclopi, prov. di Catania;
VIII. La Neve grandiniforme, a sistemi stellati di noduli (gragnuoli) con simmetria esagonale, caduta il dì 27 novembre 1890, anche in Bologna.

Ritengo ben fatto il dar semplicemente un cenno delle particolarità che gli esemplari di cui è parola presentano in ordine alla sferoedria coesistente alle forme cristalline normali. Amo di lasciare a chi legge quasi libera la iniziativa delle conclusioni; e tengo gli esemplari, cui corrispondono le figure delle tavole corredanti questa Memoria, a piena disposizione di coloro che gradissero studiarli direttamente.

I. La sferoedria nei cristalli cubo-ottaedrici di Hauerite.

La storia della scoperta di questa — pirite di manganese —, e i caratteri dei suoi esemplari, sono ormai a conoscenza di tutti, nè occorre che io dica altro di ciò. L'abito dei cristalli più copiosi è rappresentato dalla fig. 32 della tavola prima.

Nei cristalli di Hauerite la coesistenza dei due tipi qui considerati viene posta in luce dal trovarsi presso al centro dei più voluminosi ottaedri per lo più modificati dalle facce del cubo lievemente incavate a tremia, un sistema di sei fasci fibroso-lamellari, simili a nappe rigide, acuminate al centro comune, e dirette colle loro espansioni verso le incavature suddette, ossia verso gli angoli dell'ottaedro regolare; avendo così i rispettivi loro assi coincidenti con i tre assi di simmetria del sistema isometrico (fig. 31 e 53...56).

Questa particolarità è stata scoperta recentemente e descritta dal professor Francesco De Memme di Genova.

Isolatamente considerata, essa poco c' insegnerebbe a proposito delle sferoedrie nei cristalli; ma se la ravviciniamo a ciò che vedesi stupenda-

mente costituito in quel singolarissimo esemplare della pirite di Brosso già da me descritto, rilevandone la rassomiglianza esteriore col classico intrecciamento di corde che dicesi a *nodo gordiano;* se lo paragoniamo ai cristalli polisintetici di altre piriti, ne' quali domina il tipo mono-poliedrico dell' ottaedro regolare o del cubo, o del pentagono-dodecaedro, ma fattisi curvilinei, tondeggianti, rigonfiati ed a superficie multiple per addossamenti di lamine o scabre per moltitudini di rilievi angolosi di cristalli non iso-orientati, si comprende subito, pur trascurando altri utili confronti, che l' Hauerite cubo-ottaedrica offre nei suoi cristalli complessi otto parti concorrenti, cui esternamente corrispondono le otto facce dell' ottaedro; in ciascuna di esse parti le sfaldature sono facilissime, nitide e parallele alle facce dell' esaedro; ma nei sei fasci fibro-lamellari, le cui direzioni già dissi coincidenti con quelle delle tre coordinate ortogonali, esse s' interrompono, si frazionano; e le crescenti espansioni, a distanza dal centro, sono le prove di una congenita tendenza alla *sferoedria,* rimasta peraltro sopraffatta dalla più vigorosa tendenza all' iso-orientazione ed alla unicità nei cristalli di questo minerale.

Se non che, nel *nodo gordiano* della pirite, gli elementi dell' ottaedro e del pentagono-dodecaedro sono ridotti subordinatissimi, ed invece, le sei espansioni delle *nappe* risultano in piena prevalenza colle loro convessità tondeggianti nelle posizioni proprie delle facce dell' esaedro (fig. 23 e 24 Tav. prima). Risulta dunque evidente l' opportunità di coordinare a questo tutti gli altri casi noti, ne' quali la curvilineità delle facce si collega, identicamente a quanto vedesi negli ottaedri d' Hauerite, alla presenza di cristalli minimi, geminati per compenetrazione o sporgenti dal centro, ovvero alla struttura mimetica dei cristalli cui le facce curve appartengono.

Appariscono, in conseguenza due fasi distinte e consecutive nella genesi di questi cristalli; una fase prima, di attrazione molecolare, rapida, centripeta, con il massimo d' intensità nella direzione stessa dei tre assi coordinati, e con tendenza all' isotropia raggiata, sferoedrica; una fase seconda di predominante assettamento regolare delle particelle solide (parallellopipedi o cubi), in un sistema unico reticolare, con otto regioni coordinate, rispondenti agli otto spazi (ottanti), fra gli assi suddetti.

Se poi, la prima fase consentisse il regolare assettamento c. s. in ciascuna delle sei direzioni, generatore del tipo piritoedrico, facilmente si avrebbe, all' estremità di ciascuna delle sei sporgenze rispettive di irraggiamento, ed all' esterno, un cristallo; e facilmente i sei cristalli risulterebbero fra loro iso-orientati come sei parti di un cristallo solo, ed in geminazione coll' altro, includente. Di siffatta geminazione dà bell' es. il cristallo descritto già dal Sella (Studi sulla mineralogia Sarda ; Torino, 1856, fig. 65) e confermato poi dallo Struever (Studi c. s., Piriti ecc., fig. 153). Torino, 1869.

II. La coesistenza della sferoedria e della struttura e forma cristallina normali nella Melanoflogite.

Sarebbe affatto fuor di proposito il dar di nuovo, qui, notizie e descrizioni sui cristalli di Melanoflogite dopo tutto ciò che lungamente ne ho detto nella Memoria precedente, il cui soggetto quasi si compenetra coll' argomento di questa.

Mi limito perciò a pregare chi legge di voler dare uno sguardo, per intento comparativo, alle fig. 5, 11, 13, 19, 20 (Tav. prima), della Melanoflogite, ed alle fig. 24, 26, 29 *d*, 30 *b*, della Pirite del Bolognese, 31, 55, della Hauerite, 57, 58, 60 di altri cristalli di Pirite estere, ed alla 60, della Fluorite.

Le correlazioni si scorgono immediatamente; questo è ciò che più preme, in appoggio alla generalizzazione che propongo.

III. La coesistenza della mimesia e della sferoedria nei cubi di Pirite dei monti della Riva (Bolognese).

Anche di questo argomento dirò appena una parola, imperocchè si sta pubblicando la completa monografia dei cristalli mimetici della Pirite ai quali esso spetta, d' altronde già bastevolmente citati nelle pagine precedenti, e per analogo scopo.

Le fig. 27 .... 30, fanno conoscere qual grado d' analogia sussista fra le coesistenti strutture sferoedriche e normalmente reticolari di tali cristalli con quelli della Melanoflogite e dell' Hauerite, e con quelli altresì della Cobaltina (fig. 30 *c*), della Fluorite (fig. 30 *d*). Il Museo di Bologna possiede ormai 250 cristalli mimetici completi della Pirite cubiforme de' monti della Riva, classificati in ordine a speciali differenze morfologiche e strutturali; inoltre, 70 sezioni *acidate*, le quali mettono in vista le singolarissime disposizioni e i relativi sviluppi degli strati o *placche*, attuati in ciascun cubo parallelamente alle facce esaedriche; ed altri 80 cristalli, di corredo, per compimento della descrizione monografica di questa singolarissima varietà; tutta la serie è di 400 cristalli.

IV. La coesistenza della sferoedria e delle forme cristalline normali nella Miemite tipica di Miemo.

Dalla fig. 62, puó rilevarsi il tipo di questa associazione, nella quale, come nell' Hauerite e nella Pirite prevale assolutamente la simmetria monopoliedrica e monoreticolare. Si tratta di romboedri ottusi a facce multiple, scabre, e con incidenza variabile da 113°, 30′ . . . 114° ?, dietro misura presa nei cristalli meno scadenti. Dall' apice triedrico di questi romboedri, che son rappresentati al naturale nella loro modalità quasi lenticolare, sorgono piccoli gruppi d' altri romboedri, scaturenti direbbesi *per taglio,* vale a dire con piccola parte del contorno acuto e sottile degli spigoli laterali. Per lo più sono 6 . . . 8 individui più distinti, e il loro aggruppamento, privo di simmetria geometrica, ricorda il tipo a rosetta che in numerosi saggi di varie altre specie minerali si osserva esclusivo e caratteristico.

La direzione costante dell' asse di questi fascetti *a rose,* é la *direzione dell' asse di simmetria.* L' esser unica, in ogni romboedro questa direzione, invece di esser tre come nei cubi del 1° sistema, é l' evidente conseguenza della uniassicità fisica dei romboedri, in confronto della speciale triassicità dei cubi regolari, propriamente detti.

V. La sferoedria, con poliedrie e passaggi di forme, nella Calcite romboedrica delle solfare di Romagna.

Nel romboedri di simbolo e^1, (*inverso* di Haüy), della calcite di Perticara, di Formignano e d' altre solfare romagnole, la particolarità più notevole, in ordine alla curvilineità delle facce rombiche, é una variabile convessità per la quale le facce stesse sembrano rigonfiate al centro, ovvero affette da lievissime tumefazioni, ondulate e increspate, a destra e a sinistra della macrodiagonale (obliqua), di ciascuna.

Basta un tenue ingrandimento per veder anche nei più piccoli romboedri che tali facce sono date da un adunamento, a fascio, di elementi cristallini ; ciascuna é la risultante di una moltitudine di faccettine alla lor volta rombiche, convesse, con ondulazioni di poliedria e finamente striate. Spettano a minimi rilievi romboedrici, di cui il contorno é irregolare, indefinito ; sono orientate variabilmente, in modo da produrre la convessità dell' assieme, ma con una simmetria bilaterale assai palese, alla macrodiagonale (obliqua), delle facce dominanti.

Le strie, quindi le increspature son dirette con sensibile parallellismo

all' asse di simmetria del romboedro; tendono all' apice di questo, o lievemente divergono verso gli spigoli culminanti; ma quasi che il romboedro rispettivo fosse emimorfico, le increspature dipartonsi ineguali e grossolane da posizioni inferiori al piano degli assi, e per lo più dalle posizioni cui corrispondono nei romboedri normali, i tre angoli laterali inferiori e alternanti; si fanno graduatamente delicate, fitte e indiscernibili verso l' apice (fig. 61).

Inoltre, la convessità di cui è parola, *tende a trasformare graduatamente l' abito romboedrico dei cristalli, nell' abito scalenoedrico.*

Naturalmente i valori delle incidenze, presi con approssimazione di vario grado, mercè qualche areola pianeggiante ed atta a dare un' immagine riflessa, mutano da cristallo a cristallo. Dove le facce, sebben multiple e sensibilmente convesse son tuttavia lucenti e ancor riferibili al romboedro e^1, l' angolo diedro acuto esterno non oltrepassa 77°,30′, (102°,30′ fra le norm.); ma negli altri, a facce più convesse o fibroso-lamellari, o sagrinate ecc., si hanno incidenze via via scendenti fino a circa 72°.

Da questi esempi, e da quelli dove una configurazione conico-ogivale, o trigonale-arcuata (fig. 61 *a*, 61 *b*, 61 *c* tav. 3), si fa sempre più manifesta, e facile il passaggio all' abito scalenoedrico, ed allo scalenoedro $20\bar{1}$ (d^2 metastatico, Haüy), più comune di tutti. Alquanti bellissimi saggi della miniera solfifera di Formignano lo dimostrano a primo sguardo.

VI. La mimesia nei cubi della Fluorite, analoga a quella delle piriti sopradescritte.

Sulla struttura mimetica della Fluorite dovrò tornare in altro momento avendo un interessante materiale in via di studio, e varie importanti osservazioni sulle quali oggi non potrei dire l' ultima parola.

Ciò che mi preme di coordinare adesso alle indicazioni precedenti è l' analogia colla struttura mimetica dei cubi di Pirite e di Cobaltina, da me cercate e scoperte in alcuni cubi di Fluorite *non geminati.* Di più, la rassomiglianza fra l' adunamento morfologico dei cubi di Pirite in cubi maggiori, polisintetici, *a facce concave e curvilinee,* coll' adunamento corrispondente pur presentato da esemplari di Fluorite; infine, la dipendenza dalla struttura mimetica dei cristalli esaedrici di Fluorite policroma della distribuzione regolare, a simmetria ottaedrica, di talune areole di un dato colore, il quale è diverso dai colori che per trasparenza o per fluorescenza si vedono contemporaneamente ne' singoli cristalli del nominato minerale.

La fig. 30 *d*, rappresenta la sezione di un cubo di Fluorite, condotta

pel centro e parallela a due facce. L' areola rettangolare interna, facilmente si distingue dalle altre aree incorniciant per un diverso modo di lucentezza, essendo più appannata e corrosa dall' a. solforico, con cui tutta la sezione venne trattata, a caldo; si distinguono pure, per la ragione stessa, le diagonali che disegnano i piani di giunzione, e il profilo delle piramidi costituenti il cubo mimetico all' esterno.

Confrontando la fig. 30 *d* ora citata, colle vicine 29 *b*, e 30 *c*, rilevasi la analogia di tale struttura con quelle della Cobaltina e della Pirite. Da questo confronto viene pur messo in luce il significato della costruzione delle facce di altri cubi di Fluorite, corrispondenti alla struttura polisintetica di quelli di Pirite gialla, di Melanoflogite e di diversi altri minerali.

Le fig. 49 *a* e 49 *b*, danno l' idea delle *concavità faciali* dei cubi in discorso, offerti dalla Pirite; sotto un certo aspetto vi si posson ravvicinare quelle dell' ottaedro, pur di Pirite, rappresentato dalla fig. 59, tav. terza. Le facce dei singoli cubi, in vista, sono tutte oblique sul piano teorico della faccia dell' esadro regolare, e tutt' all' ingiro, a verticillo, *immergono* verso l' àsse che sarebbe normale a questa faccia, nell' interno del cristallo.

Tale costruzione, nelle cristallizzazioni polisintetiche di pirite, é frequentissima. Le fig. 50 *a*, 50 *b* la rappresentano quale è in due esemplari di Fluorite di Boemia, del nostro Museo.

Le colorazioni *localizzate*, con simmetria, sia ottaedrica, sia cubica, nei cristalli di questa stessa specie, aggiungono un elemento utilissimo a queste considerazioni.

A parte il colore qualunque della massa, uniformemente diffuso e visibile per trasparenza; e indipendentemente dalla colorazione mobile, per dicroismo e per fluorescenza, taluni cubi di Fluorite, quelli segnatamente dei filoni galeniferi della Boemia (Sckla̤ggenwald, Zinnwald, ecc.) incolori e limpidi, e senza vera fluorescenza, presentano colori distinti, nel modo che segue: lo spazio centrale apparisce lievemente e uniformemente colorato, per lo più in bluastro o in giallo; è come *incassato* da sei sistemi di piani paralleli alle facce cubiche; piani sottilissimi, con colori vari e alternanti, azzurrini e aranciati, giallognoli e violetti, ecc. Questi piani si ripetono deboli e sfumati verso i limiti del cristallo, ma sogliono ripigliare maggior vivacità di tinte a qualche distanza disegnando un altro spazio cubico e concentrico; mentre una tinta, talvolta differente affatto da quelle dei piani suddetti *vedesi diffusa in posizioni simmetricamente stabilite*, e divergenti dal centro; per es. a guisa di *sei espansioni piramidate*, dilatantesi verso le sei facce del cubo; ovvero, a guisa di *otto piccoli nidi*, ristretti presso gli otto angoli del cubo medesimo (fig. 51 *a* e 51 *b*). Le due modalità policromiche possono benissimo coesistere in un dato cristallo, e nella collezione del Museo sonovi esempi perfettamente istruttivi.

È superfluo il notare che la sfaldatura si mantiene sempre ottaedrica.

Non di raro, ai piani colorati sottilissimi, incassanti lo spazio cubico centrale, di cui ho fatto cenno, se ne aggiungono altri analoghi, vicinissimi ai piani esterni delle facce; per questa ragione, e per la bella vivacità dei loro colori, possono simulare l' epipolismo, ossia la colorazione unicamente superficiale, per vera fluorescenza.

VII. Le poliedrie sulle facce dei cristalli mimetici dell'Analcime dei Faraglioni.

È già noto che i cristalli cubiformi, piramidati, ed icositetraedrici di Analcime, sono mimetici; lo hanno dimostrato i fenomeni ottici presentati dalle loro sezioni, e poteva farlo ragionevolmente prevedere la natura chimica, complessa e poligenica della loro sostanza.

Perciò, non è della mimesia dei limpidi cristalli di Analcime, dati dalla lava basaltica delle isole de' Ciclopi (Faraglioni), in Sicilia, che credo utile far cenno; bensì delle disposizioni che sulle loro facce assumono talvolta le poliedrie e le convessità ottuse, ondulate, lucentissime, per confrontarle con quelle dei minerali precedentemente descritti.

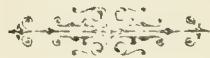
La cognizione di tali particolarità; il confronto cui alludo, riescon facili col semplice esame delle sei figure del N° 67 nella tavola terza. Tutte rappresentano facce piramidate dell'esaedro, limitate dall'icositetraedro; ma, *in tutte*, le piramidi ottusissime, sebbene lucenti e nitide, sono curvilinee; le facce sono convesse; gli spigoli sono smussati, i limiti delle basi sono arcuati; questa condizione si fa evidente appena sulle facce specchianti si guardi l' immagine di una linea retta; essa apparisce curva. Sopra ogni faccia quadrilatera (esaedrica), sorgono talvolta parecchi rilievi di *poliedria*, piramidiforme; e dai contorni delle loro basi, più o meno arcuati ma distintamente quadrangolari si passa ad aree assolutamente curve, e generalmente ellittiche, con onde concentriche di degradamento dai rispettivi apici, e con direzioni raggiate che s' intersecano e interferiscono.

Le areole ellittiche, ossia i rilievi a coni estremamente depressi, a convessità appena discernibili per riflessione di luce molto viva, si notano sopratutto nelle faccie icositetraedriche, incornicianti, quattro a quattro, ciascuna faccia dell' esaedro.

VIII. La neve grandiniforme; ossia la sferoedria nei sistemi stellati di gragnuoli, con simmetria esagonale.

Nella leggiera nevicata che il dì 27 novembre 1890 cadde sul Bolognese, le stelline, pur mantenendo prevalentissimo il solito tipo esagonale, polisintetico, assunsero ad un tratto una singolare modalità che può dirsi rarissima ne' luoghi dove nevica solo d' inverno, ma forse non infrequente, sebbene mai descritta fin qui, nelle regioni alte e fredde delle montagne e nelle elevate latitudini.

Le stelline di neve caddero nel giorno suddetto dalle ore 11 ant. fino a mezzodì, colla forma di piccoli dischi, di uno spessore relativamente considerevole, imperocchè ciascuno di essi non era una lamella, bensì un aggregato a tipo esagonale, di sei gragnuoletti sferoidali, irti di punte cristalline e saldati intorno ad un asse, non di raro occupato da un settimo gragnuolo centrale.

Questa configurazione, la cui descrizione particolareggiata vien utilmente sostituita dalle fig. 63, 64, della tav. terza, dimostra evidentemente che negli aggregati globulari e sferoedrici di elementi esagonali, permane la tendenza a disporsi simmetricamente, sei a sei intorno ad un centro, ed a tipo discoide, tendenza propria dei singoli prismi dell' acqua cristallizzata; dimostra la contemporanea sussistenza, nei gruppi esagono-sferoedrici di cui è parola, delle rispettive modalità tipiche della grandine e della neve, solitamente distinte e derivanti da due ben diversi fenomeni; aggiunge, perciò, un titolo di più al catalogo dei fatti comprovanti le correlazioni fra la sferoedria e la mono-poliedria dei cristalli, e la frequente coesistenza di queste due classiche modalità delle cristallizzazioni, naturali o artificiali che sieno.

ALTRI ESEMPI DI CONTORSIONI ELICOIDI

NELLE FACCE E NEGLI AGGREGATI SIMMETRICI DEI CRISTALLI

NOTA

DEL PROF. LUIGI BOMBICCI

(Letta nella Sessione del 22 Marzo 1891).

Colla certezza di preparare utili elementi a non tarde generalizzazioni nella storia naturale dei cristalli, proseguo ad illustrare con questa breve nota altre modalità *curvilinee* delle facce, o degli aggruppamenti speciali, che ebbi ad osservare nei cristalli delle seguenti specie minerali:

DIOPSIDE della Valle d'Ala in Piemonte (2 es.).

QUARZO JALINO antimonifero del Vallese.

QUARZO JALINO BRUNO del granito tormalinifero elbano.

CALCITE del filone metallifero di Przibram.

AXINITE in cristalli multipli di Tavetsch (2 es.).

BARITINA di Felsobanya.

Anche quì, come poc'anzi, è il caso di dire che niuno di questi otto esempî preso isolatamente, varrebbe a porre in luce la contorsione elicoide inerente, nè autorizzerebbe qualsiasi conclusione relativa.

Ma, presi tutti insieme; ravvisato in tutti il fenomeno della curvatura; verificato il carattere elicoide di questa mercè il confronto con altri esemplari più evidenti, più istruttivi e ad essi collegati da graduati passaggi; sopratutto, identificato il genere del fenomeno con quello classicamente offerto dalle placche contorte del Quarzo di Goschenen si dilegua ogni dubbio sulla comune dipendenza di tutte le modalità prese in considerazione da una causa sola, dalla *dissimmetria dinamica strutturale* nelle masse dei cristalli.

Sono decorsi ormai quasi vent' anni dacchè ebbi occasione di segnalare il primo caso osservato, stupendo, di contorsione curvilinea. Amo perciò di generalizzare il portato sintetico delle pubblicazioni da me fatte fin qui sulle sferoedrie ed altre maniere di curvature di facce o di prismi; credo di poterlo fare nel modo seguente:

« *Le facce di un cristallo risultano piane – vale a dire costituite da un sistema di elementi poliedrici cui può essere tangente o parallelo un piano – solo allorquando il processo d' assettamento molecolare, generante quel cristallo, mantennesi costante e illeso in tutte le successive sue fasi, e in tutte le parti della massa in via di accrescimento; cioè allorquando la legge del decrescimento spettante a ciascuna specie di facce potè mantenersi costante ed esclusiva. Invece, le facce divengono convesse, incurvate, ed a curve elicoidi o paraboloidi, a spirali piane, a verticilli, ed i prismi si fanno arcuati flessuosi, i romboedri e certe pinacoidi si fanno lenticolari, ogniqualvolta al prodursi di ciascuna specie concorrono simultaneamente due o più leggi di decrescimento.* »

I rapporti parametrici in tali condizioni divengono irrazionali; producesi un fenomeno che vorrei dire d' *interferenza dinamico-molecolare,* pel quale la scomparsa della pianità delle facce potrebbe ravvisarsi analoga alla scomparsa delle luminosità laddove produconsi le ombre d' interferenza, e tale da sostituire ai piani d' equilibrio normale, le superficie curve di onde o di menischi come nelle risultanti del moto dei corpi liquidi, urtati in presenza della gravità, e nei fenomeni capillari.

In altri termini, se nelle fasi finali di formazione e accrescimento di un cristallo, intervenga un modo di decrescimento — positivo o negativo che sia (a rilievi od a tremie) — ma obbediente alla sola legge che governa la specie rispettiva di facce, *dal primo all' ultimo momento,* le facce risulteranno piane, o con sistemi di rilievi poliedrici cui può essere parallelo un piano; ma se il moto molecolare d' assettamento è governato contemporaneamente da due o più leggi, tanto che le molecole, i loro allineamenti e i loro sistemi reticolari non possano obbedire altrimenti ad una legge data; ma debbano invece obbedire nel tempo stesso a più leggi di attrazione e orientazione, non potranno costruire veruno di quegli adunamenti cui è limite esterno un piano (facce subordinate alle leggi di simmetria e di razionalità), e generati da decrescimenti *possibili,* in relazione a queste leggi.

Non potendo comporre sistemi a superficie piane, li producono a superficie curve.

In natura, il primo modo, il primo processo è estremamente raro. Basta che un cristallo tenda a farsi voluminoso, e lungamente vi si esercitino le attività di attrazione e di orientazione delle particelle accorrenti, perchè vi si

facciano manifeste, con vario grado di intensità, con vario modo di effetto definitivo ma sempre riconoscibili, le perturbazioni dal tipo iniziale, le divergenze dall'ideale poliedrico, l'ideale del cristallo a facce rigorosamente piane e con orientazioni ed incidenze costanti.

Nulla di più opportuno, in tal proposito, per chi va studiando, misurando, descrivendo cristalli, che il ricordar sempre come i piccolissimi, allo stato iniziale, quelli artificialmente prodotti coll' accurata rimozione del maggior numero possibile delle cause perturbatrici, *rimovibili;* e quelli in certo modo *perfezionatisi* in seguito ad un intimo lavoro molecolare, d'indefinita e forse lunghissima durata, autorizzino, soli, a parlar di *costanti cristallografiche* rigorosamente calcolabili, ed ammissibili ad individuarne le forme, a discuterne le correlazioni ed a formularne le leggi.

Durante il ventennio dacchè feci conoscere, per mezzo dei volumi della nostra Accademia delle Scienze, ai primari Istituti scientifici mondiali, il singolar fenomeno della contorsione paraboloide delle placche di quarzo di Goschenen chissà quanti e quanti esemplari di tali placche contorte sono state venduti dai raccoglitori e dai mercanti stranieri sotto la denominazione inesatta ed infida di *Quartz tordu*, e visti e classificati da mineralisti e cristallografi, da direttori di musei e da autori di trattati, senza che ad uno solo sia venuto in mente di citare, non me ed il mio lavoro, ma i detti cristalli, la loro stupenda singolarità, il loro alto significato! Mentre talvolta, cristallografi e recensionisti sollevano fiere quistioni o d' esattezza o di priorità per un simbolo di una faccetta scopertasi in un cristallo o per la rigorosa esattezza di misurazioni goniometriche che se fatte a t gradi di temperatura e rifatte a t' gradi c. s., non son più le stesse! Nei trattati di mineralogia venuti in luce, sopratutto dalla Germania; nelle opere di cristallografia generale e descrittiva pullulanti da tutta Europa e dagli Stati Uniti di America, si citano pei cristalli di Quarzo tante e tante particolarità quasi inerti per la fisica molecolare; e sul Quarzo a lastre plagiedre, ad un tempo contorte, elicoidi, destrogire e levogire, completo silenzio!

Ricordo ancora a chi legge, e su tale proposito, come l' esplicazione del fenomeno di siffatte contorsioni, la chiave dell' enigma di quelle superficie strane, e ribelli all' idealità del poliedro minerale mi si offrisse dall' immagine e dalla costruzione, nel tetraedro regolare, di un paraboloide, simmetricamente disposto con rotazione di sinistra o di destra, ad arbitrio, ed ivi generato dal moto di uno spigolo verso lo spigolo ad esso opposto, a 90°, *in piani sempre paralleli fra loro* (i due spigoli coincidono con due diagonali a 90° di due facce opposte e parallele del cubo), essendo linea retta direttrice ciascuno dei due spigoli che congiungono a sinistra e a destra, i precedenti.

Nemmen di questo paraboloide *tipico,* coordinato al più semplice e regolare dei poliedri immaginabili, individuato dalla sua genesi e dalla sua formula, si é tenuto conto.

Descrivo brevemente gli otto esemplari che restano distinti e a parte, per facilità di presentazione a chi chieda di vederli, nella collezione di studii pratici del Museo.

1° Diopside a lastra elicoide, della Testa Ciarva alla Mussa, in Valle di Ala (Piemonte).

L' esemplare rappresentato di grandezza naturale, nella fig. 65 della Tav. terza, si compone di sei cristalli principali, fra loro saldati, e con altri minori, compenetranti e confusi, in modo da formare una placca a disegno quadrilatero nell' assieme, ma a margini fortemente dentellati e ineguali. Sopra un orlo vedesi un piccolo incompleto cristallo di granato Essonite.

In ciascun cristallo prevale la zona M, h^1, g^1, colla terminazione abituale nei cristalli del giacimento suddetto, a^1, $d^1/_2$. — Il prisma M è subordinatissimo; dominano le pinacoidi h^1. — Le facce terminali sono scabre e opache.

L' assieme di tali cristalli è pressochè incoloro, e assai traslucido nella regione mediana; ma verso le estremità è di color verde-mare, con irregolari gradazioni e sfumature.

Dei sei maggiori cristalli tre sono saldati in una sola placca con deviazione dei loro assi, dal reciproco parallellismo, appena discernibile; ma gli altri divergono dal parallellismo assai rapidamente; tanto che la traslazione verticale della generatrice per un tratto - sull' asse di simmetria - di millimetri 30, si ha uno spostamento angolare di 16°, 20'.

Gli apici dei singoli cristalli restando in allineamento rettilineo, si ha per la superficie il tipo paraboloide.

Ne segue che per la costruzione di una superficie c. s. inerente ad un tetraedro dissimetrico, ossia per il ridursi la generatrice a 90° della sua direzione di partenza, occorrerebbe una distanza, sulla verticale, oscillante fra mm. 166 . . . . 170.

2° Quarzo antimonifero del Vallese.

L' altro caso di siffatto genere di contorsione l' ho trovato in un piccolo interessante esemplare di Quarzo del Vallese, con inclusioni di antimonite. È un gruppetto di tre cristalli più distinti, associati ad altre parti cristallizzate confusamente, dei quali i due più grossi presentano, presso le rispettive piramidi libere, ciuffetti localizzati e fitti di filamenti di solfuro d' anti-

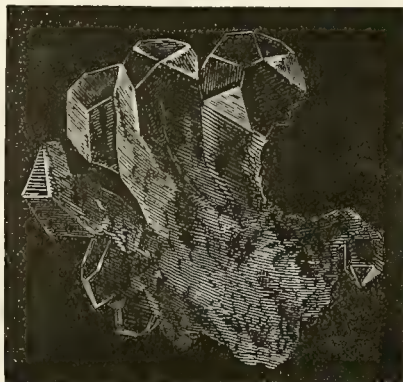
monio; al piede di uno di questi cristalli, con direzione indipendente, si incastra il terzo colla sua curvatura paraboloide della faccia prismatica libera ed in vista.

La fig. 69, dà idea di tale disposizione.

La curvatura spetta dunque ad una delle zone e^2, r, $e^1/_2$, e^2, r, P, e comprende una successione di faccie plagiedre indeterminabili, passando esse gradatamente le une alle altre, con piccolissimi intervalli. La plagiedria è sinistrorsa; l'altra è pure girante da destra a sinistra; la traccia della curva descritta è rappresentata dalla linea *a, b, c,* fig. 2, data direttamente dall'esemplare mediante una impronta esatta e rigida da esso ricavata.

Questo caso evidentemente rientra nella serie dei già noti e assai numerosi paraboloidi del Quarzo a placche contorte di Goschenen; non aggiunge perciò nuovi elementi alla teoria generale di siffatte curvature e contorsioni, offre peraltro la nuova modalità di un solo prisma, contorto d'attorno all'asse di una delle sue zone, a facce dissimetriche, mentre le placche contorte di Goschenen sono adunamenti di un grande numero di prismi, assai distinti in generale, ma talvolta compenetrati tanto, ed in serie tanto continua da simulare un unico individuo d'abito tabulare, trimetrico, a facce incurvate ed a spigoli laterali e terminali rettilinei.

3° Quarzo jalino, bruno, del granito elbano.

Per giudicar giustamente la disposizione arcuata del gruppo di Quarzo elbano, di cui vedesi la figura al N° 68 della tavola terza, conviene riferirla ad altre disposizioni consimili, o del medesimo genere; quella per es. ad allineamento spirale, ripetutamente trovato nei gruppi di Quarzo detto *a tremie* di Porretta, e di cui la figura qui intercalata presenta un caso speciale. Con tali confronti vedesi subito che non è curvato per mera accidentalità, e senza una ragione intrinseca, il sistema di cristalli tratto dal granito tormalinifero di S. Piero in Campo. Fra questo sistema, e quello del Quarzo di Porretta sussiste per altro questa differenza; l'asse dei singoli prismi che ricorrono sulla linea curva, si mantiene nell'es. elbano sensibilmente parallelo al piano della spirale che teoricamente risulta descritta dai prismi medesimi; mentre nei gruppi porrettani l'asse di simmetria dei cristalli componenti vedesi inclinato di circa 38° (38°,13′ in teoria), sul piano corrispondente. Pur vicino a 38°,13′ (37°,30′ circa), è l'angolo d'inclinazione dell'asse del cristallo più divergente (linea *CD* fig. 68),

sull'asse del cristallo da cui comincia la curvatura (linea *AB* c. s.); ed é inclinato di 19°,15' secondo la più attendibile misura, il cristallo intermedio (linea *EF* c. s.). Nelle piramidi libere dei cristalli si vedono faccette plagiedre lucide ma ineguali, indistintamente degradanti dalle rispettive faccie del protoprisma $11\bar{2}$ (e^2), verso la faccia dei romboedri della piramide in zona con esse 100 (*P*), ovvero $22\bar{1}$ ($e^1/_2$), senza limiti definiti, e con curvatura appariscente. Sono *levogire, o sinistrose;* quindi, *sono dirette nel senso stesso dello spostamento degli assi dei cristalli*, o della contorsione d'assieme.

Quest' esemplare lievemente affumicato, con molteplici screpolature, superficie di distacco e di confusa aggregazione porta in basso un bel gruppetto di piccoli cristalli bianco-lattei a vene brune di feldispato Ortose.

4° Calcite del filone metallifero di Przibram.

L' esemplare disegnato nelle figure 70, 71 é per più ragioni notevolissimo. Fu procurato in via di cambio al Museo, colla indicazione — Calcite spongiforme — dal Prof. Brezina del Gabinetto miner. imper. di Vienna.

La fig. 70 dà l' idea dell' assieme. I sistemi divergenti a ventaglio dalla posizione, *C*, relativamente centrale, son costituiti dall' aggregamento, ben discernibile ad occhio nudo, di piccolissimi romboedrini ottusi, corrispondenti a 110 (b^1), colle facce lievemente convesse, striate, e come sempre ∞ alla diagonale obliqua, breve. Nelle direzioni in cui questi romboedrini sono meno piccoli, notasi il contemporaneo e vivido risplendere di tutte le faccette più in rilievo, e fra loro iso-orientate, questa circostanza pone in vista il modo delle divergenze fra i sistemi più distinti e considerevoli; dove, invece, sono minime la superficie ha lucentezza delicatamente rasata.

Ciascun sistema divergente, é curvilineo.

In ciascun sistema la curvatura puó esser qualificata elicoide.

La disposizione dei sistemi elicoidi gli uni sugli altri é di sovrapposizione parziale (come nei ventagli di penne o di lamine intiere, semiaperti), *ma con inversa rotazione* a destra ed a sinistra dei due sistemi mediani, uno destrogiro, l' altro levogiro.

Ciascun sistema, descritta la propria curva, tende ad accartocciarsi nel modo rappresentato dal profilo *P*, (fig. 71); ma dopo di essersi mantenuto rassomigliante ad una foglia di cardo per oltre la metà della sua lunghezza disponesi all' accartocciamento, si fa frastagliatissimo; genera delle volute, e creste che giustificano in parte la qualifica sopra riportata; ma che tutte si coordinano e si dispongono in guisa da riprodurre con i loro parziali aggruppamenti la modalità *selliforme*, a curvatura elicoide, caratteristica dei principali fra i carbonati romboedrici del R° minerale.

In definitiva, questo curiosissimo esemplare comprende i notevoli modi

di curvatura delle placche di quarzo e dei romboedri selliformi. Esige, tuttavia, di esser guardato con cognizion di causa e come uno dei termini intermedj di una serie multiforme.

La Baritina di Felsobanya e l'Axinite di Tavetsch (Svizzera), offrono alla loro volta casi istruttivi di curvilineità. Li cito, come elementi utili della serie suddetta, e do la figura (N° 72), di uno dei due esemplari di Axinite presi in considerazione. Non insisto sulle rispettive descrizioni; nella Baritina i gruppi di cristalli tabulari (faccia domin. 110, 100, 010, 011, 012 ossia M, h^1, g^1, e^1, e^2), limpidi e quasi incolori, tranne dove sui margini rosseggiano per tenue diffusione di polviscolo di ematite, presentano placche multiple, o polisintetiche, talune delle quali sono sensibilmente contorte, con flessioni *petaloidee;* quasi tutte sono raccolte ad ampio verticillo ellittico, intorno ad un punto centrale. Ne risulta l'apparenza, per l'assieme, di una corolla imbutiforme assai vasta (diam. 5 e 7 centim.), col doppio modo di curvatura, cioé nei singoli sistemi a placche estese e nella convergenza di tutti all'intorno di un centro comune.

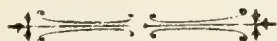
Sebbene ambedue gli es. di Axinite, sieno a facce elicoidi e polisintetici nondimeno uno solo, quello, rappresentato dalla fig. 72, puó essere utilmente osservato. Ha color verde grigio-cupo, ed é appena translucido sugli orli sottili, a cagione di una copiosa diffusione di corpuscoli informi che potrebbero essere di clorite o di epidoto. Nel suo complesso ricorda la modalitá *selliforme* di taluni romboedri di siderite; ma da una parte vi sono estese e piane alcune delle facce M, e altre piccole, h^1; peraltro degradanti tutte, le une presso le altre, in una zona convessa curvilinea; e dalla parte opposta (la superiore, nella fig. 72), si ha la condizione inversa, colla concavitá selliforme sopraindicata.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

TAVOLA PRIMA

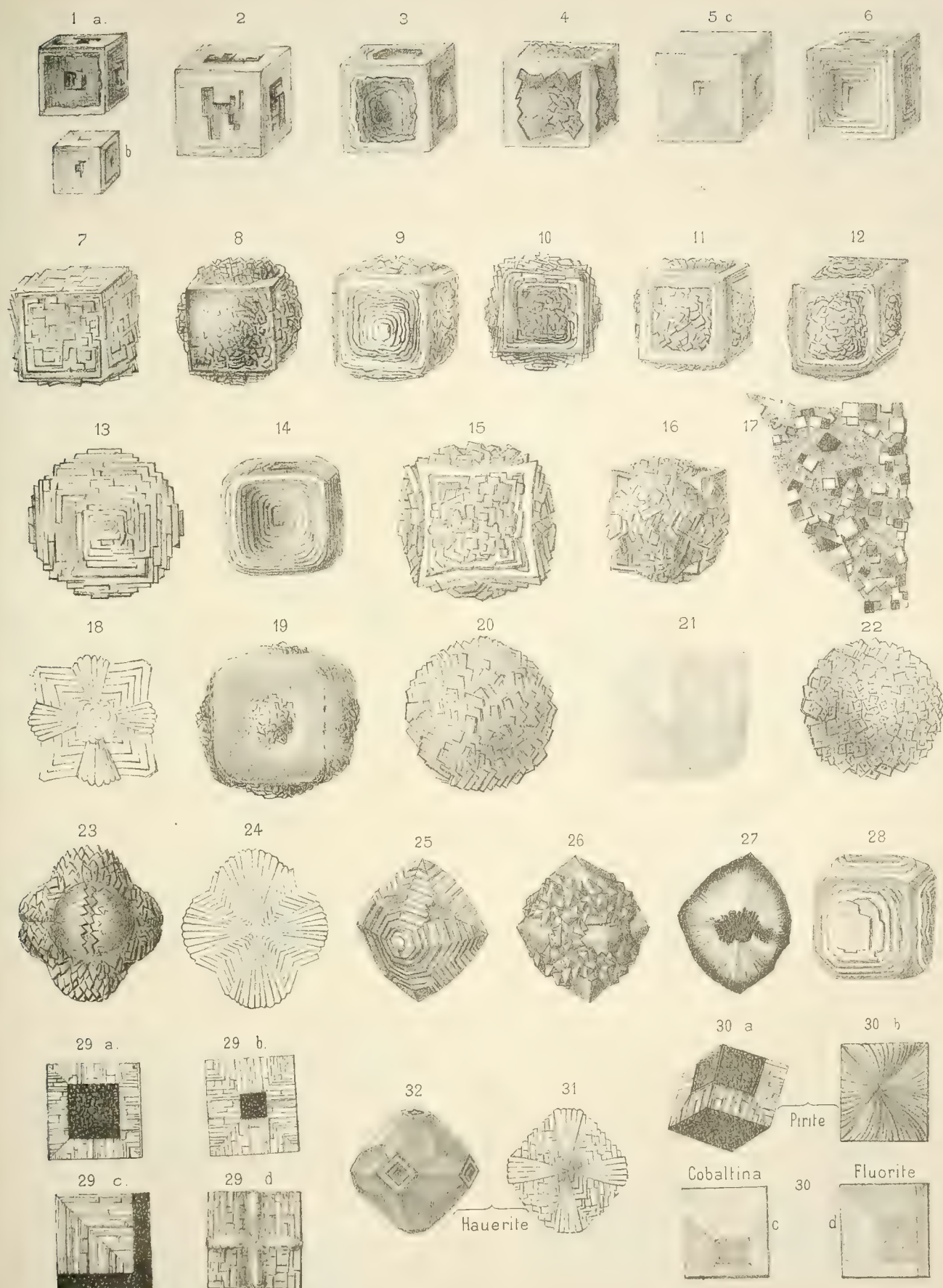
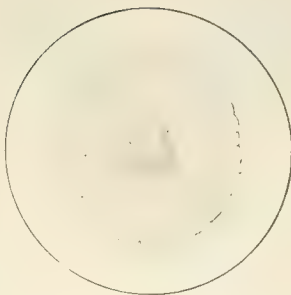
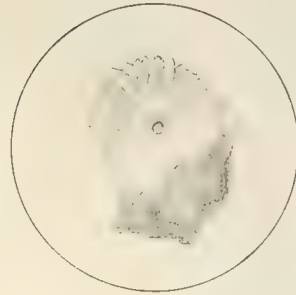
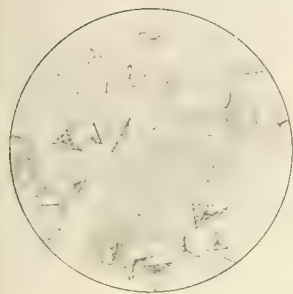
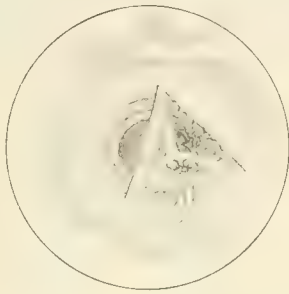
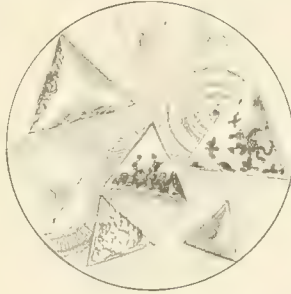
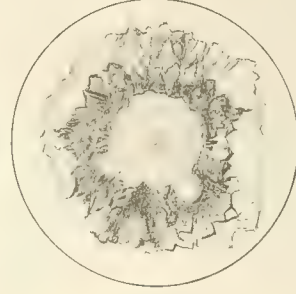
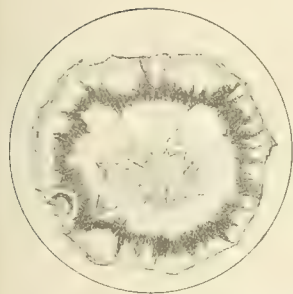
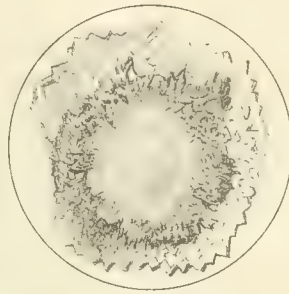
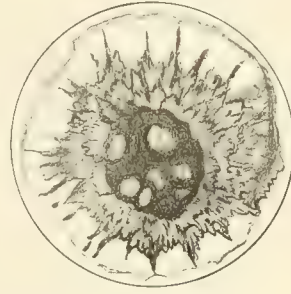
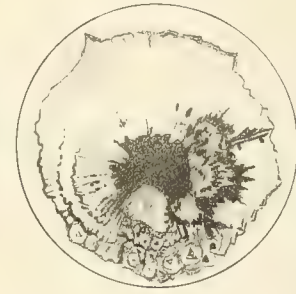
Dalla fig. **1** ... **5**, le modalità più distintamente cubiformi della Melanoflogite; dalla fig. **6** ... **18** la serie delle forme della suddetta specie, progressivamente tendenti al tipo sferoedrico, pur coesistendovi la struttura esaedrica regolare; dalla fig. **19** ... **22**, casi di evidente coesistenza c. s.; esempi di sezioni, e di struttura completamente sferoedrica. Dalla fig. **23** ... **26**, forma e sezione dei cristalli sferoedrico-ottaedrici, *a nodo gordiano* ecc., della pirite di Brosso (Ivrea) e di Rockbridge (Virginia); dalla fig. **27** ... **30** *b* cristalli e sezioni *acidate* dei cubi di pirite dei monti della Riva; fig. **30** *c*, *d*, sezioni di cubi mimetici di Cobaltina e Fluorite; fig. **31**, **32** cristallo mimetico e sezione illustrativa, della Hauerite di Raddusa.

TAVOLA SECONDA

Dalla fig. **33** ... **44** ingrandimenti, alla camera lucida Abbe, di dodici sezioni sottili, da microscopio, dei gruppi sferoedrici della Melanoflogite (cristallini multipli, in aggregati cubiformi, lamine circolari di aggregati fibroso-raggiati, quarziferi, lamine c. s., con impronte triangolari di apici di romboedri, zone alternanti calcedonioso-quarzifere, con orli di Melanoflogite periferica, a nuclei di jalite ecc.) — Fig. **45** ... **48**, esempi della costruzione di esaedri cubiformi, simili a quelli della Melanoflogite, con romboedri di 94°, 15′. — Fig. **49** ... **52** cubi multipli, mimetici, con sferoedrie emergenti ecc., di Pirite e Fluorite di Zinnwald.

TAVOLA TERZA

Dalle fig. **53** ... **56** sezioni con espansioni *cruciformi*, centrali, di ottaedri mimetici di Hauerite; dalle fig. **57** ... **60** cristalli di pirite colla sferoedria di vario modo e grado (la fig. **60** può rappresentare alcuni cubi di Fluorite del Cumberland, corrispondenti ad altri di Pirite); fig. **61** *a, b, c,* romboedri a facce convesse, multiple di Calcite di Perticara; fig. **62** gruppo di romboedri ottusi di Miemite, con gruppo assile di sferoedria; fig. **63**, **64** gragnuoli *stellati* di neve grandiniforme; fig. **65** ... **66**, placche paraboloidi di Diopside; fig. **67**, *a* ... *f* facce con poliedrie ne' cubi di Analcime; fig. **68** quarzo elbano curvato; fig. **69** quarzo del Vallese ad elica; fig. **70**, **71** Calcite di Przibram, con disposizione palmata, con superficie simmetricamente curva ed a volute elicoidi; fig. **72** cristallo di Axinite, a curvatura elicoide e suo profilo.

L. Bombicci, dis. dal vero. E. Contoli, lit. lit. G. Wenk e Figli — Bologna.

33 34 35 36

37 38 39 40

41 42 43 44

45 46 48 47

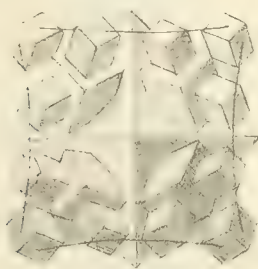
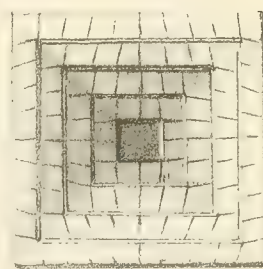
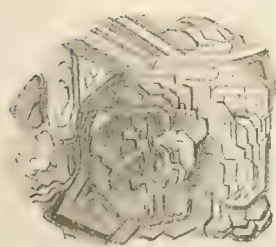
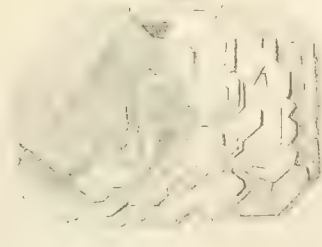
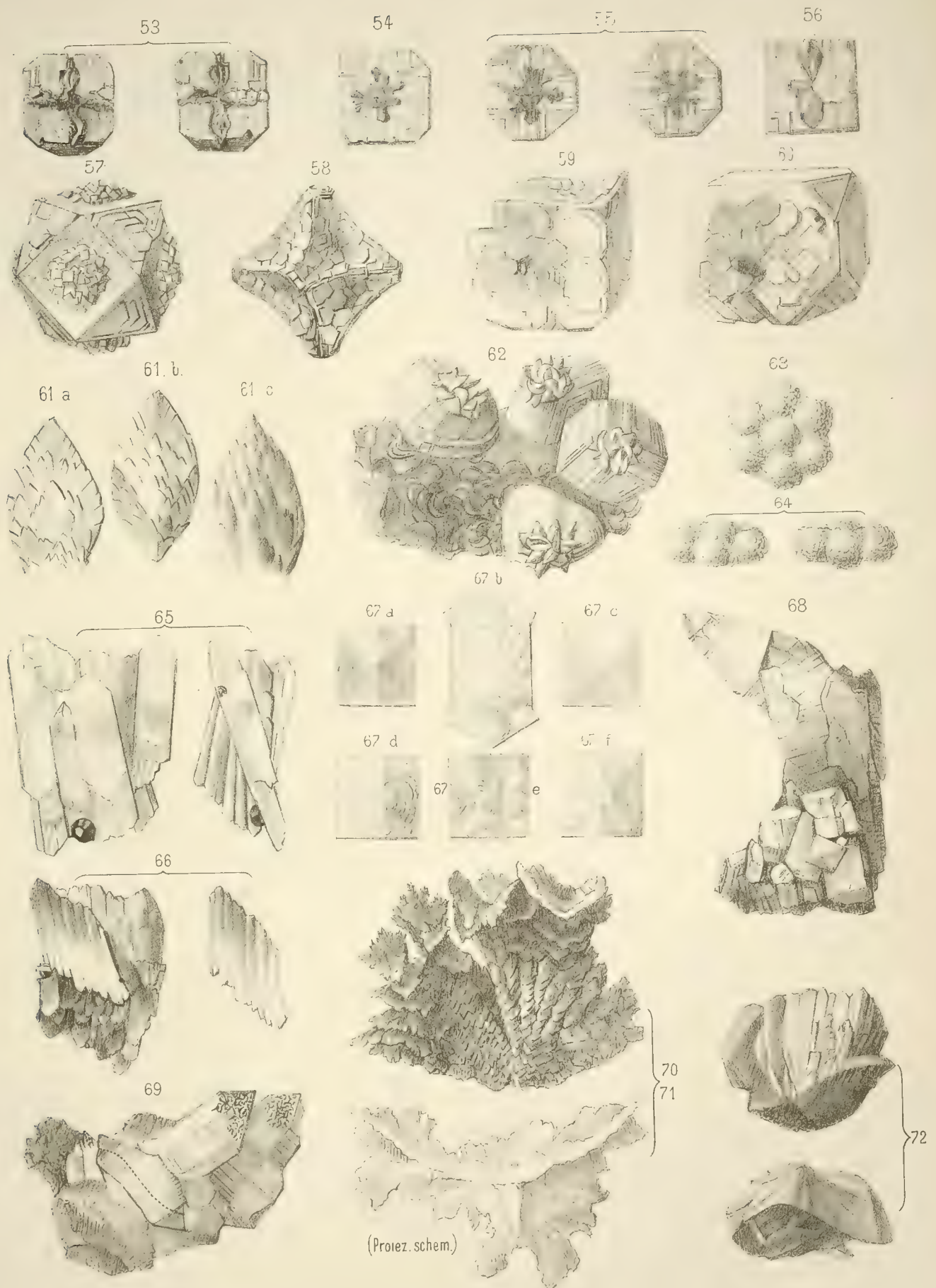
49 50 51 52

49 a b c

L. Bombicci, dis dal vero. E. Contoli, lit. lit. G. Wenk e Figli — Bologna.

L. Bombicci, dis. dal vero.

E. Contoli, lit.

lit. G. Wenk e Figli – Bologna.

DI UNA NUOVISSIMA E NOTABILE PARTICOLARITÀ DI STRUTTURA

OSSERVATA

NELLA CORNEA DI UN CAVALLO

NOTA

DEL PROF. G. V. CIACCIO

(CON UNA TAVOLA)

(Letta nella Sessione del 12 Aprile 1891).

La novissima particolarità di struttura, che è il subbietto della presente nota, a me venne fatto di osservarla in uno di quelli esemplari microscopici di cornea da me fatti l'anno 1874, quando io presi a cercare col microscopio della membrana del Descemet e del suo endotelio. Le quali ricerche condotte a fine l'anno appresso furono lette alla nostra R. Accademia delle Scienze nella tornata del 28 gennajo, e poi stampate nel tomo X serie III delle sue Memorie. Da quell'anno in poi, avendo io la mente volta ad altre investigazioni, posi da parte il detto esemplare, e quasi non mi era più a memoria, allorché al cominciare del presente anno, venutomi esso a caso sott'occhio, e riguardatolo con più diligenza, a me è paruto ben degno di essere descritto e reso pubblico per le stampe.

Dico adunque che la novissima e notabile particolarità di struttura che si osserva nell'esemplare microscopico mentovato di sopra consiste in ciò: che la cornea sottilmente tagliata in tutta la sua grossezza a perpendicolo dà a vedere una quantità di fibre elastiche di varie grandezze, quali semplici e quali composte, che in linea diritta, o più e meno obbliqua, e serpeggianti ne corrono la sostanza sua propria (Fig. 1.ª) E di tali fibre alcune s'indirizzano alla faccia sua dinanti, e manifestamente si vedono passare e ramificarsi per entro a quell'epitelio pavimentoso stratificato che naturalmente la veste (Fig. 2.ª); laddove altre incamminandosi verso la faccia sua di dietro ne trapassano la membrana del Duddel o del Descemet come altrimenti si chiama, e vanno a finire a guisa di cappello d'aguto di qua da quel suolo di endotelio che la soppanna (Fig. 3.ª). Le dette fibre, se non

tutte la più parte, e in ispecie quelle trapassanti la membrana del Descemet appariscono con evidenza composte di granellini tondi (Fig. 4.ª). Di che ne viene, siccome io credo, più che più confortata quella opinione del Ranvier che vuole ambidue le forme del tessuto elastico trarre origine dall'attuale deposizione di globetti di elastina nella sostanza intercellulare o fondamentale dei tessuti di sostanza connettiva, i quali globetti ora si dispongono linearmente in maniera di fibre, e ora immedesimandosi in un tutto indistinto creano le così dette tuniche elastiche con o senza finestre.

Ora in che si dimora egli mai il novo e notabile della particolarità di struttura suddescritta? Certo, non nell'essere la sostanza propria della cornea corsa da fibre elastiche, perché tali fibre ebbele a mostrare, è già molti anni, l'Henle (1) alla circonferenza, e ultimamente il Martinotti (2) e il Tartuferi (3) in ogni dove della sostanza propria di quella: ma sì bene sta nell'addentrarsi e ramificarsi di una parte di dette fibre in quell'epitelio che la termina in sul davanti, e nel trapassare che fanno un'altra parte la membrana del Descemet e andare a terminarsi con il loro estremo spanto in strana guisa subito sotto alla sua veste dell'endotelio. Il che mi genera nell'animo grande dubbio se quella infinità di sottilissime fibrettine che il cloruro di oro mette in veduta per entro all'epitelio anteriore della cornea sieno tutte veramente nervose, o pure una buona parte elastiche; come credo che fossero parimente elastiche e non nervose quelle altre fibre osservate dal Lipmann (4) trapassare la membrana del Descemet e finirsi ne' nuclei di quel suolo di endotelio che di dietro la cuopre e termina; ed io tanto più mi faccio a crederlo, perchè, come chiaramente il dimostra un esemplare microscopico di cellulare succutanea che da anni ho presso di me, il cloruro di oro similmente colora in violetto più o meno carico tanto le fibre elastiche che le fibre nervose prive di midolla o pallide che dir si vogliano.

A una possibile questione mi resta rispondere, e finisco questa breve nota. Io credo che ci saranno di quelli, ai quali la detta particolarità di struttura nella cornea non parrà cosa naturale, e volentieri inchineranno a tenerla come un effetto di speciale trasmutazione elastica che sia venuta nel tessuto connettivo fibrillare di lei. A costoro io non mi sento di aderire; perciocchè la cornea di cavallo che mostrava la discorsa parti-

---

(1) I. Henle, Handbuch der Systematischen Anatomie. Bd. 11. Eingeweidelehere 2er Aufl., Braunschweig 1866.

(2) C. Martinotti, Della reazione delle fibre elastiche coll'uso del nitrato di argento e dei risultati ottenuti. Giornale della R. Accademia di Medicina di Torino. - Luglio N.° 7 - p. 367, 377. An. 1888.

(3) F. Tartuferi, Nouvelle imprégnation métallique de la cornèe. Anatom. Anzeiger N.° 18 - 1890.

(4) H. Lipmann. Ueber die Endigung der Nerven in eigentlichen Gewebe und in hinteren Epithel der Hornhaut des Froshes. Virchow's Arch. f. path. Anat. Bd. XLVIII.

colarità di struttura, secondo tutte le apparenze, non era punto mutata dallo stato naturale. E soggiungo ancora che nella cornea dell'uomo e di alcuni mammiferi domestici, come il bue, il cane e il porco, condizionata, avanti di tagliarla sottilmente a perpendicolo, dalle soluzioni di acido cromico amorfo al $^2/_{1000}$ o di acido osmico all' $^1/_{200}$ ovvero secondo i nuovi, ma incerti metodi preparatorii del Martinotti e del Tartuferi, a me alle volte è incontrato di vedere una certa apparenza di fibre elastiche non dissimili a quelle state da me superiormente descritte.

DICHIARAZIONE DELLE FIGURE

Significato delle lettere dichiarative di ciascuna figura.

epc Epitelio pavimentoso composto che veste il dinanti della cornea.
spc Sostanza propria della cornea.
mD Membrana del Duddel, comunemente detta del Descemet, che termina al di dietro la cornea.
fea Fibre elastiche, che dalla sostanza propria della cornea s' indentrano nell' epitelio e vi si ramificano.
fep Fibre elastiche che dalla medesima sostanza propria della cornea trapassano la membrana del Descemet e finiscono di qua da l' endotelio che la cuopre.
fec Fibre elastiche composte per l' unione di parecchie altre più piccole.
tca Termine delle fibre elastiche trapassanti la membrana del Descemet e finienti a modo di un cappello di aguto.

Fig. 1.ª — Taglio perpendicolare della quarta parte della cornea di un cavallo, indurata precedentemente in una soluzione acquosa di acido cromico all' $^1/_{500}$. In questo taglio si vede manifesto tanto la parte dinanti quanto quella di dietro della sostanza propria della cornea corsa da indubbie fibre elastiche, le quali s' insinuano, quelle dinanti nell' epitelio, e quelle di dietro nella membrana del Descemet, e finiscono le

prime ramificandosi tra le cellule epiteliali, e le seconde a cappello d'aguto di qua dall' endotelio che cuopre essa membrana del Descemet.

Hartnack . . . $\frac{2}{4}$ Canna del microscopio tutta scorciata × 60.

Fig. 2.ª — Fibre elastiche della parte dinanti della sostanza propria della medesima cornea osservate a un maggiore ingrandimento.

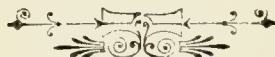
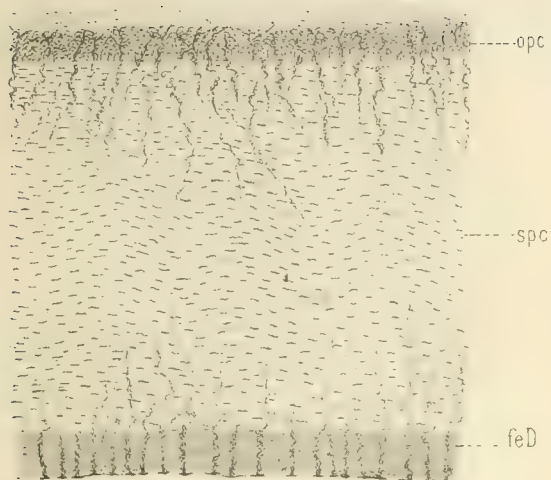
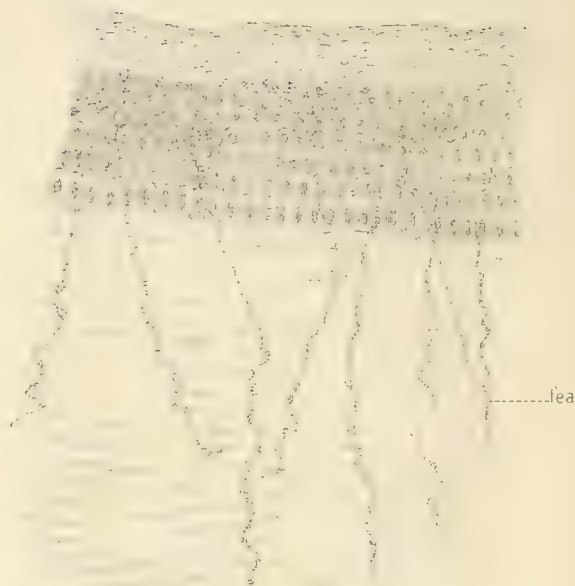
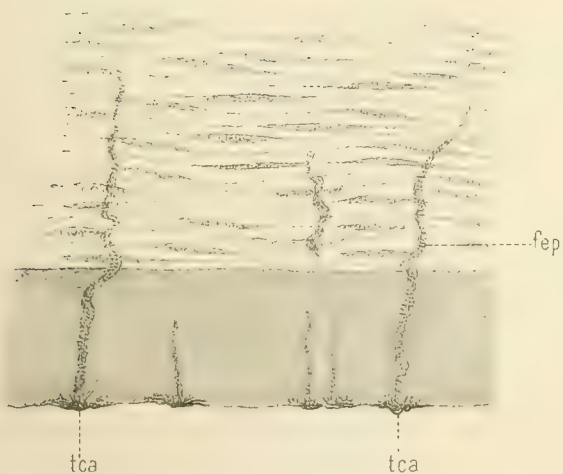
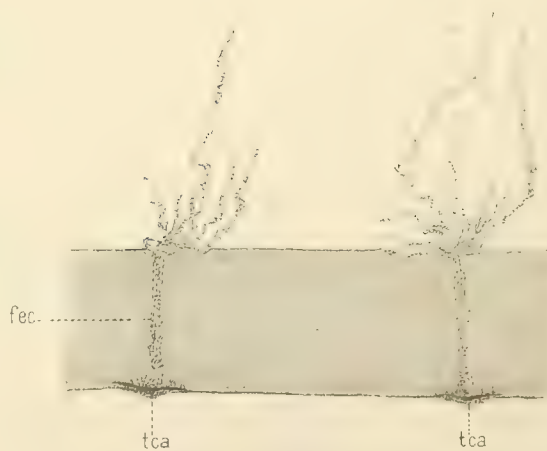
Hartnack . . . 2
Werik. n. m. 7 — Canna del microscopio tutta scorciata × 200.

Fig. 3.ª — Fibre elastiche della parte di dietro della sostanza propria della medesima cornea osservate parimente a un maggiore ingrandimento.

Hartnack . . . 2
Werik. n. m. 7 — Canna del microscopio tutta scorciata × 200.

Fig. 4.ª — Altre consimili fibre elastiche della medesima parte di dietro della sostanza propria della cornea : le quali vedonsi apertamente risultare dall' unione di parecchie fibre minori ed esser composte di globetti di elastina.

Hartnack . . . 2
Werik. n. m. 7 — Canna del microscopio tutta scorciata × 200.

Pio P.º Gregori, dis. dal nat. ed in pietra. lit. G. Wenk e Figli – Bologna.

DESCRIZIONE DEL NUOVO GENERE BOSELLIA

NOTA

DEL

PROF. SALVATORE TRINCHESE

(CON UNA TAVOLA)

(Letta nella Sessione del 26 Aprile 1891).

Ho dedicato questa nuova forma all'onorevole Paolo Boselli, il quale, essendo ministro dell'istruzione pubblica, sottoscrisse la convenzione del 3 novembre 1888, colla quale impegnò il Governo italiano a migliorare le misere condizioni dell'Università di Napoli. Il suo nome sarà così tramandato ai posteri da una graziosa creatura partenopea, il cui delicato organismo resisterà più del granito all'opera demolitrice del tempo.

Il gruppo naturale cui, più che ad ogni altro, si avvicina questa forma, è quello delle *Elysiadae.* (Fig. 1).

L'animale ha una forma depressa, ovoide, allungata, quando cammina; quasi circolare quando è fermo e intento a cibarsi. La sua lunghezza, misurata dal margine anteriore della testa all'apice della coda, è, negl'individui più grossi raccolti sinora, di circa 8 millimetri; la sua massima larghezza, in corrispondenza della sacca pericardiaca, è di circa 2 millimetri e mezzo. Queste misure furono prese sull'animale in piena estensione.

Il colore generale del corpo è un verde scuro simile a quello dell'Halimeda Tuna, alga della famiglia delle Codiacee, della quale l'animale si ciba.

La Bosellia ha abitudini sedentarie. Dimora costantemente sull'Halimeda, atteggiandosi in guisa da imitare mirabilmente, colla forma del suo corpo, quella dei lobi di cui si compone il tallo di quest'alga. Si ha così un caso di mimetismo. Per questa ragione denomino questa forma: *Bosellia mimetica.*

Il dorso è sparso di macchiette bianche circolari, le quali diventano

più piccole e più fitte al margine di quello, formandovi una specie di merletto molto elegante.

La testa è ben distinta dal resto del corpo ed ha i margini leggermente convessi. Il suo estremo anteriore è alquanto più largo del posteriore. Uniche appendici del corpo sono i rinofori, piuttosto brevi, larghi, imbutiformi e fessi anteriormente. Sono inseriti presso il margine anteriore del capo.

Il piede è più stretto del corpo ed ha una lunghezza eguale al terzo della lunghezza totale di questo. È di colore verde simile a quello del dorso.

Sulla faccia inferiore dell'animale (Fig. 2), presso il margine anteriore della testa, notasi un solco trasversale profondo, limitato anteriormente dal margine concavo di un breve velo carnoso *a;* posteriormente dal margine anteriore convesso del piede *c*. Nel mezzo di questo solco apparisce spesso, nell'animale vivente, una profonda smangiatura limitata a destra e a sinistra da due eminenze papilliformi, tra le quali si apre la bocca *d*.

Il corpo, nella sua regione anteriore, si dilata ora più ora meno, secondo la volontà dell'animale; ma non presenta mai delle vere alette come quelle delle Elisie.

La sacca pericardiaca (Fig. 1), piuttosto lunga e stretta, è situata nella regione anteriore del dorso. Attraverso la sua parete si vede il cuore che batte 100 volte al minuto primo. A questa sacca giungono cinque vene dorsali turgide e trasparenti come quelle delle Elisie: due a destra, due a sinistra ed una nel mezzo; quest'ultima traversa la parete del pericardio al polo posteriore di quest'organo. Queste vene si ramificano dicotomicamente alla superficie del dorso, sotto l'ectoderma che esse sollevano. Delle due vene di ciascun lato, una manda le sue ramificazioni nella regione anteriore del corpo; l'altra nella regione mediana. La vena del mezzo si ramifica nella regione posteriore. Delle ultime ramificazioni di queste vene (Fig. 1), alcune, le più sottili, sboccano nelle lacune del mesenchima (Fig. 6, *d*) le altre terminano bruscamente alla superficie del corpo, ciascuna con un orifizio circolare, dal quale sporgono dei cigli vibratili il cui movimento è diretto dall'interno delle vene all'esterno. Gli orifizi delle vene più grosse si possono vedere, senza grande difficoltà, nell'animale vivente e in piena estensione, adoperando un obbiettivo di piccolo ingrandimento, sia a luce trasmessa, sia a luce diretta. Adoperando un obbiettivo di maggiore ingrandimento, si vedono, a luce trasmessa, i cigli in movimento che sporgono fuori degli orifizi, (Fig. 6, *c*). Questi si chiudono di tratto in tratto bruscamente, per riaprirsi dopo pochi minuti.

Non ho potuto, stante la scarsezza del materiale, approfondire i miei studî sul significato morfologico e fisiologico di questi orifizi, i quali da-

ranno, senza dubbio, molto filo da torcere ai morfologi. Non credo peró di allontanarmi troppo dal vero affermando che essi devono avere un qualche rapporto col rene che trovasi, come diró tra breve, nella sacca pericardiaca. La regione anteriore e mediana di questa é occupata dal cuore; la regione posteriore e le laterali, da un tessuto spugnoso che é il rene. Partono dalla faccia interna della parete pericardiaca, dei tramezzi di tessuto congiuntivo che dividono lo spazio intorno al cuore in un gran numero di cellette tappezzate di piccole cellule depresse o cubiche, contenenti delle granulazioni di sostanze escretorie.

Il bulbo faringeo (Fig. 3, 4) consta di due parti ben distinte, separate da una profonda strozzatura. La parte anteriore *b*, rotonda, sparsa di piccoli bernoccoli sferoidali d'apparenza glandulare, si continua anteriormente con un tubetto imbutiforme *a*, la cui estremità più larga é rivolta in avanti e si apre nella cavità del tubo orale; la parte posteriore *c*, più lunga dell'anteriore e di forma ovoide allungata e alquanto depressa, si continua posteriormente coll'esofago molto sottile (Fig. 3, *g*).

La radula (Fig. 5) é contenuta nella porzione anteriore della faringe ed é formata di una serie di 26 denti: 17 sotto la lingua e 9 sopra, entro la guaina della radula. L'ultimo di questi, immerso nella polpa *a*, é incompletamente sviluppato. V'é una spirale formata di 4 denti. Tutti, meno i quattro della spirale che sono formati della sola parte basale, e l'ultimo della serie superiore che non é bene sviluppato, hanno il margine tagliente munito di dentini arrotondati.

L'ano é latero-dorsale e trovasi nel punto in cui il margine destro della testa si unisce al margine corrispondente del corpo.

Esistono glandule salivari anteriori e posteriori: le anteriori sono formate di piccoli culdisacchi piriformi contenenti tre o quattro cellule con nucleo bene sviluppato e immerso in un protoplasma sparso di granuli grossolani. Questi culdisacchi circondano quasi completamente il bulbo faringeo; ma si accumulano in maggior numero sotto di questo, empiendo una vasta cavità divisa in piccoli scompartimenti comunicanti tra loro, da tramezzi incompleti di tessuto congiuntivo. Le glandule salivari posteriori sono due cordoncini diritti o leggermente ondulati, i quali si stendono dietro il bulbo faringeo per un lungo tratto del corpo. Sono formate di cellule piriformi che circondano da ogni parte uno stretto condotto escretore, sul quale s'inseriscono colla loro estremità sottile.

Le ramificazioni epatiche (Fig. 11) si spargono per tutto il corpo, al quale dànno il colore verde. Sono formate di una sottilissima membrana limitante, tappezzata internamente di cellule cubiche ripiene di sferule di clorofilla. Il loro lume é spesso occupato da detriti di cellule, il cui colore somiglia a quello della terra d'ombra.

Non pare che in questi animali vi sia una vera glandula ermafrodisiaca nella quale si formino le uova e gli spermatozoi. Nei giovani individui, si trovano, nel mezzo del corpo, dietro la sacca pericardiaca, cinque o sei grosse lacune del mesenchima, ciascuna delle quali contiene una massa di elementi spermatici, senza uova. Negli adulti, invece, intorno a ciascuna di queste masse trovasi uno spesso strato di uova. Nei giovani, peraltro, le uova non mancano, ma si trovano in luoghi lontani dalle masse spermatiche; cioé: nelle pareti di alcuni tubi ramificati che invadono gran parte della regione del corpo situata dietro la sacca pericardiaca. Questi tubi sono formati di una sottile membrana limitante, tappezzata internamente di cellule cubiche con un nucleo vessicolare contenente un piccolo nucleolo. Alcune di queste cellule aumentano di diametro e si trasformano in uova. In che modo poi queste raggiungano le masse spermatiche, non ho potuto determinare per la scarsezza del materiale.

La glandula del nidamento e quella dell'albume sono bene sviluppate soltanto negl'individui adulti, e somigliano a quelle delle Elisie.

Il pene (Fig. 10) é munito di un tubo d'apparenza cristallina tagliato a becco di flauto, con un uncinetto in cima. È retrattile in una guaina la cui faccia interna é tappezzata di cellule contenenti concrezioni sferiche di sostanze escretorie. (Fig. 9, *c*).

Il sistema nervoso centrale é formato di due gangli sopraesofagei e di due sottoesofagei, uniti tra loro da brevi commissure; e di due gangli buccali relativamente grossi.

I nervi ottici sono molto lunghi. Gli occhi, piuttosto grossi, si vedono alla base dei rinofori, attraverso un tratto della pelle di forma ovale e trasparente. La lente cristallina é circondata di una rete grossolana di pigmento nero. In corrispondenza degli occhi, le cellule epiteliali della pelle si deprimono (Fig. 8, *b*) e sono sostenute da un sottile strato di mesenchima *c*, dietro il quale trovasi una vasta lacuna sanguigna. La retina *e* é formata di vari strati di cellule.

Le otocisti sono più piccole degli occhi e contengono un otolito sferico.

I rinofori sono verdi come il resto del corpo; peró il loro margine libero é orlato di piccoli punti bianco-opachi, sotto i quali si stende una fascia d'un vivo colore di lacca carminata.

Tutto il corpo dell'animale é coperto di un epitelio a cellule cubiche, munite di cigli vibratili. Le cellule del margine libero dei rinofori sono cilindriche e molto allungate.

Sulla faccia inferiore del piede v'é un solco longitudinale poco profondo, la cui esistenza non puó essere constatata che nelle sezioni trasversali dell'animale. Le cellule epiteliali che tappezzano questo solco sono più depresse di quelle che cuoprono il resto del piede; ma portano

dei cigli vibratili alquanto più lunghi di quelli portati da queste ultime. Ai lati del solco si trovano, immerse nel mesenchima, due serie di cellule nervose piriformi. Questo solco è, senza dubbio, un organo di senso.

Di questa specie sono stati sinora pescati tre soli individui dal mio amico Salvatore Lo Bianco, in vicinanza della Grotta azzurra, alla profondità di 100 metri, il 15 marzo 1890.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Tutte le figure rappresentano preparazioni a fresco, eccettuata la Fig. 8 che rappresenta una sezione eseguita per mezzo del microtomo, dietro indurimento coll'alcool, colorazione col carminio ecc. e inclusione in paraffina.

Fig. 1ª — Bosellia veduta dalla faccia dorsale × 13.

Fig. 2ª — Bosellia veduta dalla faccia ventrale × 7.
a, velo carnoso.
b, piede.
c, margine anteriore del piede.
d, orifizio buccale.
e, faccia inferiore del corpo.

Fig. 3ª — Bulbo faringeo veduto di fianco col microscopio da dissezione Zeiss.
a, orifizio anteriore.
b, parte anteriore contenente la radula.
c, parte posteriore.
d, gangli sopraesofagei.
e, gangli sottoesofagei.
f, occhio portato da un lungo nervo ottico.
g, esofago.

Fig. 4ª — Bulbo faringeo veduto dalla faccia superiore.
Le lettere, come nella figura precedente.

Fig. 5ª — Radula × 750.

a, polpa della radula.

Fig. 6ª — Un pezzetto della faccia dorsale dell' animale vivente osservato col sistema Zeiss $\frac{8}{4.0}$.

a, epitelio.

b, estremità periferica di una vena dorsale che si apre all' esterno.

c, cigli vibratili.

d, estremità periferica di una vena dorsale che si approfonda nel mesenchima e termina nelle lacune sanguigne.

Fig. 7ª — Otocisti × 250.

Fig. 8ª — Sezione trasversale della regione oculare.

a, cellule epiteliali cubiche del comune integumento.

b, cellule epiteliali depresse della pelle nella regione oculare.

c, lamina di tessuto congiuntivo che sostiene le cellule epiteliali nella regione oculare, e forma una specie di cornea trasparente.

d, lacuna sanguigna.

e, retina.

f, pigmento.

g, nervo ottico.

h, un nervo che va alla pelle.

Fig. 9ª — Guaina entro la quale è retratto il pene × 240.

a, guaina del pene colle sue fibre muscolari longitudinali e trasversali.

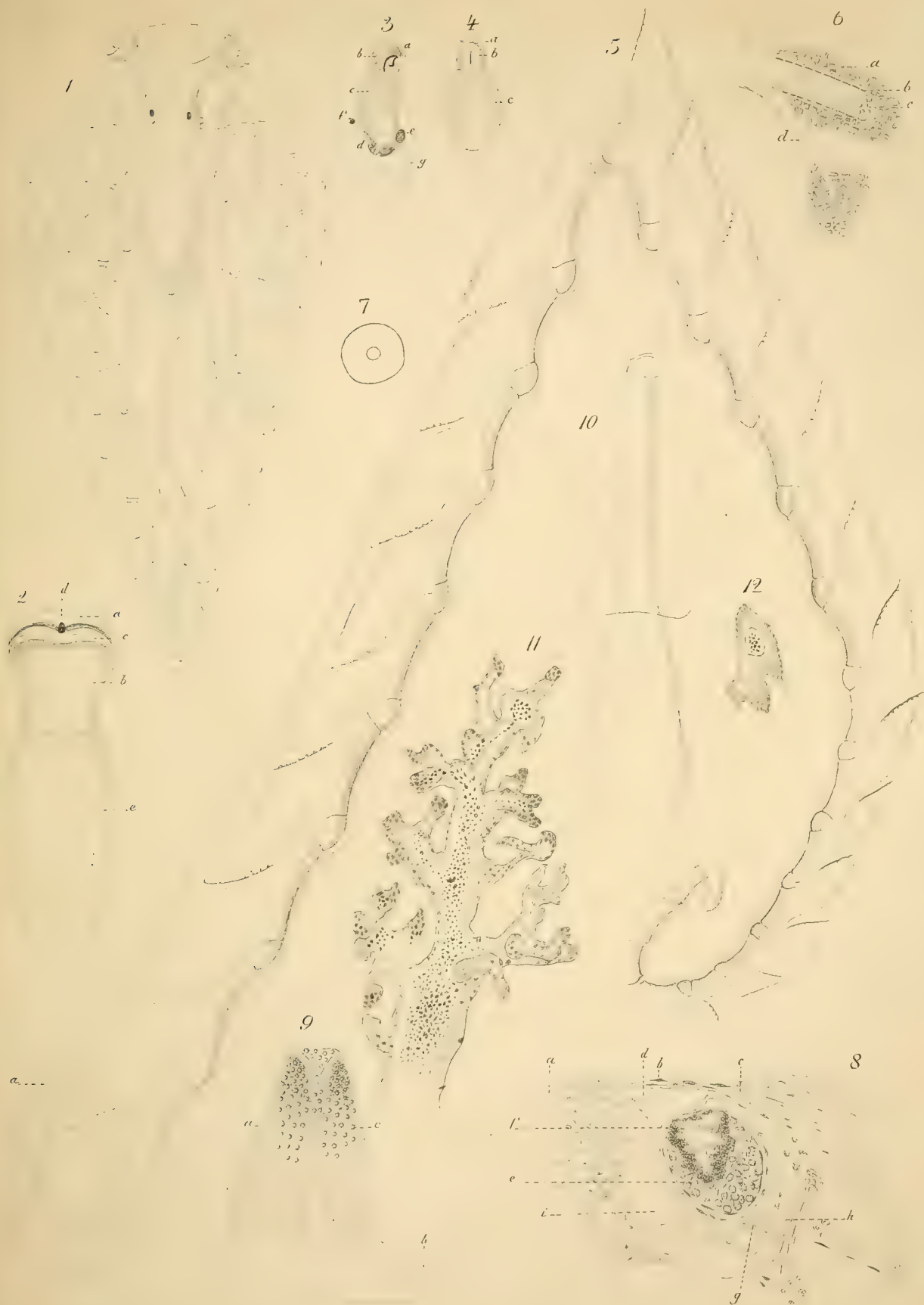
b, condotto deferente.

c, concrezioni escretorie contenute nelle cellule che tappezzano la faccia interna della guaina.

Fig. 10ª — Apice del pene dal quale vien fuori il tubo chitinoso × 750.

Fig. 11ª — Una ramificazione epatica × 240.

Fig. 12ª — Una cellula epatica × 750.

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

SU DI UNA

NOTEVOLE ECTOPIA DELLA PLICA PUBO-OMBELICALE (C. KRAUSE) (1)

MEMORIA

DEL DOTTOR GIOVANNI D'AJUTOLO

LIBERO DOCENTE DI ANATOMIA PATOLOGICA
NELLA R. UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

(CON UNA TAVOLA)

Un uomo di 24 anni, il quale per tubercolosi delle ossa aveva subito l'amputazione della gamba sinistra al 3° superiore e la disarticolazione tarso-metatarsea alla *Lisfranc* nel piede destro, moriva l'11 gennaio di quest'anno nell'Ospedale Maggiore di Bologna con sintomi di tubercolosi cronica diffusa.

All'autopsia, oltre alle alterazioni tubercolari cennate, di notevole osservammo che il peritoneo parietale del quadrante inferiore destro formava una plica triangolare (*P*), che dal mezzo dei vasi iliaci esterni (*ie*) ascendeva verso la regione ombelicale (*o*), ove si dileguava. La plica, lunga 10 centimetri e larga al massimo 4, aveva la base in basso, l'apice in alto e un po' all'interno, un margine posteriore libero, sottile, rivolto alquanto in alto ed un margine anteriore aderente alla parete addominale quasi a ridosso dei vasi epigastrici inferiori interni. E siccome poi colla base s'inseriva al tratto anteriore dei vasi iliaci esterni, così veniva a costituire la parete interna di una fossa ileo-inguinale abbastanza profonda.

Esaminando un po' meglio questa plica — che pe' suoi rapporti poteva esser detta *ileo-ombelicale* — tosto ci accorgemmo, che verso il suo margine libero essa era sostenuta da un cordoncino fibroso abbastanza resistente, il quale dall'arteria ipogastrica, ove prendeva origine, si portava in alto, assottigliandosi, verso l'ombelico. Il cordoncino era evidentemente

---

(1) Detta ancora *plica dell'arteria ombelicale, plica vescicale laterale* ecc. (Henle).

costituito dall' arteria ombelicale, per la massima parte, come di solito, boliterata ed offriva la particolarità di essere più breve dell' omonimo del lato opposto. Nello stesso lato l' arteria ipogastrica aveva cambiato direzione, decorrendo quasi parallelamente alla vena iliaca esterna, e cambiata pure era la direzione del dotto deferente, essendo stato spostato in dietro dall' arteria ombelicale, che ne era rimasta accavallata nella sua porzione iniziale. Non si vedeva traccia di legamento laterale della vescica e conseguentemente nessun vestigio di fossette inguinali media ed interna (1). L' uraco era appena accennato. L' anello crurale, come pure quasi tutto il decorso del canale inguinale, trovavansi collocati all' interno della plica, la quale pertanto doveva essere giudicata come una *plica pubo-ombelicale ectopica.*

Alla base di questa, due altre pieghe peritoneali si osservavano. Una di esse, di forma falcata (*ii*) e col margine libero rivolta all' esterno ed all' indietro, si vedeva sorgere orizzontalmente dal fondo della fossa ileo-inguinale ed estendersi dal contorno superiore dell' anello inguinale interno fin verso il margine libero della plica triangolare. Lunga 4 cent. e larga al massimo uno, detta piega divideva la fossa ileo-inguinale in due spazii, l' inferiore dei quali assai piccolo (*fi*), e come depresso dall' alto al basso, corrispondeva all' anello inguinale profondo. In mezzo alle sue pagine e per quasi tutta la sua lunghezza questa plica, che potrebb' esser detta *ileo-inguinale*, accoglieva il dotto deferente, il quale, come abbiam veduto, era stato spostato alquanto indietro dall' arteria ombelicale, che a sua volta ne era rimasta accavallata nel suo tratto iniziale.

Un' altra di queste pieghe (*is*) nasceva dalla faccia interna della plica triangolare d' accosto al suo margine libero e si portava un po' obbliquamente in basso e indietro lungo la parete laterale del bacino, colla quale formava un seno aperto anteriormente ed un poco all' ingiù. Questa piega era lunga 3 centimetri, larga al massimo uno, e siccome aveva rapporti di vicinanza con i vasi iliaci in alto e coll' ischio in basso, così poteva esser denominata *ileo-ischiatica.*

Un' altra piega finalmente col margine concavo rivolto verso sinistra si scorgeva nello spazio retto-vescicale destro e rappresentava la plica semilunare del *Douglas* notevolmente sviluppata (*rv*).

Lasciando ora da banda queste ultime pieghe e fermando la nostra attenzione sulla ileo-ombelicale, o meglio pubo-ombelicale ectopica, noi crediamo che essa fu prodotta dalla brevità dell' arteria ombelicale, in conseguenza della quale l' arteria non potendo discendere nell' escavazione

---

(1) Chi le chiama *fossette* e chi *fosse*, chi le distingue in *esterna, media* ed *interna* e chi in *esterna, interna* e *pubo-vescicale.* Noi abbiamo preferito la prima distinzione, che adottano anche alcuni chirurghi, perchè ci è sembrata più semplice.

pelvica ed addossarsi alla vescica orinaria, com' é suo costume, dovette restarsene indietro ed all' esterno della sua sede abituale. In tale concetto siam confortati anche dallo esperimento. Infatti, se in un cadavere con arterie ombelicali a decorso e situazione normali scopriamo l' estremità periferica di una di esse, e, tenendo distesa la parete addominale, vi esercitiamo su delle trazioni, lasciando libero il peritoneo, che la ricopre; ben tosto vedremo, che l' arteria si porta verso i vasi iliaci esterni, sollevando il peritoneo in forma di una plica triangolare più o meno cospicua. Contemporaneamente osserveremo: *a*) l' arteria ipogastrica spostarsi in alto ed in avanti colla sua estremità inferiore per rendersi parallela a' vasi iliaci esterni; *b*) il dotto deferente trasferirsi indietro e mettersi a cavalcioni del tratto iniziale dell' arteria ombelicale; *c*) ed il peritoneo pieghettarsi tanto all' interno quanto all' esterno della base della plica triangolare: in somma, vedremo, a poco a poco che stiriamo l' arteria, riprodursi, pressoché identicamente, tutt' i fatti notati nel caso che stiamo illustrando. In quanto poi alla causa che determina la brevità dell' arteria, egli é da credere che consista in una ipoplasia dell' arteria stessa, per la quale non potendo svilupparsi in proporzione delle pareti addominali, essa rimane relativamente più corta del normale e quindi atta a produrre tutti quei cangiamenti di rapporti che abbiamo di sopra notati.

Di questa ectopia della plica ombelicale non é fatto cenno nei migliori trattati di anatomia (1); né della eccezionale brevità dell' arteria ombelicale si trova fatta menzione dall' illustre Prof. *Taruffi* in quel suo pregevolissimo articolo « Sulle anomalie del funicolo ombelicale », in cui riporta quasi tutti i casi di anomalie di numero, di origine, di sviluppo e di distribuzione di tale arteria, che trovansi sparsi nella letteratura anatomica (2). Per cui ci siam creduti in dovere di pubblicarla.

Tale anomalia, a quanto sembra, non é neppur rara. Dopo l' osservazione testé riferita, abbiamo avuto occasione di riscontrarla 3 altre volte

(1) Meckel — Manuale di di Anat. gen. descrittiva e patologica. T. III, p. 210 e T. IV, p. 407. Trad. da Caimi. Milano 1826.

Dubrueil — Des Anomalies artérielles, pag. 291 e seg. Paris 1847.

Luschka — Die Anatomie des Menschen. Bd. II. I Abth. S. 160. Tübingen 1863.

Hyrtl — Istituzioni di Anatomia dell' uomo. Trad. da Antonelli. Pag. 725 e 987. Napoli 1865.

Henle — Die Anatomie des Menschen. Bd. II. 342 e 908. Braunschweig 1873.

Sappey — Traité d' Anat. descriptive. T. II, pag. 649. Paris 1876, e T. IV, pag. 555. Paris 1879.

Krause W. — Handbuch der menschl. Anatomie. Bd. III. S. 146 e 175, 1880.

Theile — Trattato di miologia e di angiologia. Vol. III dell' Enciclopedia Anatomica. Trad. da Levi, pag. 372. Milano 1882.

Tillaux — Trattato di Anat. Topografica, pag. 724. Milano 1885.

Debierre — Traité élémentaire d' Anatomie de l' Homme. Tom. II, pag. 625. Paris 1890.

(2) V. Bullettino delle Scienze Mediche di Bologna. Serie VI, Vol. XX, pag. 51, 159 e 295, 1887; e Storia della Teratologia (dello stesso Prof. Taruffi). Tom. V, pag. 188. Bologna 1889.

in circa 40 cadaveri, e in alcuni appunti che conserviamo sulle anomalie del peritoneo, trovasene notato un altro esempio da noi stessi veduto nel 1888. Un altro esemplare, infine, tuttora inedito, si conserva nel Museo d'Anatomia normale diretto dall'illustre Prof. *Calori*, dal quale ci è stato gentilmente mostrato. Cosicché ammontano *a sei* i casi occorsici finora. — Essi poi si presentarono costantemente in individui di sesso maschile; 5 volte erano nel lato destro; tutti mostrarono la plica sviluppatissima, quantunque un po' meno di quella superiormente descritta e che perciò abbiamo scelta per tipo.

La conoscenza di questa ectopia ci è sembrata interessante, non solo perché risguarda un fatto teratologico per sé stesso degno di nota, ma ancora perché dimostra che i rapporti delle ernie crurali e delle inguinali dirette colla plica ombelicale non possono essere sempre costanti. Ed invero, se tali ernie si producono, quando la plica è ectopica, allora dovrà necessariamente accadere che le si trovino situate internamente e non più all' esterno di essa, come normalmente avviene. Ora questo fatto si è già verificato; anzi in quella preparazione testé ricordata del Prof. *Calori* si vedeva persino bilateralmente un' ernia inguinale diretta, la quale a destra stava nel *lato interno* della plica, che era ectopica, mentre a sinistra aveva sede nella fossetta media, per cui rimaneva all' esterno della plica ombelicale.

Ed ora, a proposito di tale plica, ci sia consentito di avvertire, che tutte le volte che la si incontri in un cadavere, non la si deve giudicar subito per una ectopia della pubo-ombelicale. Imperocché può darsi benissimo, che questa non ci entri per nulla affatto, e che la plica sia prodotta per un'anomalia dell' arteria epigastrica, sia che questa nasca da un punto più elevato (1), sia che rappresenti una epigastrica accessoria data dalla stessa iliaca esterna (2). In tali casi — se la plica non può essere disfatta, perchè la si voglia conservare — per giudicare convenevolmente, si guarderà prima se la plica laterale della vescica, o pubo-ombelicale, manchi nella sua sede abituale, e quando ciò fosse accertato, si ricercherà ove si trovi e come si comporti l'arteria ombelicale in tutto il suo decorso; giacché può accadere — come a noi è occorso di osservare — che questa in grazia forse di una eccessiva sua lunghezza stia adagiata e quasi nascosta lungo la parete addominale in corrispondenza della fossetta inguinale media; ovvero che dia luogo ad una epigastrica accessoria, degna di essere conosciuta per i rapporti che potrebbe offrire colle ernie inguinale e crurale, e fors' anco con

(1) Béclard ne vide un esempio (V. Dubrueil, lav. cit. pag. 272). Un altro esemplare si conserva nel Museo anatomico di Pavia (V. Zoja G. Il Gabinetto di Anat. normale della R. Università di Pavia. N. progressivo generale 717, e 133 della serie).

(2) Dubrueil — lav. cit. pag. 271.

qualche plica anomala del peritoneo. *Pistocchi* (1) infatti ebbe occasione di osservare un' arteria ombelicale, che inviava due rami alla parte superiore dell' anello di un' ernia inguinale diretta; e *Lauth* (2) vide una epigastrica accessoria che decorreva al lato interno, o mediale, della ombelicale stessa che l' aveva prodotta (3). Quindi si giudicherà di plica pubo-ombelicale ectopica, quando si avranno le prove della ectopia dell' arteria ombelicale e del relativo sollevamento in avanti dell' estremità inferiore dell' art. ipogastrica, come si è osservato nel caso in esame.

Tutto quello che si è detto finora, riguarda il grado massimo della ectopia e dello sviluppo della plica pubo-ombelicale da noi veduto. Però altri fatti e non meno importanti possono esserci offerti da essa e noi non vogliamo omettere di ricordarli. Uno di questi consiste nel trovarsi la plica di contro all' anello crurale, quando proprio nel mezzo, quando in corrispondenza del segmento esterno di esso. Allorchè ciò accade e la plica, come d' ordinario, è bene sviluppata, la fossetta inguinale media mostrasi angusta e profonda molto, da far pensare che se in una forte distensione del ventre i margini liberi delle pliche si dovessero render tesi, un' ansa intestinale che vi si trovasse compresa, potrebbe rimanerne più o meno compressa o strangolata. Altra volta la plica è accollatissima alla vescica, come nei feti, e sviluppatissima a segno da raggiungere la larghezza massima fin di 4 centimetri. In tal caso, siccome le due pliche tendono a convergere col loro margine anteriore verso la linea alba, si forma nella parte alta e laterale della vescica una profonda fossa, che anteriormente è limitata dalla parete addominale, in basso dalla vescica, mentre posteriormente ha per limite la piega in parola.

Queste sono le cose più notevoli che ci ha offerto a considerare la plica pubo-ombelicale. — Aggiungiamo, da ultimo, che le anomalie discorse si son presentate quasi sempre unilaterali, e quando qualcuna si mostrò bilaterale, essa, per giunta, apparve più o meno asimmetrica.

Bologna, aprile 1891.

---

(1) Pistocchi F. — Di una particolare disposizione circolare arteriosa intorno il foro inguinale trovata in un affetto di ernia. — Bull. delle Sc. Mediche, Serie III, Vol. XIX, pag. 143. Bologna, 1851. con tavola.

(2) Lauth — Mémoires de la Société d' Histoire naturelle de Strasburg. Paris 1831. Tom. I, Liv. 2, pag. 43.

(3) A proposito dell' arteria epigastrica accessoria, merita di essere ricordato il fatto osservato dal Velpeau di una epigastrica accessoria (originatasi dalla ipogastrica), la quale passava all' indentro di un sacco erniario crurale. (V. Vidal (de Cassis): Tratt. di Patol. esterna Vol. IV, p. 254, Milano, 1865).

SPIEGAZIONE DELLA FIGURA

P, plica triangolare ileo-ombelicale, o pubo-ombelicale ectopica.

ii, plica falcata ileo-inguinale.

o, regione ombelicale.

ie, vasi iliaci esterni.

fi, fossetta ileo-inguinale inferiore.

V, vescica orinaria.

rv, plica retto-vescicale.

cec, cieco.

pb, pube.

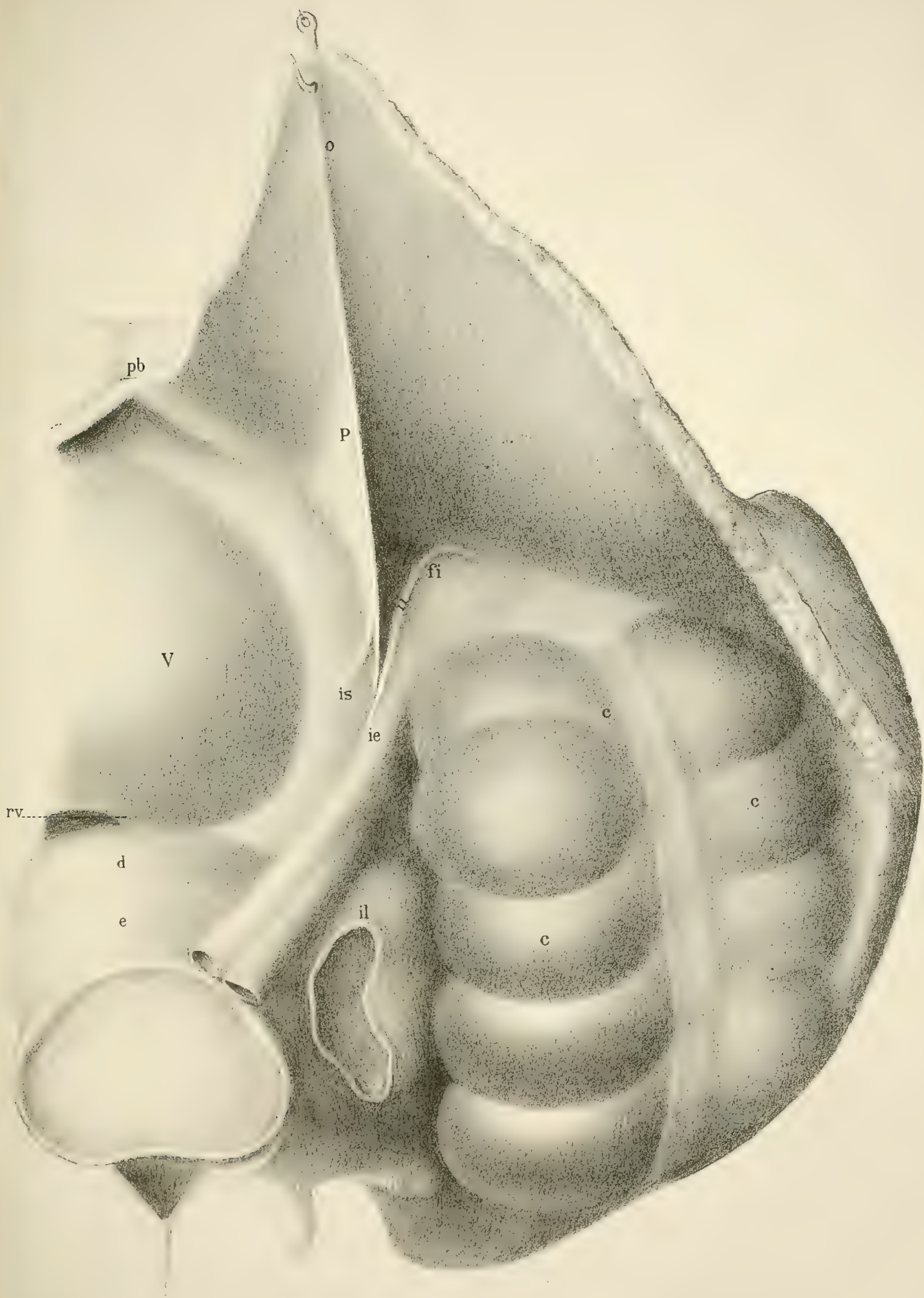
is, plica ileo-ischiatica.

il, intestino ileo.

d, 5ª }
e, 4ª } vertebra lombare.

G. D'Ajutolo.

E. Contoli dis. dal vero ed in pietra

lit. G. Wenk e Figli – Bologna

SU DI ALCUNE ARTICOLAZIONI ANOMALE

DEL PRIMO PAJO DI COSTE DELL'UOMO

MEMORIA

DEL DOTTOR GIOVANNI D' AJUTOLO

(Letta nella Sessione del 26 aprile 1891).

(CON UNA TAVOLA)

È risaputo, che in individui con scheletro perfettamente conformato le cartilagini del 1° pajo di coste non si articolano per diartrodia nè collo sterno, nè colla clavicola, nè colle coste rispettive; nè tampoco offrono traccia di diartrosi nel loro decorso in un punto più o meno distante dalla sinartrosi condro-costale. Però in circostanze puramente accidentali un tal fatto può benissimo verificarsi, ed anzi sono ben noti gli esempi: di articolazioni condro-sternali riferiti dal *Gruber* (1) e dal *Luschka* (2); di clavico-costali pubblicati dal *Gruber* (3), dallo *Schwegel* (4) e dal *Luschka* stesso, non che di costo-condrali e di condro-condrali che il *Freund* (5) ed il *Luschka* medesimo hanno descritto.

Tutte queste osservazioni ammontano a poco più della ventina, ossia a un numero ancora esiguo per poterne dedurre delle leggi in proposito. Ciò che tutt' al più è consentito di dire, si è che l' articolazione, che ha luogo nella cartilagine in un punto più o meno vicino alla estremità anteriore della costa, si è presentata un po' più frequentemente delle altre e che intorno alla medesima sono tuttora discrepanti le opinioni degli studiosi da giustificare nuove indagini.

---

(1) Gruber W. — Neue Anomalien etc. Berlin 1849.

(2) Luschka H. Die anomalen Articulationen des ersten Rippenpaares. Sitzungsb. der Kais. Akad. des Wissenschaft. Wien 1860, S. 420.

(3) Gruber — loc. cit. S. 5.

(4) Schwegel — Knochenvarietäten — Henle's u. Pfeufer's Zeitsch. f. ration. Med. 1859. III Reihe. V Bd. Heft 2 u 3. — Canstatt's Jahresb. Bd. IV, S. 25, 1859.

(5) Freund A. — Der Zusammenhang gewisser Lungenkrankeiten mit primären Rippenknorpelanomalien. Erlangen 1859. — Canstatt's Jahresb. II, 33; III, 259; IV Bd. 397, 1859.

Ed invero l'*Hyrtl* (1), che primo accennò a un tal fatto, lo considerò come una semplice pseudoartrosi, e fu condotto a tale giudizio dall'aver veduto partite per sinfisi mobili perfino tutte le coste del lato destro di una donna decrepita, che portava in sè i contrassegni di una generale osteomalacia. Il *Freund,* che ebbe occasione di osservare più volte lo stesso fatto, espresse ancor egli l'opinione che si trattasse di una pseudoartrosi e ne dette una spiegazione, che il *Luschka* trovò eccessivamente ardita (*ueberaus kühnen*). Il *Freund* cioè ammise, che la brevità congenita della cartilagine costale e la ossificazione precoce del suo pericondrio, rendendo angusta e immobile l'apertura superiore del torace, potessero determinare in alcuni casi lo sviluppo della tubercolosi nell'apice polmonare, e che la natura per rimediarvi si giovasse delle forti trazioni dei muscoli che s'attaccano alla prima costa, per fratturarne la cartilagine nei punti ove l'osso pericondrale rimane annularmente interrotto; donde poi la pseudartosi e la conseguente mobilità dell'apertura superiore del torace. E il *Freund* avrebbe visto in tali casi la guarigione del processo tubercolare nell'apice del polmone, come risultava dalla obsolescenza e calcificazione dei tubercoli e dalla presenza di molteplici cicatrici nella detta località.

Ma contro questa idea fecero serie obbiezioni il *Foerster* (2) e il *Luschka.* — Il primo osservò, che una tale spiegazione, dato che fosse ammissibile per alcuni casi di tubercolosi, non valeva certamente pei moltissimi, in cui la pseudoartrosi manca; che non si comprendeva come l'immobilità della parte superiore del torace dovesse cagionare un processo in alto grado produttivo, una proliferazione cellulare rigogliosa e rapida, qual è il processo tubercolare, e non si fosse invece verificato nel torace stesso, che è così mobile e dilatabile, un allargamento complementare al locale restringimento.

Il *Luschka* a sua volta obbiettò, che i movimenti della 1ª costa non potevano influire sull'apice polmonare, giacchè questo si eleva 1-5 cm. su quella da non esserne ricoperto neanche nelle più forti inspirazioni. Che non c'è una corrispondenza costante tra la brevità ed ossificazione della prima cartilagine costale e lo sviluppo della tubercolosi polmonare, trovandosi polmoni malati con cartilagini costali bene sviluppate e sane, come al contrario cartilagini brevi ed ossificate con polmoni sani; e quindi egli non poteva accettare tale rapporto causale. — Per lui l'articolazione in parola ordinariamente stava a rappresentare una pseudoartrosi consecutiva tanto ad uno sforzo muscolare quanto ad un processo morboso della cartilagine; però in certi casi doveva esser ritenuta come un'anomalia

(1) Hyrtl — Manuale di Anatomia Topografica. Trad. ital. Tom. II, pag. 51. Milano 1858.
(2) Foerster A. — Canstatt's Jahresb. loc. cit.

di sviluppo, costituente una importante ripetizione di quanto si osserva nella unione articolata delle ossa vertebro-e-sterno-costali di molti animali (1).

Data questa disparità di opinioni su tale argomento, abbiam creduto utile di pubblicar alcuni casi di articolazioni anomale, che abbiam trovato lungo la prima cartilagine costale; ne ricorderemo pur una, che abbiamo riscontrato tra cartilagine e sterno; ma ci dispenseremo di dir altro dell'articolazione costo-clavicolare, perchè di essa non avemmo occasione di verificarne alcun caso.

I casi di articolazioni anomale nella prima cartilagine costale da noi osservati ascendono al n° di otto e furono trovati in 6 individui, perchè due volte erano bilaterali.

Il 1° di questi esemplari appartiene al Museo anatomo-patologico di questa R. Università (n° 1286 di catalogo) diretto dall'illustre Prof. Taruffi, e fu osservato in un Sensale di cambio di robustissima costituzione, che morì nel 1846 per lo strangolamento di un' ernia gastro-intestinale diaframmatica da trauma. Nella parte sinistra del torace — la sola conservata — si vede che la prima costa a 22 mill. dallo sterno (fig. 4ª, *d*) è quasi annularmente ingrossata e bernoccoluta, e quantunque conservata a secco, pure offre ancora un po' di mobilità su sè stessa in tal punto. La mobilità è data da una soluzione di continuo in forma di articolazione diartrodiale, che attraversa la costa in tutta la sua spessezza, e che pei $^4/_5$ superiori è diretta verticalmente dall'alto al basso e pel $^1/_5$ inferiore è diretta orizzontalmente per 15 mill. verso l'esterno lunghesso il margine anteriore della costa (*co*). In conseguenza di ciò il capo articolare interno, in corrispondenza dell'articolazione, termina in una specie d'incisura semilunare rivolta in alto e all'infuori, nella quale prende parte il capo articolare esterno.

Segata longitudinalmente la costa, si nota che i due capi articolari son tenuti uniti da una capsula-fibrosa fornita dal periostio, e che in mezzo ad essi, nel punto cioè ove si articolano, hanno una cavità (*a*), di forma ellittica, costituita dalle superficie articolari dei due capi divenute concave probabilmente per disseccamento, e che esternamente è contrassegnata da un ingrossamento irregolare dell'osso, che forma poi l'ingrossamento annulare testè ricordato. Le superficie articolari sono scabre e come vellutate, e con opportuna preparazione (previo rammollimento in acqua), si è

---

(1) LUSCHKA — Die Anatomie des Menschen. Bd. I, II Abth., S. 120. Tübingen 1863.

potuto vedere al microscopio che erano rivestite da un sottile strato di fibro-cartilagine. Il pezzo esterno o costale é per la massima parte ossificato e nella sua parte piú centrale, immediatamente vicino all' articolazione, risulta composto di cartilagine jalina (*e*), dello spessore di 2 mill., ma che a fresco doveva essere indubbiamente assai piú grossa. Il pezzo interno o sternale mostrasi cartilagineo internamente (*cj*); esternamente invece é costituito di sostanza ossea, spongiosa, data dalla ossificazione del pericondrio - osso pericondrale (*op*); il quale dopo avere avvolto a mo' di astuccio la porzione centrale cartilaginea, si prolunga, come si é visto, per 15 mill. (*pr*) sul margine anteriore del capo articolare esterno, donde la incisura semilunare giá notata nell' estremitá articolare del pezzo sternale. Tra la porzione cartilaginea e l' ossea pericondrale del pezzo sternale, a breve distanza dall' articolazione, notasi uno spazio ellittico (*l*) diretto orizzontalmente, il quale dev' essersi formato in seguito al disseccamento della cartilagine.

I polmoni del Sensale nulla offrirono di patologico. Essi apparvero soltanto compressi dai visceri erniati, e piú il polmone sinistro del destro.

Il 2° esemplare rimonta al 1869 e fu conservato in Museo come esempio di frattura costale male consolidata (V. N. 1612 del Catalogo). La sola notizia, che abbiamo trovato in proposito, stava sull' etichetta del preparato e risguardava il lato (sinistro) del corpo, in cui fu rinvenuto. Nulla si sa del sesso del soggetto. Tutto il pezzo conservato é lungo 6 cent., per metá costituito dalla porzione, che si direbbe cartilaginea della costa e per metá della parte anteriore della prima costa, e proprio nel mezzo della sua lunghezza offre un ingrossamento annulare piú sviluppato sulla faccia interna o pleurica che sull' esterna o superiore della costa, e che vi asconde un' articolazione, dotata di pochissima mobilitá. Il capo articolare esterno presenta una superficie articolare convessa ed alquanto irregolare, perché cosparsa di piccole rivelatezze che si alternano con lievi sinuositá; il capo interno all' incontro ha una superficie articolare concava, ancor essa alquanto irregolare. Cosicché la linea interarticolare é concava verso l' esterno. I due capi articolari perifericamente sono costituiti dall' osso pericondrale, che forma la viera; invece nella parte piú centrale risultano di cartilagine jalina, la quale nel pezzo sternale si estende fino allo sterno, mentre nel pezzo esterno offre la spessezza massima di soli 3-4 mill. Tanto poi l' uno quanto l' altro pezzo mostrano sulla loro superficie articolare un sottile rivestimento fibro-cartilagineo. Come nell' esemplare precedente i due capi articolari sono tenuti uniti da una capsula fibrosa abbastanza spessa e corta, che é un manifesto prolungamento del pericondrio fattosi periostio. Il pezzo interno ha forma quasi cilindrica ed é provvisto esternamente di

un completo astuccio osseo pericondrale, la cui spessezza va crescendo dallo sterno verso l'articolazione, ove giunge rapidamente a 9 mill. circa; la cartilagine poi, che esso contiene, offre qua e là un qualche punto di ossificazione.

Il 3° e il 4° esemplare (fig. 1ª) (1) datano dal 1884 e furono riscontrati in un vecchio di 81 anno, decesso per laringite crupale, il quale presentava anche torace cilindrico, lievemente imbutiforme ed asimmetrico e fornito di rilevatezze ossee in forma di bottoni, in corrispondenza delle articolazioni condro-sternali. — Nella prima costa di ambidue i lati — a 32 mill. dallo sterno a destra (*d*), a 24 mill. a sinistra (*d'*) — si scorge un ingrossamento annulare più cospicuo nella faccia inferiore o pleurale che nella superiore, ed in corrispondenza di esso la costa mostra una lieve mobilità. Le due articolazioni presentano gli stessi caratteri di quelle precedentemente descritte. Le coste appajono regolarmente sviluppate; la porzione corrispondente alla cartilagine conservasi cartilaginea nell' interno e in forma di astuccio osseo pericondrale all' esterno, il quale è congiunto per sinostosi collo sterno. L' astuccio osseo pericondrale sinistro è completo; a destra al contrario mostrasi interrotto nella sua faccia inferiore vicino allo sterno per un tratto di forma ellittica, lungo 10 e largo al massimo 4 mill. e che permette di vedere la cartilagine che vi è inclusa. Un altro pezzo di cartilagine di alcuni mill. di spessore trovasi anche nel moncone articolare esterno ed è avvolto, al pari dell' altro, dal solito astuccio osseo pericondrale.

Il 5° esemplare (fig. 3ª) fu raccolto il 28 febbraio di quest' anno in un uomo di 84 anni, morto per bronchite acuta diffusa e già sofferente di bronco-pneumonite catarrale cronica del lobo superiore destro. Nella prima costa di questo lato la cartilagine si mostra rivestita di una guaina ossea pericondrale ed è saldata, come d' ordinario, alla estremità anteriore della relativa costa; invece nel suo punto di unione collo sterno essa offre una vera articolazione diartrodiale (*d*), contrassegnata esternamente da un rilievo osseo, che ne percorre il contorno posteriore dall' alto al basso. Quest' articolazione presenta esternamente una capsula fibrosa molto grossa, che s' insinua per un certo tratto anche in mezzo alle superficie articolari, ed internamente risulta di due superficie articolari rivestite di fibro-cartilagine, che sullo sterno giunge fino a $1/2$ centimetro di spessore. Le superficie articolari nella parte centrale non sono completamente libere, giacchè ivi veggonsi unite fra loro mediante tessuto fibroso. La linea interarticolare

(1) Si conserva nel Museo Anatomo-patologico della R. Università di Bologna al n° di Catalogo 183 (Serie II)

è un po' ricurva dall' alto al basso colla concavità rivolta verso l' esterno. La cartilagine costale offre parecchi punti di ossificazione nel suo decorso ed è lunga 26 millimetri.

Nel lato sinistro all' incontro si vede, a 15 mill. circa dello sterno, il solito ingrossamento annulare (*c*), ed in mezzo ad esso notasi una vera articolazione diartrodiale (*d'*), con linea interarticolare concava verso l' esterno, a motivo che l' astuccio osseo pericondrale del capo articolare interno si prolunga alquanto sulla estremità articolare del capo esterno, quasi volesse avvolgerlo. Le superficie articolari sono rivestite da un sottile strato di fibro-cartilagine e sono tenute strettamente congiunte fra loro da una specie di capsula fibrosa (*ca*) robusta e corta, emanazione anch' essa del periostio pericondrale, che ne limita al massimo i movimenti. Tanto di qua quanto di là dall' articolazione veggonsi due cospicui pezzi di cartilagine jalina (cj^1, cj^2) circondati da osso pericondrale: l' interno di essi, lungo 15 mill., è unito allo sterno mediante una fibro-cartilagine grossa poco più di un millimetro; l' esterno, lungo 13 mill., finisce verso l' esterno quasi biforcato per una parziale ossificazione da esso ivi subita.

Il 6° esemplare fu osservato in un uomo di 43 anni, morto di tubercolosi florida verso la fine di marzo di quest' anno. In ambidue i lati la prima costa a due centimetri dallo sterno offriva un ingrossamente annulare da far sospettare che si trattasse della solita articolazione in tutte due le parti. Nessuna manifesta mobilità intanto si avvertiva in detti punti. Segate longitudinalmente le coste, si trovò che a sinistra la cartilagine, lunga 35 mill. era unita, come d' ordinario, immobilmente tanto collo sterno quanto colla costa e non mostrava traccia di articolazione nel punto ingrossato. — A destra invece, nel luogo dell' ingrossamento annulare, apparve una manifesta articolazione, la cui linea interarticolare ancor essa ricurva, aveva al solito la concavità (sebbene poco pronunciata) rivolta all' esterno, come si è veduto nei casi precedenti; per cui il capo articolare esterno sembrava come incapsulato nel capo articolare interno. Il pezzo interno, o moncone articolare sternale, era lungo 27 mill. e constava di cartilagine internamente e di osso spugnoso pericondrale all' esterno; anche nel moncone esterno si trovava nella sua parte centrale un pezzo di cartilagine jalina, lungo 7 mill. ed avvolto da osso spugnoso pericondrale; per cui l' articolazione, trovandosi in mezzo a due pezzi cartilaginei, era da definirsi come condro-condrale.

All' esame dell' apparecchio respiratorio si trovarono: ulcere tubercolari nella laringe, nella trachea e nei bronchi; bronco-pneumonite caseosa bilaterale e pleurite tubercolare sinistra con essudato siero-fibrinoso emorragico.

Il 7° e l' 8° esemplare finalmente (fig. 2ª) furono trovati nel cadavere di un uomo di 59 anni e di ottima costituzione, morto in seguito di pleuro-pneumonite acuta. All' esame delle due prime coste si rinvenne un' articolazione anomala in tutti due i lati, contrassegnata esternamente dal solito rilievo annulare osseo. — A destra la cartilagine, lunga 38 mill., quasi nella sua metà mostrasi divisa in due da una cavità articolare (*d*) diretta press'a poco verticalmente ed occupata da un bellissimo disco fibro-cartilagineo (*fc*). Le superficie articolari dei capi omonimi presentansi abbastanza regolari e rivestite dal solito straterello di fibro-cartilagine, e la capsula fibrosa (*ca*) mostra solo qua e là qualche piccola frangia sinoviale. I due pezzi di cartilagine, di natura jalina come tutti gli altri superiormente ricordati, offrono a quando a quando nel loro spessore dei punti di ossificazione (*po*) e sono ricoperti del solito guscio osseo pericondrale, il quale è intimamente unito tanto collo sterno quanto colla rispettiva costa. In corrispondenza dell' articolazione il guscio osseo (*op*) raggiunge rapidamente la grossezza di 6-7 millimetri, e da ciò deriva la viera ossea suddetta.

A sinistra, la cartilagine misura parimente 38 mill. in lunghezza; aderisce intimamente allo sterno ed alla costa e ad 8 mill. dalla sua estremità esterna mostrasi divisa da uno spazio articolare (*d'*) leggermente concavo verso l' esterno. Nella cavità articolare si contiene della sinovia, come in tutte le altre da noi esaminate a fresco, e le superficie articolari sono lievemente irregolari, come villose, ed offrono verso la loro periferia delle rilevatezze a guisa di frange sinoviali. Nella cartilagine notansi pure qua e là i soliti punti di ossificazione (*po*) e la capsula articolare (*ca*), come negli altri casi, risulta dal consueto prolungamento del pericondrio, che si potrebbe dire periostio per l' ossificazione da esso subita.

Dall' esame dei fatti testè descritti chiaro risulta, che l' articolazione per ben 8 volte da noi riscontrata aveva sede, non nel limite fisiologico tra cartilagine e costa, ove è stata veduta dal *Luschka*, ma nel decorso della cartilagine stessa a maggiore o minore distanza dall' osso costale. Questo fatto era evidentissimo negli esemplari 5° e 6° ove l' articolazione stava proprio nella parte media della cartilagine; ma era manifesto e da giudicarsi tale anche negli altri esemplari, nei quali un pezzo di cartilagine jalina più o meno lungo e rivestito di un sottile strato fibro-cartilagineo e di osso pericondrale giaceva appunto tra l' articolazione anomala e l' osso proprio della costa. Onde l' articolazione in parola dev' essere considerata come condro-condrale, anzichè condro-costale. In favore di tale giudizio parlano benanco le misure. Computando infatti col *Freund* la lunghezza media della prima cartilagine costale di 38 mill. nell' uomo e confrontan-

dola colla distanza che l' articolazione predetta aveva rispettivamente dallo sterno — e cioè: 22, 30, 32, 24, 15, 27, 18, 30 mill. — si vede che questa è stata sempre più o meno breve di quella. Il che vuol dire che l' articolazione si è verificata in un punto più o meno distante dalla estremità anteriore della costa, ossia nel dominio della cartilagine stessa (*).

Queste misure ci dimostrano altresì, che l' articolazione non era punto simmetrica in ambo i casi in cui si presentò bilateralmente; ed in vero, mentre in uno stava a 32 mill. a destra e a 24 a sinistra, nell' altro trovavasi a 18 mill. a destra e a 30 a sinistra.

L' esame dei preparati ci mostra inoltre, che le articolazioni condro-condrali erano fatte tutte sul tipo delle diartrosi, giacchè fornite di una vera cavità articolare contenente un liquido sinoviale. Ora questo fatto è degno di nota, e noi ne vedremo presto il perchè. Dette articolazioni offrivano movimenti passivi assai limitati e talora (esemplare 6°) neppur sensibili, perchè la capsula fibrosa che le limitava esternamente — manifesta emanazione del periostio pericondale — era assai corta e robusta e, s' insinuava talora fra le superficie articolari, sia fissandole fra loro, sia costituendovi frange e perfino dischi interarticolari, come nel bellissimo esemplare 7.° A questa limitazione di movimenti contribuiva certamente non poco anche la irregolarità delle superficie articolari, che abbiam viste generalmente villose, moriformi ecc., non che qualche briglia fibrosa, che talvolta le faceva aderire fra loro nella loro parte più centrale. Da ciò poi conseguì che la linea interarticolare si mostrò generalmente irregolare.

Un altro fatto degno di considerazione aveasi nella direzione della linea interarticolare, la quale si presentò costantemente ricurva colla concavità rivolta all' esterno, ossia contrariamente a quella condro-costale normale. E noi ne abbiam trovato puranco la ragione nel particolare sviluppo dell' osso pericondrale, il quale nel capo articolare interno, in luogo di arrestarsi a livello dell' articolazione, si spingeva più o meno oltre la linea articolare istessa in modo da abbracciare quasi l' estremità articolare oppo-

---

(*) In una donna di 72 anni, che avemmo occasione di esaminare poco dopo la lettura di questo lavoro all' Accademia, trovammo l' articolazione anomala a 4 soli mill. dallo sterno a destra, mentre a sinistra se ne trovava un' altra in circa nel mezzo della cartilagine; la quale, come al solito, era di natura jalina e rivestita di osso pericondrale. Notiamo queste due circostanze, perchè ci sembrano assai importanti per decidere della sede dell' articolazione. La cartilagine jalina non può appartenere in questi casi che alla cartilagine permanente, giacchè essa appunto è di tale natura; laonde, quando si veggono pezzi di cartilagine jalina nella spessezza dei capi articolari, non si dee esitare a considerarli come appartenenti alla cartilagine costale permanente rimasta divisa. In individui poi che hanno raggiunto la trentina, l' osso pericondrale non suole mancare in forma di un astuccio più o meno completo (V. fig. 5ª, tolta dal *Rambaud* et *Renault* — Atlante, tav. 17ª, fig. 8ª. annesso al testo: *Origine et développement des os.* Paris 1864); ond' esso costituisce un altro dato per decidere se l' articolazione ha avuto luogo nel dominio delle cartilagini costale.

sta. Anzi in un caso (esempl. 1°) si prolungava per oltre un centimetro sul margine anteriore del capo articolare esterno da fargli assumere la forma d' una vera incisura semilunare.

Ed un altro fatto pur degno di nota — dovuto anch' esso alla ossificazione pericondrale — era rappresentato dal rigonfiamento annulare, o viera ossea, che attorniava l' articolazione e che somigliava moltissimo a quel rilievo che formano tra loro due pezzi di ceralacca fusa quando vengono spinti l' uno contro l' altro. La viera non era punto un contrassegno esclusivo e caratteristico di queste articolazioni, giacché l' abbiamo incontrata in corrispondenza dell' articolazione sterno-condrale (esempl. 5°) e perfino in un preparato, ove non esisteva traccia di articolazione (esempl. 6°, lato sinistro). Peró é da notare che in nessun caso si mostró cosí considerevolmente sviluppata come in corrispondenza delle articolazioni condro-condrali e specialmente nella faccia inferiore o pleurale della costa, ove poteva essere molto facilmente avvertita, spingendo, secondo il consiglio del *Freund*, un dito nella fossa sopraclavicolare e facendolo scorrere lungo la prima costa, mentre la spalla del soggetto era tenuta elevata e la testa inclinata dallo stesso lato. Per nostra esperienza tale rilievo puó essere avvertito anche dalla parte anteriore, subito al di sotto della clavicola, purchè nel momento dell' esplorazione si tenga la spalla molto elevata.

Abbiamo inoltre osservato, che mentre la viera costituiva la parte più periferica della superficie articolare, la cartilagine jalina ne formava la parte più centrale, ambedue rivestite da sottile strato fibro-cartilagineo. La cartilagine jalina era tutta avvolta da osso pericondrale ed offriva in sé stessa un processo di ossificazione, come lo dimostravano i tanti punti ossei di grandezza diversa, che ove fusi fra loro ed ove isolati si vedevano sparsi nella medesima. In qualche esemplare questi punti ossei erano appena accennati; in altri erano più estesi; giammai peró l' estensione loro fu tale da occupare l' intera cartilagine, come il *Luschka* afferma d' aver visto in un caso (1).

In fine abbiamo veduto, che in tutti gl' individui (5 su 6), di cui ci era noto il sesso, l' articolazione si é presentata costantemente nel sesso maschile; 5 volte nel lato sinistro e 3 nel destro; 2 volte bilaterale, e 4 unilaterale, e di queste 4 una volta associata a diartrosi sterno-condrale nel lato opposto. Cinque volte su 6 individui non si trovó tubercolosi nei polmoni,

(1) A questo proposito non vogliamo omettere di avvertire, che nel sezionare longitudinalmente tali articolazioni, se nei capi articolari non si vede subito traccia di cartilagine, non si dee tosto conchiudere che questa sia completamente ossificata, giacchè può darsi benissimo che ne esistano tracce, ma più profondamente. Ciò accadde appunto a noi nell' esemplare n° 5; e poichè fummo tratti dall' errore mediante nuovi tagli che eseguimmo parallelamente al primo, così è necessario che una tal pratica sia puntualmente eseguita, prima di dare un definitivo giudizio.

e nell' unico caso (il 6° esemplare) in cui si rinvenne, essa aveva invaso l' apice nella stessa misura delle parti polmonari rimanenti e forse queste più notevolmente di quello.

Quanto poi all' articolazione sterno-condrale osservata nell' esemplare n° 5, notiamo solamente che essa era ben formata, come quella che trovasi normalmente nelle altre cartilagini di coste sternali.

Ciò posto, si domanda: Come s' è originata l' articolazione condro-condrale? — Riflettendo sulle opinioni espresse in proposito dagli Autori, noi non siam riusciti a comprendere come una cartilagine così robusta e così breve, come è quella della prima costa, possa subire una frattura per strappamento. Non è già che vogliamo negare la possibilità di tali fratture per le coste in genere: tutt' altro! ma è per la 1ª costa che non la intendiamo facilmente. Primieramente, perchè i muscoli scaleni ci sembrano troppo deboli a produrre cotanto effetto; 2° perchè uno di essi, il posteriore, s' inserisce totalmente alla 2ª costa, onde non potrebbe influire sulla prima; 3° perchè la prima costa posteriormente è così poco mobile da opporre un certo ostacolo allo spostamento rapido in alto della sua estremità anteriore; 4° perchè vi si dovrebbero opporre anche i muscoli intercostali, i quali colla loro tonicità, se non altro, servono a tenere fissate la prima costa alla costola sottostante. — Il fatto poi d' avere trovato solo una volta su sei individui, che avevano articolazioni anomale, un processo tubercolare non circoscritto all' apice del polmone, nè quivi maggiormente sviluppato e senza traccia di cicatrizzazione, concorre a nostro avviso, a togliere ogni importanza al concetto puramente teleologico del *Freund*.

Nè l' altra idea espressa solo dal *Luschka*, che la pseudoartrosi in alcuni casi sia la conseguenza di un' alterazione primitiva della cartilagine, ci sembra ben fondata. Innanzi tutto la cartilagine difficilmente ammala primitivamente, essendo le alterazioni sue ordinariamente secondarie a quelle delle parti vicine; e poi quale processo morboso potrebbe determinare cotanto? L' infiammazione? no; perchè qualunque essa si fosse, purulenta, iperplastica, ecc. darebbe luogo a ben altre conseguenze. Le degerazioni? neppure, giacchè non ci darebbero ragione della produzione di quelle frange, nè di quei dischi interarticolari, che vi abbiamo rinvenuti e che accennano a qualche cosa di peculiare, di tipico in quelle articolazioni, che abbiam dovuto considerare come vere diartrosi. Ora quale altro processo patologico potrebb' esser invocato?

Quando si danno simili casi — quando cioè tutti i fatti possono essere rapportati ad un tipo — l' impressione, che si riceve, è quella piuttosto di un' anomalia di sviluppo, per cui avanzano disgiunte od anche semplice-

mente distinte delle parti, che d' ordinario soglionsi fondere insieme. E questa appunto è l' impressione nostra, e l' accettiamo tanto più volontieri, in quanto che coi dati desunti da altre prime cartilagini costali ci è dato rilevare nell' articolazione condro-condrale le stesse modalità di forma, che s' incontrano talora nell' articolazione condro-sternale, e che indubbiamente dipendono da anomalia di sviluppo. Quivi di fatto — in luogo della normale sinartrosi — trovasi talvolta, quando uno strato fibro-cartilagineo, quando una diartrosi a superficie irregolari e talora in parte riunite fra loro per tessuto fibro-cartilagineo, quando infine una diartrosi regolarissima. Ed analogamente lunghesso la cartilagine della prima costa, in un punto più o meno lontano da questa, vediamo talvolta quando una stria fibrosa, ora semplice (fig. 6ª, *f*) ora in via di ossificazione (fig. 7ª, *fo*); quando una diartrosi più o meno irregolare ed anche in parte attraversata da tessuto fibroso, come alcune di quelle superiormente descritte, quando infine una diartrosi regolarissima e con disco fibro-cartilagineo, come nell' esemplare 7°.

Ammesso il concetto di un' anomalia di sviluppo, per spiegare la genesi dell' articolazione condro-condrale, è necessario pensare, che in origine la cartilagine permanente sia costituita, non da uno (1), ma per lo meno da due nuclei, i quali, quando separati dalla costa e dallo sterno e uniti fra loro, darebbero luogo all' articolazione condro-costale e condro-sternale, e quando saldati colla costa e collo sterno e separati fra loro, renderebbero ragione dell' articolazione condro-condrale. Che se l' embriologia non ha peranco dimostrato cotanto, non per questo dev' esser giudicato strano e infondato il nostro supposto; giacchè è noto, che anche per altri organi è accaduto lo stesso. Per esempio, la porzione basilare dell' osso occipitale più volte fu vista divisa trasversalmente a diversa altezza e senza che per alcun tempo se ne intendesse il perchè; ma, quando l' embriologia fece conoscere, che in una fase molto precoce detta porzione conteneva alcuni rigonfiamenti cordali, che la dimostravano composta come di tanti piccoli segmenti succedentisi l' uno all' altro dal basso all' alto, allora il mistero fu svelato e il fenomeno esattamente interpretato. E lo stesso è accaduto per l' osso intermascellare, per la pluralità delle vertebre coccigee e.... si può dire, per la massima parte dei fatti teratologici. Ond' è a sperare, che altrettanto sarà dimostrato anche per la cartilagine costale.

Se non che il nostro supposto non rappresenta che la condizione predisponente all' anomalia. Ma quale ne sarà la condizione determinante? In un altro lavoro sulle varietà numeriche delle vertebre (2) esprimemmo

---

(1) Il Luschka ha visto in un embrione due nuclei cartilaginei, uno per la costa, l' altro per la cartilagine permanente, distinti fra loro.

(2) D' Ajutolo — Contribuzione allo studio delle varietà numeriche delle vertebre, — Il Morgagni. Anno XXX. Milano, maggio 1888.

l' opinione, che molto probabilmente alla produzione di esse dovevano contribuire le anomalie nello sviluppo e nella distribuzione dei vasi sanguigni, che sono, per così dire, i regolatori dello sviluppo degli organi. E come argomento, tra tanti altri ricordammo lo stato delle ossa nei pseudo rachitici, nei quali appunto per anomalie vascolari veggonsi le cartilagini, ora senza ossificazione, ora ossificate irregolarmente ed ora perfino costituite a tratti di tessuto fibroso, come dimostrò il Prof. *Taruffi* nel 1884 (1). Ora altrettanto noi incliniamo ad ammettere anche per le articolazioni della prima cartilagine costale, tanto più che questa in qualche circostanza fu vista rappresentata da un semplice nastro fibroso (2).

Questo é quanto pensiamo in proposito. Aggiungiamo soltanto d' avere già intrapreso studii embriologici e d' anatomia comparativa su tale argomento, e se le nostre fatiche saranno coronate da buon successo, non mancheremo di renderne edotto il pubblico medico.

In conclusione, le articolazioni che si riscontrano talvolta nel dominio della 1ª cartilagine costale, rappresentano, per noi, un' anomalia di sviluppo, per la quale i nuclei (forse due) che originariamente la costituiscono, rimangono separati fra loro, o dalle parti vicine (sterno e costa), probabilmente a motivo di un' anomala distribuzione vasale.

---

(1) Taruffi C. — Storia d' un caso di pseudo-rachite fetale. Memorie dell' Istituto di Bologna. S. IV, Tom. VII, pag. 671-72. Anno 1884.

(2) Aeby (Arch. f. Anat. 1868. S. 68; cit. da *Henle* — Handbuch der syst. Anat. des Mensch. Bd. I, S. 73. Braunschweig 1871) ha visto un caso, in cui le estremità anteriori della 1ª costa erano congiunte collo sterno mediante un tessuto legamentoso.

SPIEGAZIONI DELLE FIGURE

Indicazioni comuni a molte figure.
st, sterno.
d, diartrosi.
co, costa.
ca, capsula fibrosa.
op, osso pericondrale.
cj, cartilagine jalina.
po, punti di ossificazione nella cartilagine.

Indicazioni particolari.

Fig. 1ª — Rappresenta l'articolazione condro-condrale bilaterale degli esemplari 3° e 4° (al naturale).
d, diartrosi destra.
d', » sinistra.

Fig. 2ª — Rappresenta gli esemplari 7° ed 8°. Le coste sono state segate longitudinalmente ed in un piano orizzontale fino alla linea mediana dello sterno.
d, diartrosi condro-condrale destra.
d', » » sinistra.
fe, disco interarticolare fibro-cartilagineo.

Fig. 3ª — È l' effigie dell' esemplare n° 5. La sezione delle coste é stata fatta come negli esemplari 7° ed 8°.
d, diartrosi sterno-condrale.
d', diartrosi condro-condrale.
f, tessuto fibro-cartilagineo dentro l' articolazione.
fc, fibro-cartilagine sterno-condrale.
v, viera ossea, o ingrossamento annulare osseo periarticolare.

Fig. 4ª — Rappresenta l' esemplare n° 1°. La costa è stata segata longitudinalmente e dall' alto al basso (al naturale).

a, cavità articolare condro-condrale.

l, spazio ellittico tra la cartilagine e l' osso pericondrale.

pr, prolungamento dell' osso pericondrale lungo il margine anteriore della costa.

Fig. 5ª — Tolta dall' Atlante del *Rambaud* et *Renault* (Fig. 8ª Tav. XVII).

cl, clavicola.

g, tratto in cui l' osso pericondrale è annularmente interrotto.

Fig. 6ª — Rappresenta una cartilagine costale, segata longitudinalmente con trasformazione fibrosa in forma di stria (*f*).

Fig. 7ª — Rappresenta una parte della prima costa sinistra d' un vecchio di 72 anni. In essa si vede, che tanto la cartilagine quanto l' osso pericondrale sono attraversati da uno strato di fibro-cartilagine avente un cospicuo punto di ossificazione nel centro.

E. Contoli, dis. dal vero e in pietra.   lit. G. Wenk e Figli — Bologna.

INDICE

INDICE